УДК 621.01

*Э.Е.ПЕЙСАХ*

# КЛАССИФИКАЦИЯ ПЛОСКИХ ГРУПП АССУРА

## Введение

В настоящее время в отечественной школе теории механизмов доминирующее положение занимает классификация плоских структурных групп (групп Ассура), предложенная И.И. Артоболевским в 1945 г. [4] (далее мы будем называть её *традиционной* классификацией). В соответствии с нею группа Ассура характеризуется двумя структурными признаками: *класс* и *порядок*. Класс группы равен наибольшему числу пар, образующих изменяемый или неизменяемый замкнутый контур. Для двухзвенной группы, не имеющих контуров, сделано исключение из этого правила: она отнесена ко II классу. Порядок группы равен числу её внешних пар.

В структурной теории механизмов известны и другие системы классификации групп Ассура. Первая из них принадлежит самому Л.В. Ассуру [6, 7] (1913-1914). И.И. Артоболевский в монографии [1] (1939) и учебнике для университетов [3] (1940) излагает классификацию структурных групп, которая в основном базируется на классификации, предложенной Ассуром. Все группы делятся на классы: I, II, III, IV, V, … Кроме того, каждая группа имеет свой порядок. Порядок группы равен числу двухпарных звеньев (*поводков*) с внешней парой. Группы I класса – это открытые простые цепи. Группы II класса – это открытые разветвлённые цепи (они начинаются с 6-го порядка). Группы III, IV, V, … классов – это цепи с одним, двумя, тремя, … изменяемыми замкнутыми контурами.

В работе [2] (1939) И.И. Артоболевский рассматривает группы Ассура с одним изменяемым замкнутым контуром и предлагает принцип их классификации, в соответствии с которым класс группы равен числу звеньев (или пар), образующих изменяемый замкнутый контур.

Г.Г. Баранов предложил другую систему классификации плоских групп Ассура [8] (1952). В соответствии с нею класс $k$ группы равен половине числа её звеньев, так что двухзвенная группа (диада) – это группа первого класса, четырёхзвенная группа – группа второго класса и т. д. Все группы класса $k$ делятся на порядки так, как это предложено И.И. Артоболевским.

М.В. Семёнов разделяет группы Ассура на три разряда [18] (1959): первый разряд включает только одну группу – двухзвенную; во второй разряд входят все группы Ассура, не имеющие изменяемых замкнутых контуров (кроме двухзвенной группы); в третий разряд входят все группы Ассура, имеющие изменяемые замкнутые контуры.

За более чем 60 лет, прошедших после первой публикации традиционной классификации, структурная теория механизмов прошла большой путь в своём развитии. В этой связи можно указать на применение современных математических методов (матричного исчисления, теории графов, топологии и других), разработку алгоритмов идентификации структур, их последовательного перечисления с автоматической отбраковкой изоморфных структур, создание электронных каталогов структурных схем механизмов, кинематических цепей и структурных групп и др.

Поэтому возникает вопрос: в какой мере традиционная классификация структурных групп и рычажных механизмов соответствует современному уровню развития структурной теории механизмов, может ли она быть усовершенствована в какой-то своей части?

Отметим, что критические замечания в отношении традиционной классификации были высказаны ещё в 1952 г. Г.Г. Барановым в статье [8]. Он писал: "… нельзя признать вполне удовлетворительной применяемую в настоящее время классификацию групп Ассура и механизмов …"; и далее: "Основной применяемой в настоящее время классификацией является классификация проф. Л.В. Ассура. Большое распространение имеет также более совершенная классификация акад. И.И. Артоболевского. Однако обе эти классификации обладают следующими основными недостатками: 1) они трудны для понимания и запоминания, 2) они недостаточно полно характеризуют каждую отдельную группу, 3) они не охватывают все возможные группы с малым числом звеньев. На последний недостаток уже обращал внимание проф. В.В. Добровольский".

