УДК 531.1/2

СТ.Н.БЪЧВАРОВ, В.Д.ЗЛАТАНОВ

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕКТОРА УГЛОВОГО УСКОРЕНИЯ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

1. Введение

Известно, что скорость $\mathbf{v}$ произвольной точки М абсолютно твердого тела определяется формулой

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{AM}, \tag{1}$$

называемой законом распределения скоростей точек тела.

Вектор $\boldsymbol{\omega}$ в формуле (1), называемый вектором угловой скорости тела, не зависит от выбора точки М и полюса А и является важной кинематической характеристикой движения.

Введение вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ осуществляется в основном двумя способами. Первый способ основан на понятии вектора бесконечно малого поворота тела. Обычно сначала рассматривается твердое тело с одной неподвижной точкой А и двумя бесконечно близкими положениями, соответствующими моментам t и $t + \Delta t$. Перемещение $d\mathbf{r} = \mathbf{v}\,dt$ произвольной точки М тела перпендикулярно вектору $\mathbf{r} = \mathbf{AM}$. Вводится вектор $d\boldsymbol{\theta}$ таким образом, что $d\mathbf{r} = d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}$, и после этого из равенства $d\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\omega}\,dt$ определяется вектор $\boldsymbol{\omega}$. Пусть точка А движется скоростью $\mathbf{v}_A$. Вводится система координат, имеющая начало в точке А и перемещающаяся поступательно со скоростью $\mathbf{v}_A$. Движение тела складывается из переносного поступательного движения со скоростью $\mathbf{v}_A$ и относительного вращательного движения вокруг точки А. В результате этого сложения получается формула (1) ([2], [6], [9], [10] и др.). Введение вектора бесконечно малого поворота можно осуществить в соответствии с теоремами конечного поворота Эйлера и Шаля и пользуясь осью конечного поворота тела ([14], [16]). Подробнее теория конечного поворота тела изложена в [7].

Другой часто встречающийся способ введения вектора $\boldsymbol{\omega}$ основан на том, что с твердым телом связан подвижной триэдр $A\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$. Для единичных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ имеем

$$\mathbf{e}_i . \mathbf{e}_j = \begin{cases} 1 & (i = j), \\ 0 & (i \neq j). \end{cases} \tag{2}$$

Во время движения твердого тела единичные векторы $\mathbf{e}_i$, постоянные по модулю, меняют свои направления, и поэтому $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i(t)$. Производная $\dot{\mathbf{e}}_i$ представляется в виде

$$\dot{\mathbf{e}}_i = \omega_{i1}\mathbf{e}_1 + \omega_{i2}\mathbf{e}_2 + \omega_{i3}\mathbf{e}_3. \tag{3}$$

На основании соотношения (2) имеем $\frac{d}{dt}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = 0$, поэтому $\dot{\mathbf{e}}_i . \mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_i . \dot{\mathbf{e}}_j$, откуда следует, что $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$. Коэффициенты ω_{ij} представляют собой компоненты кососимметрического тензора, которому сопоставляется вектор $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2 + \omega_3\mathbf{e}_3$, причём $\omega_1 = \omega_{23}, \omega_2 = \omega_{31}, \omega_3 = \omega_{12}$. Тогда формулы (3) принимают известный вид:

$$\dot{\mathbf{e}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i\,;\ i = 1, 2, 3. \qquad (4)$$

Радиус-вектор $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$, соединяющий некоторую неподвижную точку O с произвольной точкой M тела, представлен как векторная сумма радиус-вектора полюса $\mathbf{r} = \mathbf{OA}$ и радиус-вектора $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{AM}$, определяющего положение точки M относительно полюса A, т.е. $\mathbf{r} = \mathbf{r}_A + \boldsymbol{\rho}$. Здесь вектор $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{AM} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$ неизменно связан с телом и поэтому координаты x_i постоянны во времени. Дифференцируя $\mathbf{r} = \mathbf{r}_A + \boldsymbol{\rho}$ и используя соотношения (4), приходим к формуле (1) . Этот способ в каком-то смысле более формальный, но с другой стороны предлагает возможность связывания вектора $\boldsymbol{\omega}$ с углами Эйлера.

