

## КРИТЕРИИ ДЛЯ АНАЛИЗА ПСЕВДОУДАРА ПРИ СОХРАНЕНИИ КИНЕМАТИЧЕСКОГО КОНТАКТА В ЗАЗОРАХ ШАРНИРОВ

### 1. Предварительные замечания

Зазор, как правило, является сопутствующим фактором любой кинематической пары, осуществляющей подвижное соединение звеньев механизма. При отсутствии зазоров даже при идеальном изготовлении элементов кинематической пары возникает опасность существенного увеличения реакций. В частности, это наблюдается при температурном расширении деталей, что, в свою очередь, вызывает увеличение сил трения и, в конечном итоге может даже привести к полному заклиниванию механизма.

По существу, кинематические пары следует классифицировать как неудерживающие связи, к которым обычно относят подвижные соединения звеньев с односторонним контактом. Действительно, хотя кинематическая пара в целом реализует двухстороннюю связь, она при зазорах эту функцию выполняет лишь частично, так как при переключке в зазоре имеют место локальные разрывы кинематической цепи, характерные для систем с неудерживающими связями. Такие связи можно характеризовать как псевдоудерживающие.

По воздействию на колебательную систему можно условно выделить три характерных случая проявления зазора, каждому из которых отвечает соответствующая область изменения параметров и внешних возмущений. В *первом случае* зазор проявляет себя как нелинейный элемент, существенно влияющий на спектр частот свободных колебаний. Во *втором случае* влияние зазора в основном проявляется как импульсное возмущение на ограниченном временном интервале кинематического цикла при отсутствии сколько-нибудь заметного искажения частотного спектра исходной линейной системы. При этом, однако, сохраняется возможность многократных соударений, приводящих к виброударным режимам, при которых динамический эффект от зазоров приближается к первому случаю. Наконец, в *третьем случае* определяющую роль играют «параметрические импульсы», вызванные достаточно резким изменением спектра собственных частот.

Проблема рационального динамического синтеза колебательных систем с учетом зазоров особо остро встает при проектировании высокоскоростных цикловых механизмов с нелинейной функцией положения, поскольку в этом классе механизмов зазоры могут привести к большим искажениям заданного программного движения рабочих органов, а также к повышению шума и виброактивности привода. Нередко именно величина зазоров в конечном итоге лимитирует производительность и эксплуатационные характеристики многих современных технологических машин, что заставляет существенно ужесточить точностные требования при их изготовлении.

Исследования в области динамики механизмов при учете зазоров развивается по нескольким направлениям. Одно из них охватывает научные разработки, в которых стремятся во вращательных парах механизмов устранить разрыв кинематического контакта между пальцем шарнира и внутренней цилиндрической поверхностью цапфы. В многочисленных публикациях зарубежных исследователей, посвященных данной проблеме, предлагаются различные критерии, которые, по мнению авторов, решают поставленную задачу [1–5]. Некоторые из этих критериев будут обсуждены в дальнейшем.

Во многих случаях при исследовании данного вопроса в целях упрощения модели системы с зазором исключается влияние упругодиссипативных характеристик системы, и анализ проводится на кинетостатическом уровне. При этом предполагается, что обеспечение обкатки рабочих поверхностей по существу снимает вопрос о нежелательных динамических эффектах, связанных с зазорами. Это заблуждение в основном связано с тем, что при анализе не учитывается динамический эффект от изменения приведенных коэффициентов жестко-

сти (причем нередко существенного) и дополнительных возмущений сопутствующих при этом параметрических импульсов.

В данной статье развивается концепция, изложенная в работах [6,7], в которых впервые была предложена принципиально новая модель зазора во вращательной кинематической паре. Анализ этой модели позволяет определить условия устойчивости на конечном отрезке кинематического цикла и критические значения параметров системы, при которых имеет место импульсное возбуждение, близкие по своему последствию к удару. Этот эффект, названный псевдодаром, при определенных условиях трансформируется в удар, сопровождающийся нарушением непрерывности контакта кинематической цепи.

## 2. Эталонные динамические модели шарнира с зазором при отсутствии нарушений кинематического контакта

На рис.1, а представлена простейшая модель шарнира (модель ДМ1). Пусть некоторое тело массой  $m$ , связанное с точкой  $O$ , совершает вместе с пальцем шарнира (точка  $O'$ ) плоское программное движение. При этом  $OO' = 0,5s$ , где  $s$  – величина зазора. Таким образом, в каждом шарнире кинематической цепи появляется дополнительное безмассовое звено, добавляющее одну степень свободы. Это звено в нормальном направлении служит неудерживающей связью, поэтому в данном случае более уместна аналогия с нитью.

Примем, что нормальный и тангенциальный коэффициенты жесткости пальца шарнира равны  $c$ . Приведенные значения жесткости этих составляющих могут несколько различаться за счет учета контактной жесткости в шарнире, однако, как показывает анализ, обычно доминирующую роль играет изгибная жесткость пальца шарнира. В системе координат, связанной с переносным программным движением механизма, модель ДМ1 принимает вид маятника длиной  $0,5s$ , опора которого упруго связана с корпусом (рис.1, б). При  $c \rightarrow \infty$  собственная частота этого маятника равна

$$k_0 = \sqrt{2|F_*(\varphi)/(ms)|}. \quad (1)$$

Здесь  $F_*(\varphi)$  – реакция между пальцем и корпусом,  $\varphi = \omega t$  – угол поворота входного звена механизма. (Обычно в первом приближении можно принять  $\varphi \approx \omega t$ , где  $\omega = d\varphi/dt = \text{const}$ ).

Положение маятника в плоскости характеризуется углом  $\theta = \theta^*(\varphi) + \Delta\theta$ , где  $\theta^*(\varphi)$  – «медленная» составляющая, определяемая как  $\theta^* = \text{arctg}(F_y^*/F_x^*)$ , а  $\Delta\theta$  – «быстрая» составляющая, возникающая при реализации дополнительной степени свободы за счет колебаний маятника. (Здесь  $F_x^*, F_y^*$  – соответствующие проекции реакции  $F^*$ ).

Нередко угол  $\theta$  определяется на кинетостатическом уровне, что соответствует допущению  $\theta = \theta^*$  и  $\Delta\theta = 0$  (см., например, [1,4]). Однако при этом игнорируется возможность колебаний около центрируемых положений массы  $m$  и тем самым устраняется дополнительная степень свободы, связанная с «маятниковым» движением в шарнире с зазором.

При  $c \neq \infty$  приведенная тангенциальная составляющая коэффициента жесткости  $c_\tau$  соответствует последовательному соединению элемента  $c$  и  $c_{\tau 0} = 2|F|/s$ . В полученной при этом динамической модели ДМ2 (рис.1, в) нормальная и тангенциальная составляющие коэффициента жесткости могут быть представлены как

$$c_n = c; \quad c_\tau = c|F_*(\varphi)|/[0,5cs + |F_*(\varphi)|]. \quad (2)$$

При  $s = 0$  имеем  $c_\tau = c$ , а при  $F_*(\varphi) = 0$  тангенциальная составляющая коэффициента жесткости обращается в нуль.