Правда, в последующие десятилетия позиции традиционной классификации групп Ассура упрочились. Она излагается практически во всех учебниках по теории механизмов и машин, издаваемых в СССР и России (без упоминания об альтернативных системах классификации). Если судить по литературе, в ТММ утвердилось мнение, что используемая в настоящее время классификация групп Ассура и основанная на ней классификация рычажных механизмов являются наиболее рациональными. Между тем, стимулом для их усовершенствования может служить такой подход, при котором не только говорится о достоинствах существующей классификации, но и указывается на её недостатки.

**Анализ традиционной классификации структурных групп**

Углублённый анализ традиционной классификации групп Ассура позволил выявить некоторые её недостатки.

1. При установлении класса группы Ассура в традиционной классификации используется как изменяемый замкнутый контур (образуемый, как известно, четырьмя или более звеньями), так и неизменяемый контур (представляющий собой, по существу, одно звено). Но изменяемый замкнутый контур и многопарное звено – это две совершенно разные структурные категории. Поэтому их объединение в одном общем структурном признаке нам представляется необоснованным.

2. Для двухзвенной группы сделано исключение из общего правила (эта группа имеет только одну внутреннюю пару, в её структуре нет замкнутых контуров) и просто принято, что её класс равен II. Наличие в классификационной системе исключения из общего правила является нежелательным.

3. Если группа Ассура имеет несколько (не менее двух) изменяемых замкнутых контуров, то легко ошибиться при решении вопроса о том, какой она имеет класс. Поясним сказанное на конкретном примере. На рисунках 1, *а* и 1, *б* изображена одна и та же шестизвенная группа Ассура. Если судить по рис. 1,а, группа относится к IV классу, так как она содержит два четырёхзвенных изменяемых замкнутых контура. Но глядя на рис. 1,б, мы можем решить, что эта группа относится к VI классу, так как число звеньев (или шарниров) при обходе правого контура равно шести.

Получается, что такой признак, как число звеньев, образующих изменяемый замкнутый контур, не является вполне надёжным и однозначным структурным критерием. Дело в том, что когда в структурной теории механизмов вводится число $m$ изменяемых замкнутых контуров для заданной кинематической цепи (или механизма, или группы Ассура), то имеется в виду число *взаимно независимых* контуров (но почему-то об этом чаще всего не упоминают). Что касается общего числа $m_1$ изменяемых замкнутых контуров, которые можно составить для заданной кинематической цепи (включая и зависимые контуры), то это число больше чем $m$. Отсюда следует, что существует несколько вариантов выбора $m$ взаимно независимых контуров среди всех $m_1$ контуров. Значит, число звеньев, образующих каждый из отобранных взаимно независимых контуров (или число кинематических пар по контуру), зависит от конкретного варианта выбора таких контуров.

4. По классу группы невозможно указать число $n$ ее звеньев, а также число $p$ её кинематических пар. Например, группа III класса может иметь 4, 6, 8 или более звеньев и соответственно 6, 9, 12 или более пар.

5. По классу группы и её порядку невозможно указать число $n$ ее звеньев, а также число $p$ её кинематических пар. Например, структурные группы, приведённые на рисунках 2

и 3, обе относятся к группам IV класса второго порядка. Между тем, для первой из них $n = 4$, $p = 6$, а для второй $n = 6$, $p = 9$.