В середине прошлого столетия болгарский ученый Аркадий Стоянов опубликовал несколько работ на тему “О кинематике идеально твердого тела” [11,12], результаты которых представлены в [13]. В них кинематика общего движения абсолютно твердого тела представлена дедуктивным способом, без использования метода подвижного триэдра, формул (4) Пуансона и вектора бесконечно малого поворота. Принимается, что общее движение твердого тела в пространстве определяется движением трех точек A_1, A_2, A_3 не лежащих на одной прямой. Решалась следующая задача: в данный момент времени известны скорости $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ трех “основных” точек A_1, A_2, A_3; требуется определить скорость произвольной точки M этого тела. Решением этой задачи стала формула для определения вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ тела при помощи скоростей трех точек и их взаимных положений [13]

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1.\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 + \mathbf{v}_2.\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3 + \mathbf{v}_3.\mathbf{A}_3\mathbf{A}_1}. \qquad (5)$$

Доказательство этой формулы следует непосредственно из закона распределения скоростей (1). Выражая последовательно скорости “основных” точек, имеем

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \ \ , \ \ \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}_2\mathbf{A}_3 \ \ , \ \ \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_3 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}_3\mathbf{A}_1\ .$$

Векторно умножая равенства слева на $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ соответственно и складывая, получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1 = \boldsymbol{\omega}.&\left(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 + \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{A}_2\mathbf{A}_3 + \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{A}_3\mathbf{A}_1\right) - \\ &- \left(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}_1\right) \cdot \left(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_3\mathbf{A}_1\right).\end{aligned}$$

Здесь принято во внимание, что $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}_1 = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}_2 = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}_3$, и, учитывая равенство $A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_1 = 0$, получаем равенство (5).

2. Цель исследования

Цель настоящей работы – определить вектор углового ускорения тела $\boldsymbol{\varepsilon}$, если известны скорости $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ и ускорения $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ трех “основных точек” A_1, A_2, A_3 в данный момент времени.

3. Определение вектора углового ускорения

Определим вектор углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}$ твердого тела в общем случае его движения (рис. 1). Представляем формулу (5) в виде

$$\boldsymbol{\omega}\cdot\left(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2+\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3+\mathbf{v}_3\cdot\mathbf{A}_3\mathbf{A}_1\right)=\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_2\times\mathbf{v}_3+\mathbf{v}_3\times\mathbf{v}_1$$

и дифференцируем по времени

$$\begin{aligned}&\dot{\boldsymbol{\omega}}\cdot\left(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2+\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3+\mathbf{v}_3\cdot\mathbf{A}_3\mathbf{A}_1\right)+\\&+\boldsymbol{\omega}\cdot\left(\dot{\mathbf{v}}_1\cdot\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2+\mathbf{v}_1\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2}{\mathrm{dt}}+\dot{\mathbf{v}}_2\cdot\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3+\mathbf{v}_2\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3}{\mathrm{dt}}+\dot{\mathbf{v}}_3\cdot\mathbf{A}_3\mathbf{A}_1+\mathbf{v}_3\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}_3\mathbf{A}_1}{\mathrm{dt}}\right)=\\&=\dot{\mathbf{v}}_1\times\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_1\times\dot{\mathbf{v}}_2+\dot{\mathbf{v}}_2\times\mathbf{v}_3+\mathbf{v}_2\times\dot{\mathbf{v}}_3+\dot{\mathbf{v}}_3\times\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_3\times\dot{\mathbf{v}}_1\,.\end{aligned}\tag{6}$$

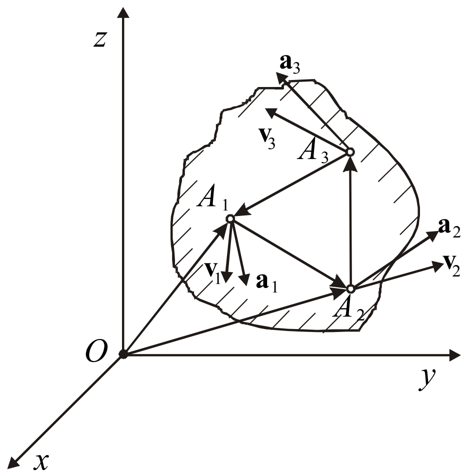

Рис. 1. Общий случай движения твердого тела

Имея в виду, что

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}=\boldsymbol{\varepsilon}\ ,\quad \dot{\mathbf{v}}_{\mathbf{i}}=\mathbf{a}_{\mathbf{i}}\ \left(i=1,2,3\right)\ ,\ \frac{d\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2}{dt}=\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1\ ,\ \frac{d\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3}{dt}=\mathbf{v}_3-\mathbf{v}_1\ ,\ \frac{d\mathbf{A}_3\mathbf{A}_1}{dt}=\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_3,\tag{7}$$