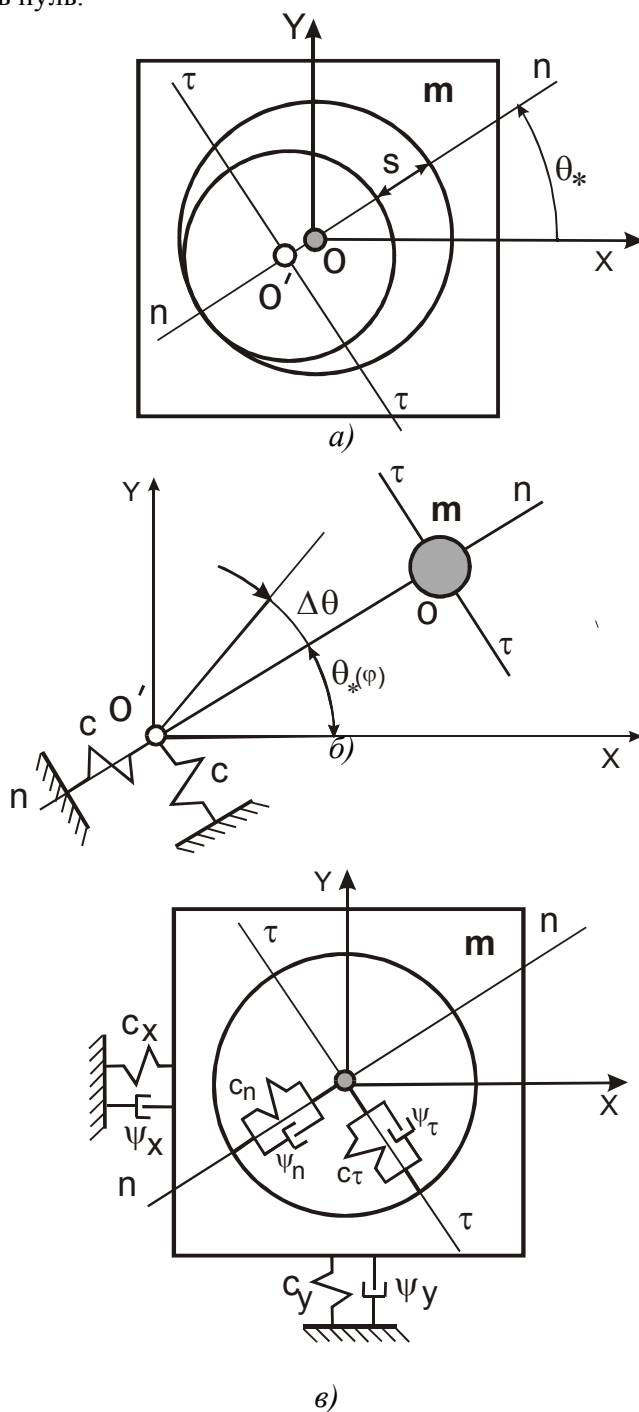


Рис. 1. Динамическая модель

В модели ДМ2 учтены диссипативные составляющие ( $\psi$  – коэффициенты рассеяния), а также упругодиссипативные элементы  $c_x, \psi_x$  и  $c_y, \psi_y$ , соответствующие соединению с корпусом. Необходимость учета этих составляющих возникает, например, при повышенной

податливости звеньев и направляющих в различных модификациях рычажных механизмов. При  $c_x \rightarrow \infty$ ,  $c_y \rightarrow \infty$  потенциальная энергия равна

$$V_1 = 0,5(c_n \Delta_n^2 + c_\tau \Delta_\tau^2), \quad (3)$$

где  $\Delta_n, \Delta_\tau$  – деформации по осям  $n-n$  и  $\tau-\tau$ .

Принимая во внимание, что  $\Delta_n = \Delta x_1 \cos \theta_* - \Delta y_1 \sin \theta_*$ ,

$$\Delta_\tau = \Delta x_1 \sin \theta_* + \Delta y_1 \cos \theta_*, \quad (4)$$

получаем

$$V_1 = 0,5(c_{xx} \Delta x_1^2 + c_{yy} \Delta y_1^2 + 2c_{xy} \Delta x_1 \Delta y_1), \quad (5)$$

где  $\Delta x_1, \Delta y_1$  – проекции деформаций  $\Delta_n, \Delta_\tau$ ;  $c_{xx} = c_n \cos^2 \theta_* + c_\tau \sin^2 \theta_*$ ;

$$c_{yy} = c_n \sin^2 \theta_* + c_\tau \cos^2 \theta_*; c_{xy} = 0,5 \sin 2\theta_* (c_\tau - c_n) \Delta x_1 \Delta y_1.$$

При отсутствии зазора ( $s=0$ ) согласно (2)  $c_\tau = c$ . Тогда  $c_{xx} = c_{yy} = c$ ,  $c_{xy} = 0$ . В этом случае приведенные коэффициенты жесткости не зависят от  $\varphi$ . При  $F_* \rightarrow 0$  имеем  $c_\tau \rightarrow 0$ . При  $c_x \neq 0$ ,  $c_y \neq 0$  на основании (5) получаем

$$V = 0,5 \left[ \left( \frac{\partial V_1}{\partial \Delta x_1} \right)^2 (c_x^{-1} + c_{xx}^{-1}) + \left( \frac{\partial V_1}{\partial \Delta y_1} \right)^2 (c_y^{-1} + c_{yy}^{-1}) \right]. \quad (6)$$

В качестве обобщенных координат примем позиционные составляющие динамических ошибок  $\Delta x = q_1$  и  $\Delta y = q_2$ . Под этим термином будем понимать отклонения, определяемые позиционными обобщенными координатами, входящими в выражение потенциальной энергии. При этом абсолютное движение  $x, y$  складывается из переносного движения  $x^0 = x_*^0 + 0,5s \cos \theta_*$ ,  $y^0 = y_*^0 + 0,5s \sin \theta_*$  (циклические обобщенные координаты) и относительного движения  $(\Delta x, \Delta y)$ .

Далее согласно (5),(6) представим выражение потенциальной энергии в виде следующей квадратичной формы:

$$V = 0,5(c_{11} q_1^2 + c_{22} q_2^2 + 2c_{12} q_1 q_2). \quad (7)$$

Здесь

$$c_{11} = \frac{c_x^2}{D^2} \left\{ \frac{c_y^2 c_x}{c_y^*} + \frac{[c_{xx}(c_y + c_{yy}) - c_{xy}^2]^2}{c_x^*} \right\}; \quad c_{22} = \frac{c_y^2}{D^2} \left\{ \frac{c_x^2 c_{xy}}{c_x^*} + \frac{[c_{yy}(c_x + c_{xx}) - c_{xy}^2]^2}{c_y^*} \right\};$$

$$c_{12} = \frac{c_x c_y c_{xy}}{D^2} \left\{ \frac{c_x [c_{xx}(c_y + c_{yy}) - c_{xy}^2]}{c_x^*} + \frac{c_y [c_{yy}(c_x + c_{xx}) - c_{xy}^2]}{c_y^*} \right\}, \quad (8)$$

где  $c_x^* = (c_x^{-1} + c_{xx}^{-1})^{-1}$ ;  $c_y^* = (c_y^{-1} + c_{yy}^{-1})^{-1}$ ;  $D = (c_x + c_{xx})(c_y + c_{yy}) - c_{xy}^2$ .