подставляя (7) в (6) и совершая несложные преобразования, получаем для вектора углового ускорения

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}=&\frac{\mathbf{a}_1\times\left(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_3\right)+\mathbf{a}_2\times\left(\mathbf{v}_3-\mathbf{v}_1\right)+\mathbf{a}_3\times\left(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2\right)}{\mathbf{v}_1.\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2+\mathbf{v}_2.+\mathbf{v}_3.\mathbf{A}_3\mathbf{A}_1}-\\&-\boldsymbol{\omega}\frac{\mathbf{a}_1.\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2+\mathbf{a}_2.\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3+\mathbf{a}_3.\mathbf{A}_3\mathbf{A}_1+\mathbf{v}_1.\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_2.\mathbf{v}_3+\mathbf{v}_3.\mathbf{v}_1-\left(\mathbf{v}_1^2+\mathbf{v}_2^2+\mathbf{v}_3^2\right)}{\mathbf{v}_1.\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2+\mathbf{v}_2.\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3+\mathbf{v}_3.\mathbf{A}_3\mathbf{A}_1}\,,\end{aligned}\tag{8}$$

где вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ нужно выразить при помощи (5). Полученной формулой (8) определяется вектор углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}$ через скорости $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ и ускорении $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ трех неколлинеарных основных точек A_1,A_2,A_3, в предположении, что движение этих точек известно.

4. Частные случаи движения твердого тела

Рассмотрим определение углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}$ в случаях, когда на движение твердого тела наложены некоторые ограничения.

- ***Поступательное движение твердого тела.*** В случае поступательного движения: скорости и ускорения всех точек тела равны между собой

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3 \quad , \quad \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3 \ . \tag{9}$$

Подставляя (9) последовательно в (5) и (8) получаем

$$\boldsymbol{\omega} = 0 \quad , \quad \boldsymbol{\varepsilon} = 0 , \tag{10}$$

т.е. векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ при поступательном движении тела равны нулю.

- ***Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси.*** Это движение твердого тела, при котором две точки A_2 и A_3 тела неподвижны. Прямая, определённая этими точками, называется неподвижной осью тела. Теперь движение тела определяется движением только одной точки A_1, находящейся вне оси вращения $Oz \equiv A_2A_3$ (рис. 2).

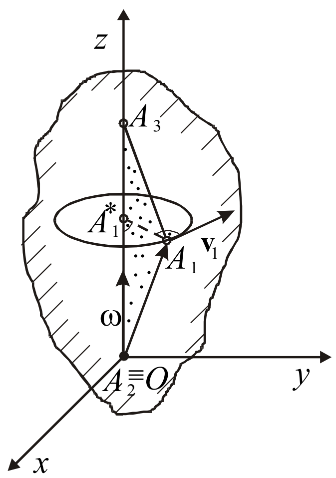

Рис. 2. Вращательное движение

Тело абсолютно твердое, поэтому

$$(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^2 = \text{const} \quad , \quad (\mathbf{A}_3\mathbf{A}_1)^2 = \text{const} \, ;$$

после дифференцирования по времени имеем

$$\frac{d\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1}{dt} . \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1 = 0 \quad , \quad \frac{d\mathbf{A}_3\mathbf{A}_1}{dt} . \mathbf{A}_3\mathbf{A}_1 = 0 \quad \text{или} \quad \mathbf{v}_1 . \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1 = 0 \quad , \quad \mathbf{v}_1 . \mathbf{A}_3\mathbf{A}_1 = 0 ,$$