Система дифференциальных уравнений для модели ДМ2 имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \ddot{q}_1 + (2n_{11}\dot{q}_1 + 2n_{12}\dot{q}_2 + k_{11}^2q_1 + k_{12}^2q_2)\Psi_1(q_1, q_2) &= w_1(t); \\ \ddot{q}_2 + (2n_{21}\dot{q}_1 + 2n_{22}\dot{q}_2 + k_{21}^2q_1 + k_{22}^2q_2)\Psi_2(q_1, q_2) &= w_2(t), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где  $k_{ij}^2 = c_{ij}/m$ ;  $w_1(t) = Q_1(t)/m$ ;  $w_2(t) = Q_2(t)/m$ ;  $n_{ij}$  – диссипативные коэффициенты (см. ниже);  $Q_1(t), Q_2(t)$  – обобщенные силы;  $\Psi_i$  – единичные функции, обращающиеся в нуль при  $\Delta_n \leq 0$ , т. е. при нарушениях кинематического контакта в шарнире.

Отметим, что, строго говоря, система уравнений (9) является нелинейной даже при отсутствии разрывов кинематического контакта, поскольку коэффициенты жесткости согласно (2) зависят от реакции в кинематической паре. Однако выделением медленной составляющей этой реакции  $F_*$  и последующей линеаризацией в ее окрестности мы трансформировали нелинейные дифференциальные уравнения к виду линейных уравнений с переменными коэффициентами. При этом  $n_{ij} = n_{ij}(\varphi)$  и  $k_{ij} = k_{ij}(\varphi)$ , где  $\varphi = \omega t$ .

Преобразуем систему дифференциальных уравнений (9) к безразмерному виду. С этой целью введем «безразмерное» время  $\varphi = \omega t$  и безразмерные координаты  $\bar{q}_i = q_i/r$ , где  $r$  – нормирующий параметр, в качестве которого удобно принять радиус кривошипа входного звена рычажного механизма. Примем следующие условные обозначения:  $\eta_0^2 = c/(m\omega^2)$ ;  $P_{11} = c_{11}/(m\omega^2)$ ;  $P_{22} = c_{22}/(m\omega^2)$ ;  $P_{12} = c_{12}/(m\omega^2)$ ;  $\beta_{11} = \vartheta_1\pi^{-1}\sqrt{P_{11}}$ ;  $\beta_{22} = \vartheta_2\pi^{-1}\sqrt{P_{22}}$ ;  $\Delta = 0,5s/r$ . Тогда

$$\left. \begin{aligned} \bar{q}_1'' + (\beta_{11}(\varphi)\bar{q}_1' + P_{11}(\varphi)\bar{q}_1 + P_{12}(\varphi)\bar{q}_2)\Psi_1(\bar{q}_1, \bar{q}_2) &= f_1(\varphi); \\ \bar{q}_2'' + (\beta_{22}(\varphi)\bar{q}_2' + P_{21}(\varphi)\bar{q}_1 + P_{22}(\varphi)\bar{q}_2)\Psi_2(\bar{q}_1, \bar{q}_2) &= f_2(\varphi), \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где  $(\prime) = d/d\varphi$ ,  $f_i(\varphi) = w_i/(m\omega^2r)$ . (Более строгий учет диссипативных составляющих см. [8]).

При  $c_x \ll c$ ,  $c_y \ll c$  имеем

$$\left. \begin{aligned} P_{11}(\varphi) = P_{11}^0(\varphi) &= \eta_0^2 \left[ \cos^2 \theta_*(\varphi) + \chi_1 \sin^2 \theta_*(\varphi) \right]; \\ P_{22}(\varphi) = P_{22}^0(\varphi) &= \eta_0^2 \left[ \sin^2 \theta_*(\varphi) + \chi_1 \cos^2 \theta_*(\varphi) \right]; \\ P_{12}(\varphi) = P_{12}^0 &= -0,5(1 - \chi_1) \sin 2\theta_*(\varphi), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где  $\chi_1 = |F_*|/(\eta_0^2\Delta + |F_*|)$ .

### 3. Пульсация «собственных» частот при переключке в зазоре

При определении безразмерных «собственных» частот  $\eta_i(\varphi) = p_i(\varphi)/\omega$  ( $p_i$  – «собственная» частота) исключим из рассмотрения малое влияние диссипативных сил. При

этом формальное частотное уравнение, полученное методом условного осциллятора, имеет вид [8]:

$$\det \begin{pmatrix} P_{11}(\varphi) - \eta^2 & P_{12}(\varphi) \\ P_{21}(\varphi) & P_{22}(\varphi) - \eta^2 \end{pmatrix} = 0. \quad (12)$$

Отсюда

$$\eta_{1,2} = \sqrt{0,5(P_{11} + P_{22}) \mp \sqrt{0,25(P_{11} - P_{22})^2 + P_{12}^2}}. \quad (13)$$

(Здесь и ниже аргумент  $\varphi$  в соответствующих функциях опускается.)

Далее в целях конкретизации результатов анализа примем квазиэллиптическую конфигурацию годографа реакции в шарнире. Подобная ситуация, в частности, возникает при кинематическом возбуждении в кривошипно-ползунном механизме, а также в других рычажных механизмах с траекторией поступательно движущегося выходного звена, близкой к эллиптической.

Пусть эллиптическая траектория массы  $m$  описывается зависимостями  $x_0^* = r \cos \varphi$ ,  $y_0^* = \alpha r \sin \varphi$ . При этом правые части уравнений (10) принимают вид

$$\begin{aligned} f_1(\varphi) &= \cos \varphi + 0,5\bar{s}[\theta_*'^2(\varphi) \cos \theta_*(\varphi) + \theta_*'' \sin \theta_*(\varphi)]; \\ f_2(\varphi) &= \alpha \sin \varphi + 0,5\bar{s}[\theta_*'^2(\varphi) \sin \theta_*(\varphi) - \theta_*'' \cos \theta_*(\varphi)]. \end{aligned} \quad (14)$$

На рис. 2 приведены графики безразмерных «собственных» частот  $\eta_1(\varphi, \alpha)$  и  $\eta_2(\varphi, \alpha)$  при  $\eta_0 = 30$ ,  $\bar{s} = s/r = 10^{-3}$ ,  $c_x/c \ll 1$ ,  $c_y/c = 5$ ,  $\alpha = 0,05$  (кривая 1),  $\alpha = 0,2$  (кривая 2),  $\alpha = 0,5$  (кривая 3). На графиках четко проявляется уменьшение пульсации «собственных» частот с ростом параметра  $\alpha$ , характеризующего соотношение амплитуд реакций по осям  $x$  и  $y$  (см. выше). Особенно существенна роль падения низшей частоты  $\eta_1$ . Поскольку физическое происхождение этого эффекта связано с «маятниковой» частотой, для оценки низшей частоты с некоторым запасом можно воспользоваться следующей зависимостью:

$$\min \eta_1 \approx \sqrt{c_\tau / m} / \omega. \quad (15)$$

Связанность двух «парциальных» колебательных контуров и степень их взаимовлияния при возбуждении свободных сопровождающих колебаний, вызванных зазором, наглядно отображается на графиках нормированных нестационарных коэффициентов форм

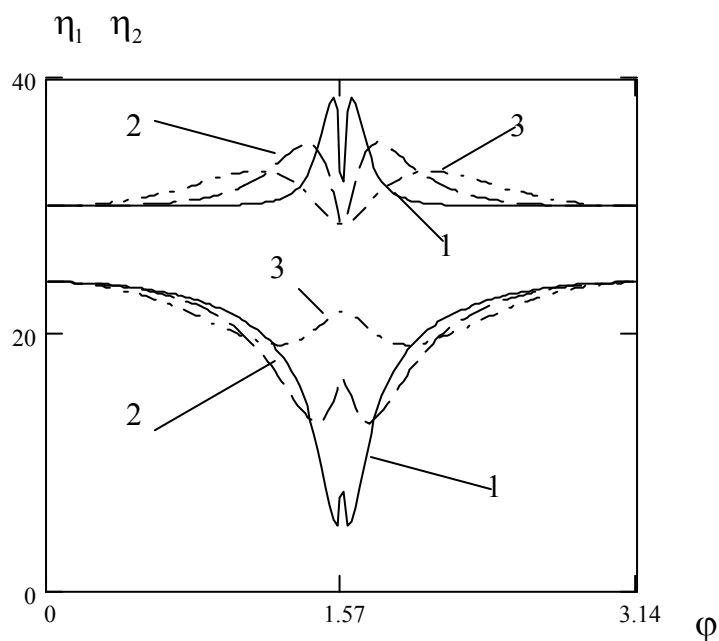


Рис. 2. Графики безразмерных частот  $\eta_1(\varphi, \alpha), \eta_2(\varphi, \alpha)$

$|\mu_{ir}| = A_{ir} / \sqrt{A_{1r}^2 + A_{2r}^2}$ ,  $i = 1, 2$  (рис. 4). Здесь  $i$  – номер координаты,  $r$  – номер частоты ( $r = 1$  – сплошные линии,  $r = 2$  – пунктирные). Анализ графиков свидетельствует о большой связанности между колебательными контурами в окрестности зоны перехода через зазор при малых значениях  $\alpha$ , т. е. при вытянутой форме эллипса, отображающего годограф реакции в шарнире.

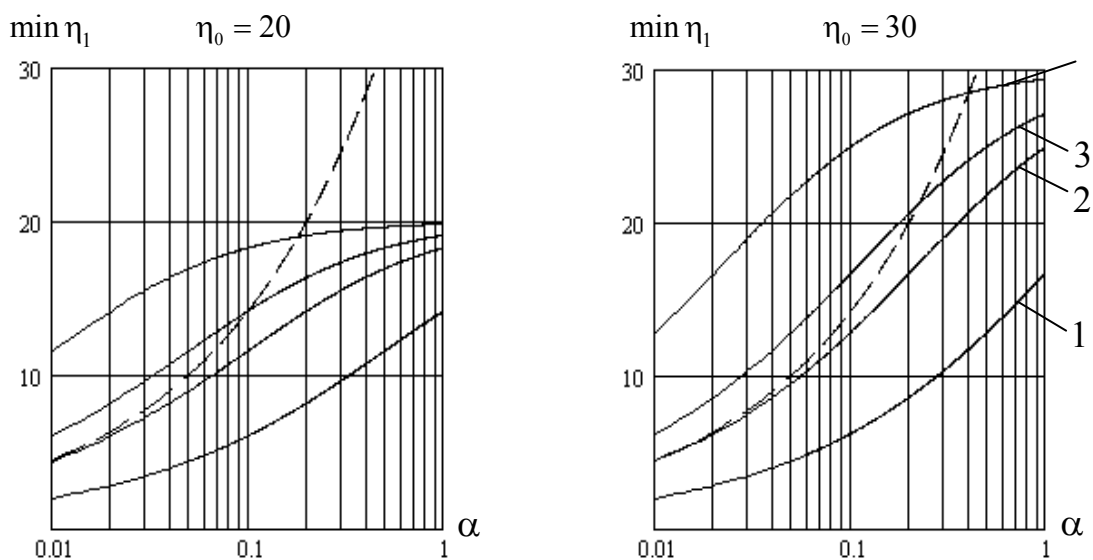


Рис. 3. Графики  $\min \eta_1(\bar{s}, \alpha)$ :  $1 - \bar{s} = 5 \cdot 10^{-3}$ ;  $2 - 10^{-3}$ ;  $3 - 5 \cdot 10^{-4}$ ;  $4 - 10^{-4}$

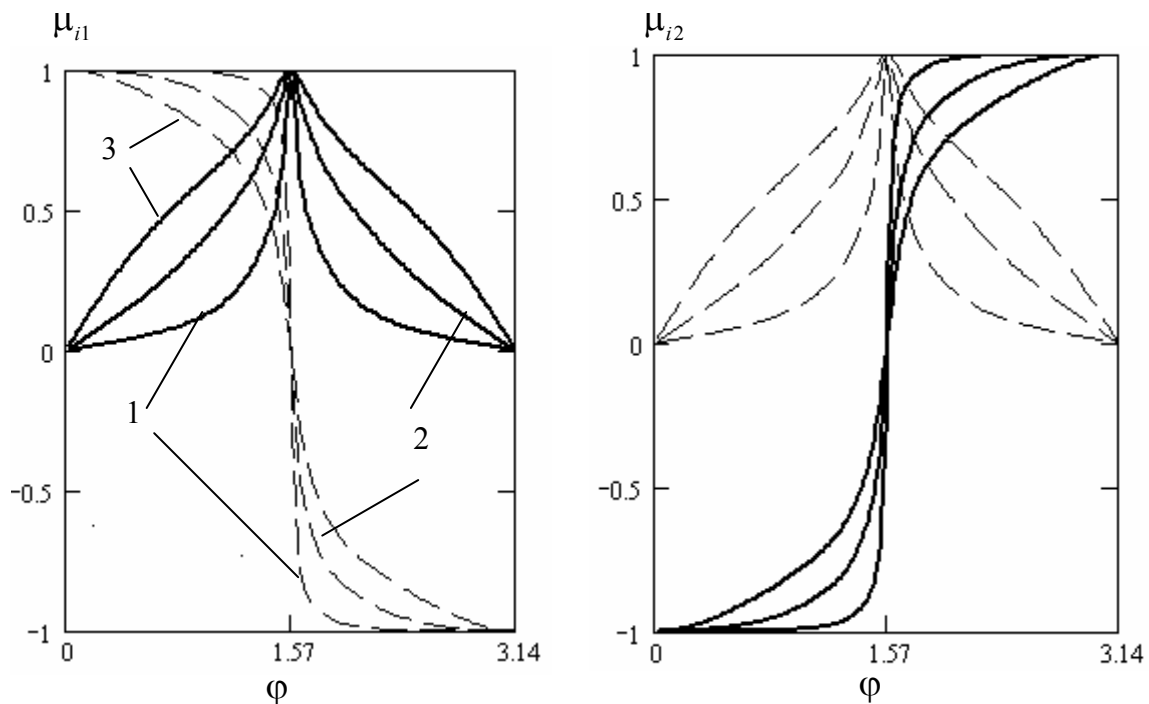


Рис. 4. Графики нестационарных коэффициентов формы

#### 4. Критериальные оценки динамического эффекта при нарушении кинематической связи в зазоре (удар)

Для возможности дальнейшего сопоставления с псевдударом, исследуемым в данной работе, сначала рассмотрим динамический эффект, возникающий при нарушении кинематического контакта в зазоре. Критериальные оценки для этого случая были предложены автором [8,9,10].