потому что $\dfrac{d\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1}{dt} = \mathbf{v}_1$ и $\dfrac{d\mathbf{A}_3\mathbf{A}_1}{dt} = \mathbf{v}_1$. Из этого следует, что $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{A}_3\mathbf{A}_1$, т.е. скорость $\mathbf{v}_1$ любой точки тела вне оси вращения перпендикулярна плоскости, определённой этой точкой и этой осью. Поэтому введём вектор $\boldsymbol{\omega}$, направленный по оси вращения, таким образом, чтобы его векторное произведение на $\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1$ или $\mathbf{A}_3\mathbf{A}_1$ равнялось $\mathbf{v}_1$, т.е.

$$\mathbf{v}_1 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OA}_1. \tag{11}$$

Здесь O – произвольная точка на оси. Если размерность $\mathbf{v}_1$ – м/с, размерность $\mathbf{OA}_1$ – м и размерность $\boldsymbol{\omega}$ – с$^{-1}$, то коэффициент пропорциональности перед векторным произведением в правой части равенства равняется единице.

Обозначим A_1^* ортогональную проекцию точки A_1 на ось вращения $Oz \equiv A_2A_3$ и представим вектор $\mathbf{OA}_1$ как $\mathbf{OA}_1 = \mathbf{OA}_1^* + \mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1$. Тогда формула (11) примет вид

$$\mathbf{v}_1 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1, \tag{12}$$

где $\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1 \perp Oz$. Умножаем обе части равенства слева векторно на $\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1$

$$\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1 \times \mathbf{v}_1 = \mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1 \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right),$$

или

$$\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1 \times \mathbf{v}_1 = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1{}^2 - \mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1 \cdot \left(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right),$$

и так как $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1$, находим

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1 \times \mathbf{v}_1}{\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1{}^2}. \tag{13}$$

Дифференцируя по времени, получаем

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \frac{\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1 \times \mathbf{a}_1}{\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1{}^2}, \tag{14}$$

где $\mathbf{a}_1$ – ускорение точки A_1, $\dfrac{d\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1}{dt} = \dfrac{d\mathbf{OA}_1}{dt} = \mathbf{v}_1$, а $\left|\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right| = A_1^*A_1 = \mathrm{const}$.

- ***Плоскопараллельное движение тела.*** В этом случае каждая точка тела движется в плоскости, параллельной некоторой неподвижной плоскости α (плоскость движения). Для задания плоскопараллельного движения тела достаточно задать движение какого-либо сечения тела плоскостью, параллельной плоскости α (рис. 3). Положение и движение этой плоской фигуры в ее плоскости Oxy вполне определяется двумя точками $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$, причём

$$\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2{}^2 = \mathrm{const}.$$

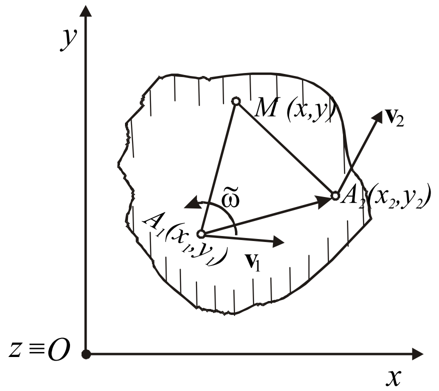

Рис.3. Плоскопараллельное движение

Дифференцируем последнее соотношение по времени и находим

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{A_1A_2}}{\mathrm{dt}}\cdot\mathbf{A_1A_2}=0 \quad \text{или } (\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1)\cdot\mathbf{A_1A_2}=0,$$

так как $\frac{d\mathbf{A_2A_1}}{dt}=\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1$. Отсюда следует, что разность скоростей $\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1$ точек A_1 и A_2 в любой момент времени перпендикулярна прямой, соединяющей эти точки. Введём вектор $\boldsymbol{\omega}$, перпендикулярный плоскости движения, таким образом, чтобы разность скоростей $\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1$ равнялась векторному произведению вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ на $\mathbf{A_1A_2}$, т.е.

$$\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{A_1A_2} \quad \text{или } \mathbf{v}_2=\mathbf{v}_1+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{A_1A_2}\ . \tag{15}$$

После векторного умножения второго векторного равенства (15) на $\mathbf{v}_1$, имея в виду, что $\boldsymbol{\omega}\perp\mathbf{v}_1$, для вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ получаем

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{A_1A_2}}, \tag{16}$$

а после векторного умножения первого равенства (15) на $\mathbf{A_1A_2}$ и учитывая, что $\boldsymbol{\omega}\perp\mathbf{A_1A_2}$, получаем формулу для определения вектора $\boldsymbol{\omega}$ при помощи скоростей точек A_1 и A_2 плоской фигуры тела

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)\times\mathbf{A_1A_2}}{\mathbf{A_1A_2}^2}. \tag{17}$$

Из равенств (16) и (17) находим два выражения для определения углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}$ плоской фигуры тела скоростями и ускорениями точек A_1 и A_2 этой фигуры.