Проведем две кривые на графике функции положения  $\Pi(\varphi)$ , смещенные на приведенную величину зазора  $s$  (рис. 5, кривые 1,2)). Пусть при  $\varphi = \varphi_*$  в точке  $B$  происходит отрыв от кривой 1, а в точке  $B'$  на кривой 2 происходит восстановление кинематического контакта. Примем, что угол поворота  $\Delta\varphi = \omega\Delta t$ , соответствующий зоне «свободного полета» мал. При этом с достаточным основанием можно считать, что движение на этом участке происходит с постоянной скоростью, равной скорости отрыва в точке  $B$ . Тогда

$$\Pi(\varphi_* + \Delta\varphi) + s = \Pi(\varphi_*) + \Pi'(\varphi_*)\Delta\varphi. \quad (16)$$

Далее, представляя  $\Pi(\varphi_* + \Delta\varphi)$  в виде усеченного ряда Тейлора, на основании (16) имеем

$$\frac{1}{6}\Pi_*'''\Delta\varphi^3 + \frac{1}{2}\Pi_*''\Delta\varphi^2 + s = 0. \quad (17)$$

Здесь звездочка отвечает  $\varphi = \varphi_*$ .



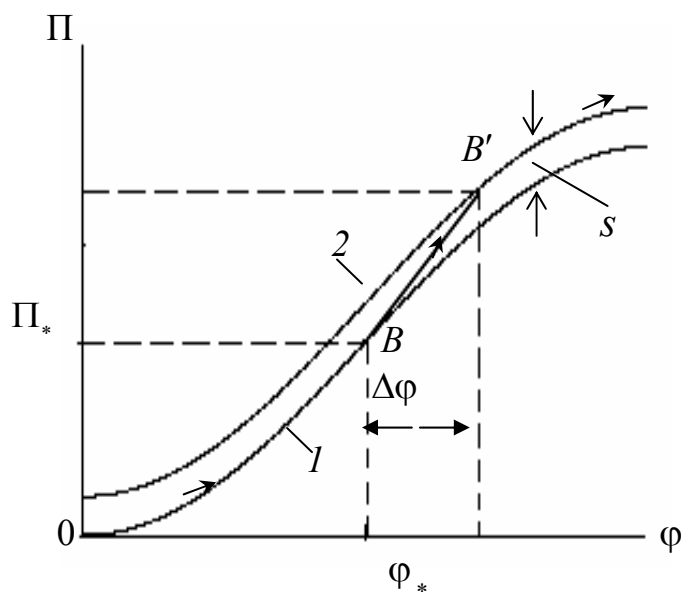


Рис. 5. К анализу удара при зазоре

В современных высокоскоростных цикловых механизмах динамическая нагрузка, вызванная кинематическим возбуждением, обычно значительно превосходит силы технологического сопротивления, поэтому переход через зазор практически происходит при  $\Pi_*'' = 0$ . Тогда согласно (17):

$$\Delta\varphi = \sqrt[3]{6s / |\Pi_*''|}. \quad (18)$$

При восстановлении кинематического контакта (точка  $B'$ ) имеет место скачок первой геометрической передаточной функции  $|\Delta\Pi'|$ , который при учете (17) определяется следующим образом

$$|\Delta\Pi'| = \sqrt[3]{4,5s^2 |\Pi_*''|}. \quad (19)$$

Таким образом разрыв кинематического контакта приводит к возникновению жесткого удара, определяемого скачком скорости  $|\Delta v| = \omega |\Delta\Pi'|$ . Аналогичным образом могут быть учтены возмущения, связанные со скачками  $|\Delta\Pi''|$  и  $|\Delta\Pi'''|$ , однако обычно эти скачки проявляются в меньшей степени.

Введем в рассмотрение параметр  $\xi = |\Delta y''|_{\max} / |\Pi_*''|_{\max}$ , равный отношению максимального дополнительного ускорения после выборке зазора к экстремальному значению ускорения. Можно показать [10], что при одинарном ударе

$$\xi = \left| \Pi_*'' \sqrt{(4,5)^{2/3} \sigma^4 \eta_0^2 + \eta_0^{-2}} \right|, \quad (20)$$

где

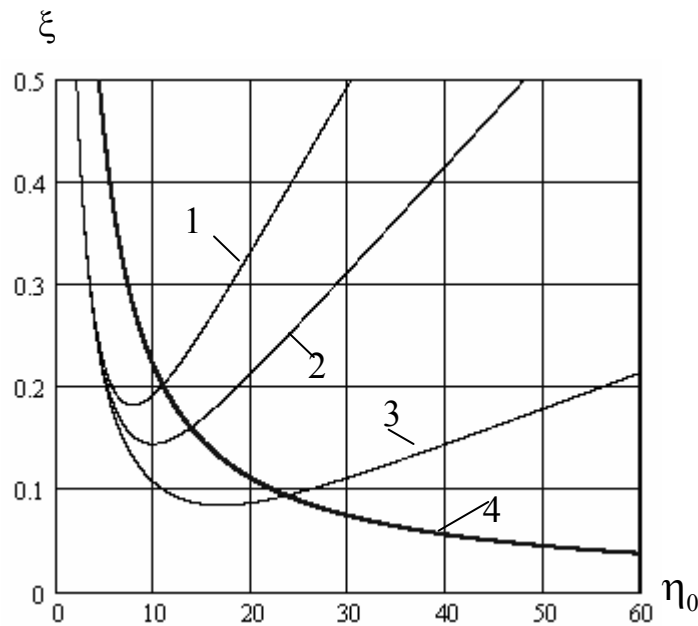


Рис. 6. Графики  $\xi(\eta_0, \sigma)$ : 1-  $\sigma = 10^{-3}$ ; 2-  $\sigma = 5 \cdot 10^{-4}$ ; 3-  $\sigma = 10^{-4}$

$$\sigma = \sqrt[3]{s / |\Pi_*^m|}.$$

Параметр  $\sigma$  играет роль важного динамического критерия. На графике  $\xi(\eta_0, \sigma)$  (рис. 6, кривые 1,2,3) также приведена кривая 4, ниже которой располагается область, соответствующая значениям параметров, отвечающая отсутствию повторных соударений в зазоре [9,10], а следовательно, и генерирования виброударных режимов. На основании формулы (20) могут быть определены параметры системы, удовлетворяющие требованию  $\xi \leq \xi_*$ , где  $\xi_*$  – допустимое значение уровня дополнительных ускорений, вызванных зазором.

### 5. Критериальные оценки динамических эффектов при отсутствии нарушения кинематической связи в зазоре (псевдоудар)

Разработке критериев, на базе которых делаются прогнозы динамических эффектов, сопровождающих безударную переключку в зазоре, посвящены многие исследования, частичный обзор которых приведен в работах [11,12]. При этом обычно ставится цель, используя результаты анализа кинетостатической модели, обеспечить неразрывность кинематического контакта в шарнире. В начале 70-х годов Eearles и Wu [1] предложили критериальное условие  $|\dot{\theta}_* / F_{*min}^*| < 1 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1} \text{Н}^{-1}$ . С качественной точки зрения этот критерий в определенной степени правильно отражает характер влияния учитываемых факторов на результирующий динамический эффект, хотя при этом полностью игнорируются характеристики колебательной системы. Заметим, что приведенное выше условие не может служить для количественных оценок хотя бы потому, что оно не является безразмерным.

В ряде дальнейших исследований отмеченный недостаток был устранен. В частности, группой американских ученых, возглавляемых профессором S. Dubowsky, был предложен критерий, названный показателем прогноза удара IPN (Impact Prediction Number) [12], в котором была учтена контактная жесткость шарнира и параметры эллиптической траектории.

Однако, в этом критерии не нашли отражения многие существенные динамические факторы, в частности такие, как взаимовлияние двух колебательных контуров, предопределяющий пульсацию «собственных» частот, возможность появления зон «отрицательного демпфирования», на которых возникает локальная раскачка системы и др. А самое существенное, как уже отмечалось, в качестве единственной исходной предпосылки благоприятных условий перекладки в зазоре принималось отсутствие нарушений кинематического контакта.

В начале 90-х годов автором была предложена новая модель зазора, в которой осуществлен комплексный учет «маятникового» характера движения в шарнире и упругодиссипативных свойств системы. Эта модель будет использована ниже для построения критериальных оценок исследуемого динамического эффекта при квазиэллиптической форме годографа реакций в шарнире.

Определяющую роль в формировании исследуемого динамического эффекта играют функция  $\theta_*(\varphi)$  и ее производные, описываемые следующими зависимостями:

$$\theta_*(\varphi) = \arctg(F_*^y / F_*^x); \quad \theta'_*(\varphi) = [F_*^x (F_*^y)' - F_*^y (F_*^x)'] / F_*^2;$$

$$\theta''(\varphi)_* = [F_*^x (F_*^y)'' - F_*^y (F_*^x)''] / F_*^2 - 2[F_*^x (F_*^x)' + F_*^y (F_*^y)'] [F_*^x (F_*^y)' - F_*^y (F_*^x)'] / F_*^4, \quad (21)$$

где  $F_* = \sqrt{(F_*^x)^2 + (F_*^y)^2}$ .

Для принятой эллиптической характеристики годографа реакции на основании (21) получаем

$$\theta_*(\varphi) = \arctg(\alpha \operatorname{tg} \varphi); \quad \theta'_*(\varphi) = \alpha / B(\varphi); \quad \theta''_*(\varphi) = \alpha(1 - \alpha^2) \sin 2\varphi / B^2(\varphi), \quad (22)$$

где  $B(\varphi) = \alpha^2 \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi$ .

Анализ графиков  $\theta_*(\varphi, \alpha)$  (рис. 7) показывает, что при малых значениях  $\alpha$  характер изменения  $\theta_*$  в зонах перекладки в зазоре ( $\varphi = \pi/2, 3\pi/2$ ) близок к скачку.

На рис.8 приведены графики  $\theta'_*(\varphi, \alpha)$  и  $\theta''_*(\varphi, \alpha)$ . Функция  $\theta'_*$  достигает максимального значения при  $\varphi = \pi/2$  и  $\varphi = 3\pi/2$ , причем  $\theta'_{* \max} = \alpha^{-1}$ . Можно показать, что экстремальные значения функции  $\theta''_*$  имеют место при значениях  $\varphi = \varphi_*$ , которые определяются из следующего уравнения:

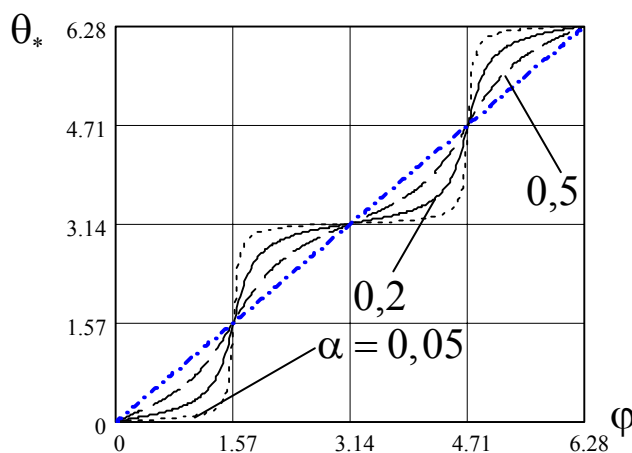


Рис. 7. Семейство кривых  $\theta_*(\varphi, \alpha)$

$$(1 - \alpha^2) \cos^2 2\varphi_* - (1 + \alpha^2) \cos 2\varphi_* + (1 - \alpha^2) = 0. \quad (23)$$

Принимая во внимание, что экстремумы  $\theta''$  расположены в малой окрестности значений  $0,5\pi$  и  $1,5\pi$ , на основании (23) имеем  $\varphi_* = j\pi/2 \pm \Delta\varphi_1$  ( $j=1,3$ ) при  $\Delta\varphi_1 \approx 0,64\alpha$ .

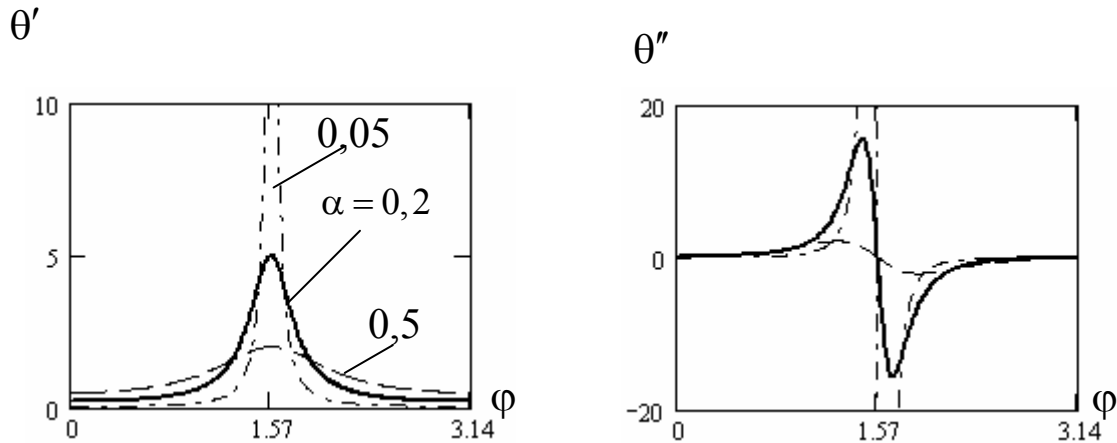


Рис. 8. Графики  $\theta'_*(\varphi, \alpha)$ ,  $\theta''_*(\varphi, \alpha)$

В рассматриваемом случае возбуждение колебаний имеет более сложную природу, чем при ударе, когда его причиной была разность скоростей при «входе» в зазор и «выходе» из него (см. выше). В данном случае появляется дополнительный источник возбуждения – вращающееся безмассовое звено длиной  $0,5s$ . При малых  $\alpha$  в зоне зазора резко понижается низшая «собственная» частота. При этом реальное время поворота этого звена на угол  $\pi$  может оказаться соизмеримым с  $0,25 \div 0,3$  периода свободных колебаний (по низшей частоте), что, по существу, эквивалентно удару [8]. Определяющую роль в формировании динамического эффекта также играет нестационарный характер коэффициентов формы и значений безразмерных «собственных» частот  $\eta_1(\varphi)$ ,  $\eta_2(\varphi)$ . Приведенные ниже критериальные оценки исследуемого динамического эффекта отражают лишь наиболее существенные факторы задачи.