Дифференцируя по времени формулу (16), имеем

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\dot{\boldsymbol{\omega}}=\frac{\mathbf{a}_1\times\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_1\times\mathbf{a}_2}{\mathbf{v}_1.\mathbf{A_1A_2}}-\boldsymbol{\omega}\frac{\mathbf{a}_1\,.\,\mathbf{A_1A_2}+\mathbf{v}_1.\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1^{\,2}}{\mathbf{v}_1.\mathbf{A_1A_2}}. \tag{18}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ можно получить из формулы (17).

Дифференцируя по времени формулу (17), получаем

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \frac{(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2) \times \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2}{\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2^{\ 2}}, \tag{19}$$

где вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$ определяется только ускорениями $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ точек A_1 и A_2, а также их взаимным положением.

- ***Движение твердого тела, имеющего одну неподвижную точку.*** В этом случае точки тела движутся по поверхностям сфер с центром в неподвижной точке $O \equiv A_3$ (рис. 4).

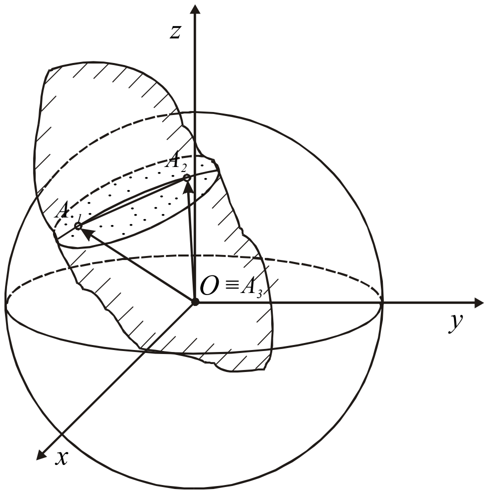

Рис.4. Движение тела имеющего одну неподвижную точку

Движение тела вполне определяется движением сферической фигуры, полученной пересечением тела со сферой с центром $O \equiv A_3$. С другой стороны движение этой сферической фигуры определяется движением её двух точек A_1 и A_2. Пусть третья основная точка – это неподвижная точка $A_3 \equiv O$. Тогда имеем

$$\mathbf{OA}_1^{\ 2} = \text{const} \quad , \quad \mathbf{OA}_2^{\ 2} = \text{const} \quad , \quad \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2^{\ 2} = \text{const} .$$

Дифференцируя по времени, получаем

$$\frac{d\mathbf{OA}_1}{dt}.\mathbf{OA}_1 = 0 \quad , \quad \frac{d\mathbf{OA}_2}{dt}.\mathbf{OA}_2 = 0 \quad , \quad \frac{d\mathbf{A_1A_2}}{dt}.\mathbf{A_1A_2} = 0 ,$$

т.е. во время движения

$$\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{OA}_1 \quad , \quad \mathbf{v}_2 \perp \mathbf{OA}_2 \quad , \quad \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \perp \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 ,$$

так как $\frac{d\mathbf{OA}_1}{dt} = \mathbf{v}_1, \frac{d\mathbf{OA}_2}{dt} = \mathbf{v}_2, \frac{d\,\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2}{dt} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$. Имеем

$$\mathbf{v}_1 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OA}_1 \quad , \quad \mathbf{v}_2 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OA}_2 \quad , \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \ .$$

Векторно умножая третье равенство слева на $\mathbf{v}_1$, снова получаем

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_1.\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2}. \tag{20}$$

В формуле (20), в отличие от формулы (16), скорости $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ точек A_1 и A_2 не всегда перпендикулярны одной неподвижной оси.