Функция  $\theta'_*$  в окрестности  $\varphi_*$  может быть аппроксимирована гармонической функцией. При этом максимальное значение безразмерных дополнительных ускорений  $\xi_1 = \bar{q}''_{1\max}$  может быть оценена как [8]:

$$\xi_1 = \frac{\sqrt{1 + 16v_1^2 - 8v_1 \sin 2\pi v_1}}{|1 - 16v_1^2|}, \quad (24)$$

где  $v_1 \approx 2\Delta\varphi_1\eta_{1\min} / \pi$ .

При  $\Delta\varphi_1 \rightarrow 0$  имеем  $\xi_1 \rightarrow \bar{s}\eta_0^2$ , что соответствует скачкообразному изменению функции положения программного движения на величину зазора  $s$ .

На рис. 9 приведены графики  $\xi_1(\alpha)$ , полученные на основании формулы (24) при  $\eta_0 = 30$ ,  $c_y/c = 0,5$ , (кривая 1). и компьютерного моделирования системы уравнений (10), причем кривая 2 отвечает  $q''_{1\max}$ , а кривая 3 –  $q''_{2\max}$ . Анализ графиков свидетельствует об удовлетворительном совпадении результатов. Заниженный результат, определяемый формулой (24), во-первых, связан с тем, что помимо псевдодара при малых  $\alpha$  имеет место удар, возникающий при нарушении контакта в шарнире, когда  $\text{sign}\Delta_n \neq \text{const}$  (см. формулу (4)). Можно показать, что в первом приближении при

$$|f_2(0, 5\pi)| < \xi_1 \quad (25)$$

удары не возникают, либо слабо проявляются на результирующем эффекте. Условию (25) соответствует область, расположенная ниже кривой 4 (см. рис. 9). Точка пересечения кривых 1 и 4 определяет нижнюю границу параметра  $\alpha$  при безударной переключке в зазоре. Однако отметим, что дополнительный динамический эффект, вызванный ударом, нередко относительно мал из-за малой длительности ударного импульса.

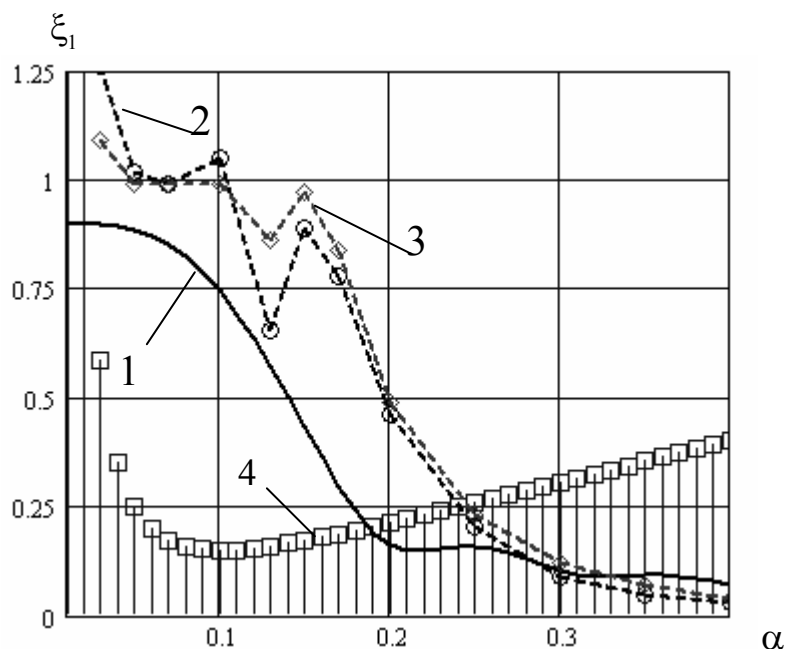


Рис. 9. Сопоставление результатов аналитической оценки и компьютерного моделирования

Более существенную роль играет то обстоятельство, что при малых  $\alpha$  имеют место локальные нарушения условий динамической устойчивости на конечном отрезке кинематического цикла [8,13]. При этом зона нарастания амплитудных значений чередуется с зоной затухания (рис.10). Для устранения этого нежелательного эффекта, приводящего к росту максимальных виброускорений должны быть выполнены следующие условия:

$$\mathfrak{D}_r > \mathfrak{D}_r^*(\varphi) = 3\pi(d\eta_r / d\varphi) \eta_r^{-2} \quad (r = 1, 2). \quad (26)$$

Здесь  $\mathfrak{D}_r, \mathfrak{D}_r^*(\varphi)$  – приведенные к форме  $r$  логарифмические декременты и его критические значения.

Поскольку нарастание амплитуд проявляется через отрезок времени, равный периоду  $\tau_r \approx 2\pi / \eta_r(\varphi)$ , условия (26) могут быть несколько смягчены, если приближенно заменить производные конечными приращениями на одном периоде. Тогда

$$\vartheta_r^* \approx 1,5 \ln(\eta_r^+ / \eta_r^-),$$

где индексы «+» и «-» соответствуют  $\varphi + 0,5\tau_r$  и  $\varphi - 0,5\tau_r$ .

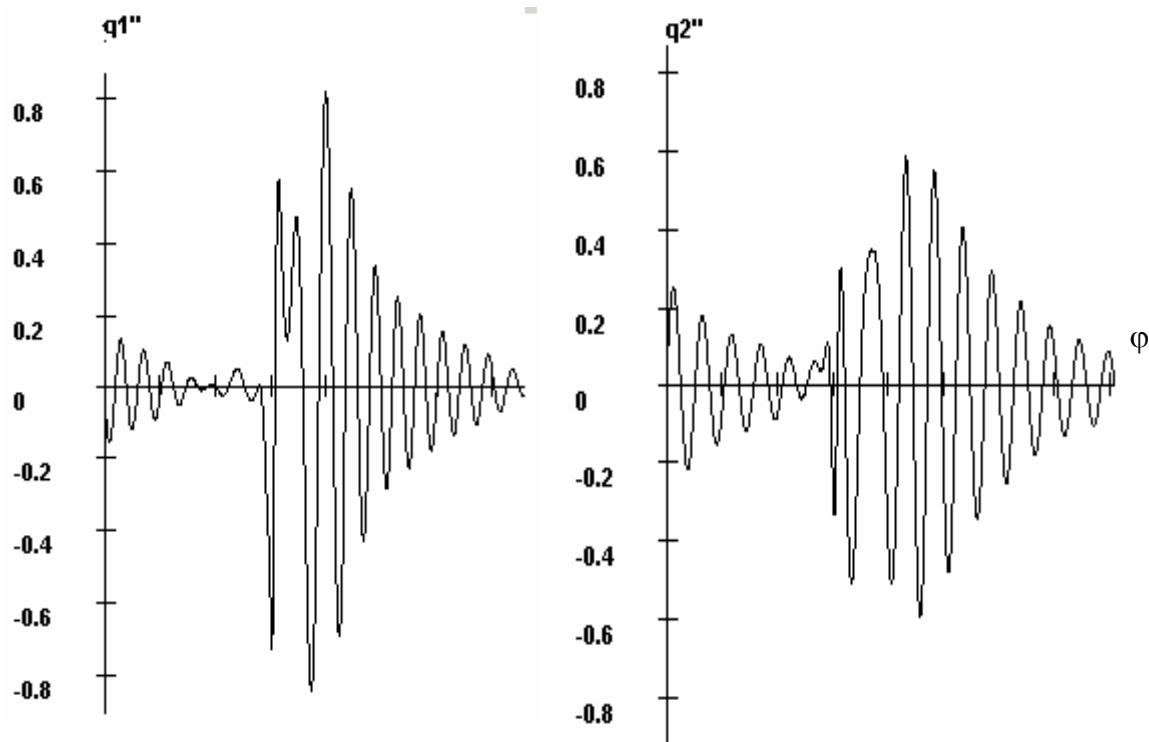


Рис. 10. Режимы с зоной динамической неустойчивости

Типовые графики  $\vartheta_1^*(\varphi)$  при  $\eta_0 = 20$  и  $\eta_0 = 30$  приведены на рис. 11.

Кроме того при малых  $\alpha$  также может проявляться эффект от «параметрического импульса», при котором происходит резкое изменение положения «кинетостатического» равновесия [6].

Как показывает анализ, отмеченные выше причины могут привести к кажущемуся парадоксу, когда виброускорения при псевдодаре (т.е. при отсутствии разрывов кинематического контакта в шарнире) выше, чем при разрыве кинематического контакта. Поэтому при решении задачи снижения виброактивности рычажных механизмов нельзя ограничиваться лишь устранением соударений, как это обычно делается во многих научных публикациях по данной проблеме.

Разработка алгоритмов и анализ результатов компьютерного моделирования на базе предложенной модели зазора в шарнирах плоских и пространственных механизмов требует отдельного рассмотрения и будет освещен в последующих публикациях.

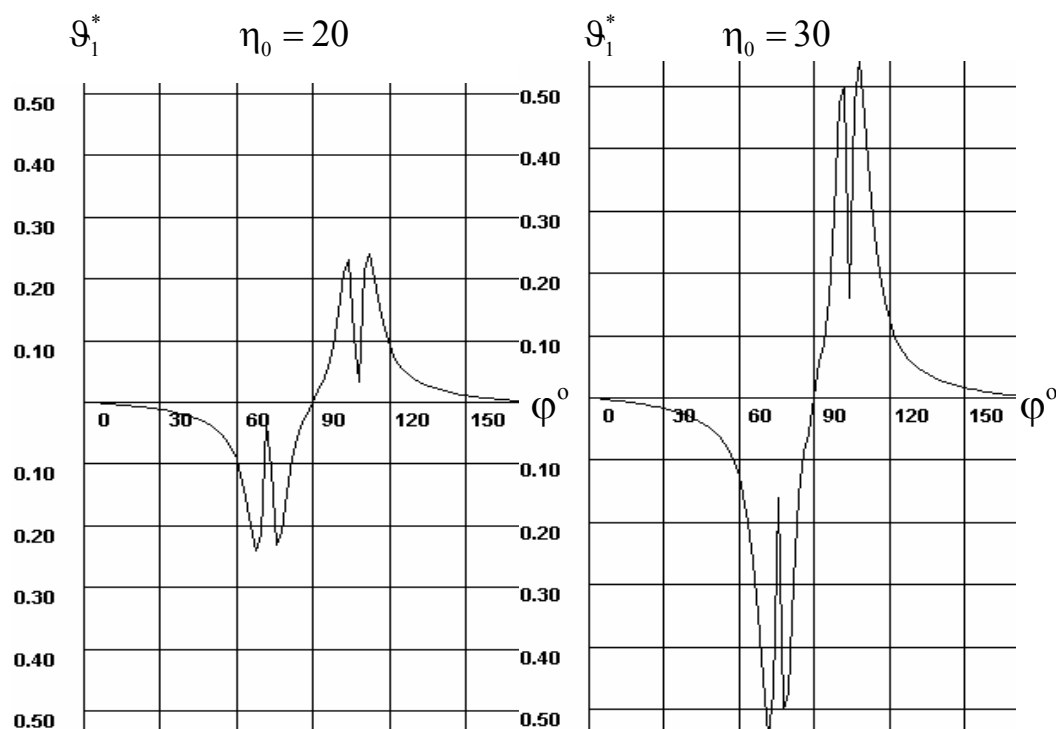


Рис. 11. К определению условий динамической устойчивости

Работа выполнена в рамках проекта Министерства образования и науки РФ по аналитической целевой программе «Развитие научного потенциала высшей школы (2006–2008 годы)».

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Wu C.L.S., Earles S.W.E.** A determination of contact loss at a bearing of a linkage mechanism. – ASME Journal of Engineering for Industry. Vol. 99, №2, 1977. P.p.375–380.
2. **Hammerschmidt C., Göcke H.** Berechnung von Getrieben unter Berücksichtigung des Spiels in den Gelenken. – Wiss. ZTH Karl-Marx-Stadt. №3, 1976. S.321–330.
3. **Dubowsky S.** On predicting the dynamic effects of clearances in planar mechanisms. – ASME Journal of Engineering for Industry. Vol.93, №1, 1974. P.p.317–323.
4. **Li Zhe, Li Li, Bai Shixian.** A new method of predicting the occurrence of contact loss between pairing elements in planar linkages with clearances. – Mech. Mach. Theory. Vol.27, №3, 1992. P.p.295–301.
5. **Haines R.S.** A theory of contact loss at revolute joints with clearance. – J. Mech. Eng. Sci. Vol.22, №3, 1980. P.p.129–136.
6. **Вульфсон И.И., Преображенская М.В.** Параметрические импульсы при безударной передаче в зазорах рычажных механизмов. – Проблемы машиностроения и надежности машин. №5, 1995. С.24–31.
7. **Вульфсон И.И., Преображенская М.И.** Математическая модель и частотные характеристики пространственного механизма с учетом зазоров в шарнирах. – Проблемы машиностроения и надежности машин. №2, 1997. С.8–15.
8. **Вульфсон И.И.** Колебания в машинах с механизмами циклового действия. – Л.: Машиностроение, 1990. 309 с.

9. **Вульфсон И.И.** Устранение повторных соударений при перекладке в зазорах цикловых механизмов. – Изв. вузов. Машиностроение. №12, 1989. С.62–66.
10. **Вульфсон И.И.** Оптимизация параметров колебательных систем цикловых механизмов с учетом зазоров. – Проблемы машиностроения и надежности машин. №3, 1994. С.9–16.
11. **Dresig H., Vulfson J.I.** Dynamik der Mechanismen. – Dt. Verlag d. Wiss.: Berlin, Wien, N.Y., 1989. 328 S.
12. **Dubowsky S., Norris M., Aloni E., Tamir A.** An analytical and experimental study of the predication of impacts in planar mechanical systems with clearances. – Transaction ASME. Vol.106, №4, 1984. P.p. 444–451.
13. **Vulfson J.I.** Analytical investigation of the vibration of mechanisms caused by parametric impulses. – Mechanism and Machine Theory. Vol.10, 1973. P.p. 305–313.

*Доложено 14.11.2006 на научном семинаре по теории механизмов и машин (Санкт-Петербург).  
Поступила в редакцию 20.11.2006*