Дифференцируя (20) по времени, имеем

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{a}_2}{\mathbf{v}_1.\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2} - \boldsymbol{\omega}\frac{\mathbf{a}_1.\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 + \mathbf{v}_1.\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1{}^2}{\mathbf{v}_1.\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2}, \tag{21}$$

причём скорости $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ и ускорения $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ точек A_1 и A_2 не всегда перпендикулярны одной неподвижной оси, как это было в случае плоскопараллельного движения.

5. Пример

Рассмотрим кривошипно-ползунный механизм (рис. 5). Кривошип ОА длиной r вращается с постоянной угловой скоростью ω_0. Определить угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ и угловое ускорение $\boldsymbol{\varepsilon}$ шатуна АВ при $\varphi = 60°$ и $\angle OAB = 90°$.

Шатун совершает плоское движение. Для скоростей и ускорений основных точек *A* и *B* ($A \equiv A_1$, $B \equiv A_2$) имеем

$$\mathbf{v}_A = \omega_0 r\frac{\mathbf{BA}}{BA}, \quad \mathbf{v}_B = -\frac{2\sqrt{3}}{3}\omega_0 r\mathbf{i}, \quad \mathbf{a}_A = \omega_0{}^2 r\frac{\mathbf{AO}}{AO}, \quad \mathbf{a}_B = -\frac{2}{9}\omega_0{}^2 r\mathbf{i},$$

где $\mathbf{i}$ – единичный вектор оси Ox, а $\frac{\mathbf{BA}}{BA}$ и $\frac{\mathbf{AO}}{AO}$ единичные векторы, определяющие направлений скоростей $\mathbf{v}_A$ и $\mathbf{a}_B$.

Используя формулу (16) и имея ввиду, что $\frac{\mathbf{BA}}{BA} \times \mathbf{i} = -\sin 30°.\mathbf{k}$, $AB = r\sqrt{3}$, получаем угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ шатуна АВ

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{v}_A \times \mathbf{v}_B}{\mathbf{v}_A.\mathbf{AB}} = \frac{\omega_0 r\frac{2\sqrt{3}}{3}\omega_0 r}{\omega_0 r r\sqrt{3}}.\frac{\mathbf{BA}}{BA} \times \mathbf{i} = -\omega_0\frac{2}{3}\sin 30°.\mathbf{k} = -\frac{\omega_0}{3}\mathbf{k}.$$

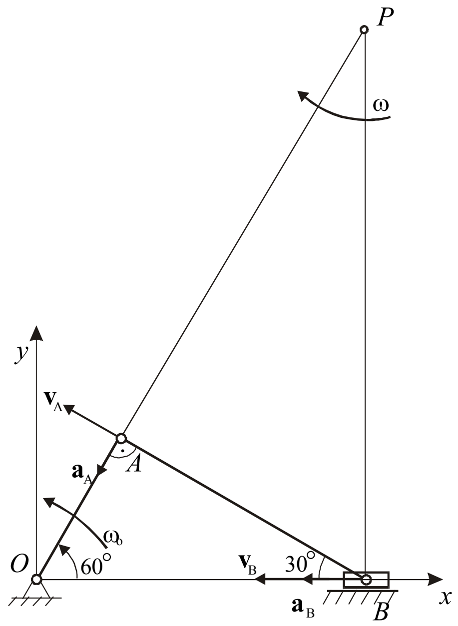

Рис.5. Кривошипно-ползунный механизм

Для определения углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}$ шатуна воспользуемся формулой (18). Имея в виду, что $\dfrac{\mathbf{AO}}{AO}\times\mathbf{i}=\sin 60°.\mathbf{k}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{k}$, $\mathbf{BA}\times\mathbf{i}=-\sin 30°.\mathbf{k}=-\dfrac{1}{2}\mathbf{k}$,

$\dfrac{\mathbf{AO}}{AO}\cdot\dfrac{\mathbf{AB}}{AB}=\cos 90°=0$, $\dfrac{\mathbf{BA}}{BA}\cdot\mathbf{i}=-\cos 30°=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\mathbf{v}_A.\mathbf{AB}=-\omega_0 r^2\sqrt{3}$, получаем

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{\mathbf{a}_A\times\mathbf{v}_B+\mathbf{v}_A\times\mathbf{a}_B}{\mathbf{v}_A.\mathbf{AB}}-\boldsymbol{\omega}\frac{\mathbf{a}_A.\mathbf{AB}+\mathbf{v}_A.\mathbf{v}_B-\mathbf{v}_A^2}{\mathbf{v}_A.\mathbf{AB}}=$$

$$=\frac{-\omega_0^2 r\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\omega_0 r\dfrac{\mathbf{AO}}{AO}\times\mathbf{i}-\omega_0 r\dfrac{2}{9}\omega_0^2 r\dfrac{\mathbf{BA}}{BA}\times\mathbf{i}}{-\omega_0 r r\sqrt{3}}+$$

$$+\frac{\omega_0}{3}\mathbf{k}\frac{\omega_0^2 r\dfrac{\mathbf{AO}}{AO}.\mathbf{AB}-\omega_0 r\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\omega_0 r\dfrac{\mathbf{BA}}{BA}.\mathbf{i}-\omega_0^2 r^2}{-\omega_0 r r\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{\omega_0^3 r^2\dfrac{2\sqrt{3}}{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\omega_0^3 r^2\dfrac{2}{9}.\dfrac{1}{2}-\omega_0^3 r^2\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cos 90°-\omega_0^3 r\dfrac{2\sqrt{3}}{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\omega_0^3 r^2}{\omega_0 r^2\sqrt{3}}\mathbf{k}=\frac{8\sqrt{3}}{27}\omega_0^2\mathbf{k}.$$

Векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ перпендикулярны плоскости движения. Знак "–" перед $\boldsymbol{\omega}$ указывает, что вращение шатуна совершается в данный момент времени по часовой стрелке, а "+" перед $\boldsymbol{\varepsilon}$, что шатун вращается замедленно, и вектор направлен к наблюдателю.

Полученные результаты совпадают с результатами решения этих задач при помощи мгновенного центра скоростей и законов распределения скоростей и ускорений.

6. Заключение

После краткого обзора принятых в литературе способов введения вектора угловой скорости в кинематике абсолютно твердого тела в работе представлена формула для вычисления угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ по трём точкам, не лежащим на одной прямой. На основании этой формулы получены формулы для определения углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}$ в общем случае движения твёрдого тела и в частных случаях, с использованием скорости и ускорения трех "основных" точек. Применение полученных формул проиллюстрировано на примере кривошипно-шатунного механизма. Результаты совпадают с результатами решения этих задач традиционными методами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Аппель П.** Теоретическая механика, т. I. – М.: Физматгиз, 1960.-515 с.
2. **Бухгольц Н.Н.** Основной курс теоретической механики, т. I. – М.: Наука, 1965.-467 с.
3. **Бъчваров С.** Механика, ч.I. – С.: Стандартизация принт, 2001.-391 с.
4. **Зоммерфельд А.** Механика. – М.: РХД 2001.-368 с.
5. **Кочин Н.Е**. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. – М.: Наука, 1965.-424 с.
6. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Механика. – М.: Наука, 1988.-215 с.
7. **Лурье А.И.** Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961.-824 с.
8. **Писарев А., Парасков Ц., Бъчваров С.** Курс по теоретична механика, ч.I. – С.: Техника, 1974.-427 с.
9. **Розе Н**.В. Теоретическая механика I. – Л.-М.: Гостехиздат, 1933.-428 с.
10. **Синг Дж**.Л. Классическая механика. – М.: Физматгиз, 1963.-448 с.
11. **Стоянов А.** Върху кинематиката на твърдо тяло. – Годишник на Държавната политехника, т.III, кн.I, С. 1950.
12. **Стоянов А.** Върху кинематиката на абсолютно твърдото тяло, II. – Годишник на ИСИ, т.V, С. 1952-1953.
13. **Стоянов А.** Теоретична механика, ч.II Кинематика и динамика. – С.: Наука и изкуство, 1953, 1956.
14. **Суслов Г.**К. Теоретическая механика. – М.: Гостехиздат, 1946. 667 с.
15. **Харламов П.В.** О распределении скоростей в твердом теле. – Республиканский межведомственный сборник "Механика твердого тела".– Киев: Наукова думка, 1969.-с 77-81.
16. **Уиттекер Е.**Т. Аналитическая динамика. – М.-Л.:ОНТИ, 1937.-586 с.

Поступила в редакцию 13.02.2007
После доработки 10.03.2007