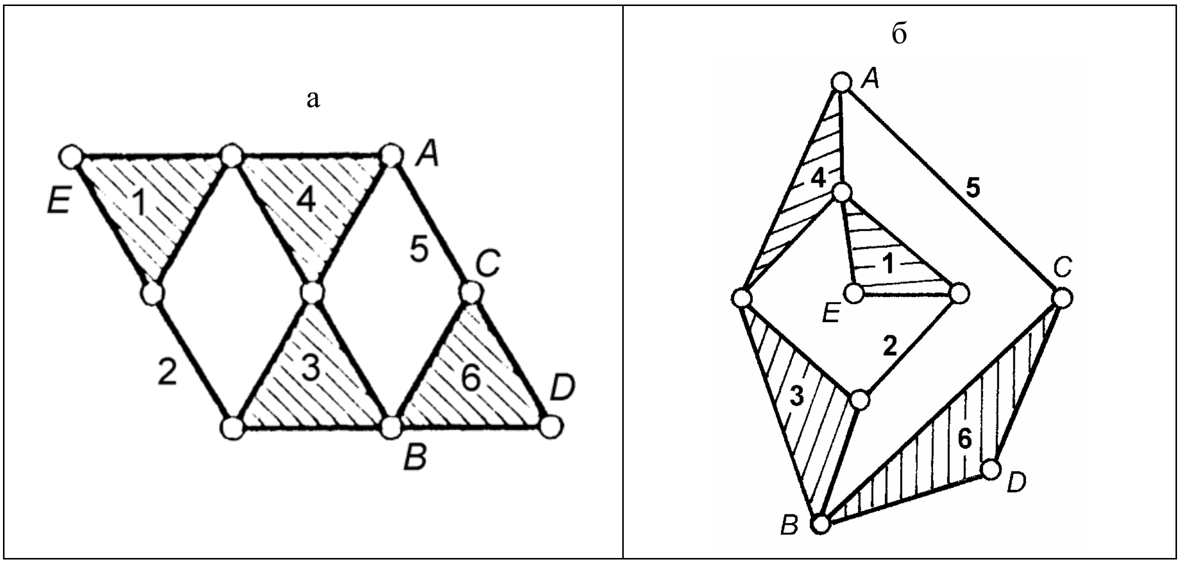



***Рис. 1***

6. По классу и порядку группы невозможно указать число $m$ изменяемых замкнутых контуров. Например, структурные группы, приведённые на рисунках 2 и 3, обе относятся к группам IV класса второго порядка. Между тем, для первой из них $m = 1$, а для второй $m = 2$.

7. Не представляется возможным перечислить все группы, относящиеся к данному классу, а также указать их число. Например, группы Ассура III класса существуют при любом значении $n = 4$, 6, 8, …, значит, их неограниченное множество.

8. Не представляется возможным перечислить все группы, относящиеся к данному классу и данному порядку, а также указать их число. Например, группы Ассура IV класса второго порядка существуют при любом значении $n = 4$, 6, 8, …, значит, их неограниченное множество.

9. Максимально возможное число $H_{\max}$ вариантов сборки группы Ассура при фиксированных положениях внешних шарниров не зависит от её класса. Например, для четырёхзвенной группы Ассура (см. рис. 2) $H_{\max} = 6$ [13], а для шестизвенной группы (см. рис. 3) $H_{\max} = 16$ [24]. Между тем обе эти группы относятся к одному и тому же классу и порядку (IV класс второй порядок).

10. Отсутствует какая-либо связь между номером класса группы Ассура и степенью сложности задачи о положениях её звеньев при заданных положениях внешних шарниров (хотя обычно утверждается обратное). Так, две четырёхзвенных группы Ассура, изображённые на рисунках 4 и 2, относятся к разным классам (III и IV); однако задача о положениях звеньев имеет для них одинаковую степень сложности, так как для обеих групп она приводится к алгебраическому уравнению 6-й степени [13]. Второй пример: четырёхзвенная и шестизвенная группы, показанные на рисунках 2 и 3, относятся к одному и тому же классу и порядку (IV класс второй порядок); однако степень сложности задачи о положениях звеньев у них не одинакова: задача анализа для шестизвенной группы является значительно более сложной.

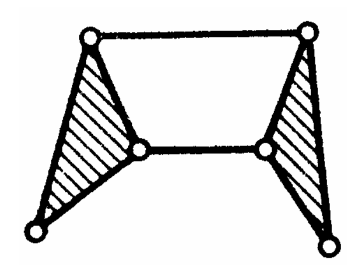


*Рис. 2*

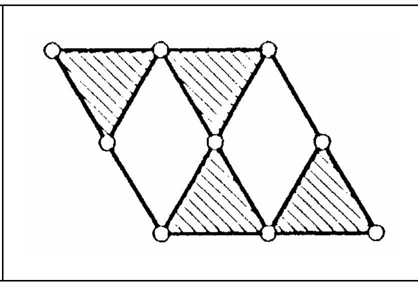


*Рис. 3*

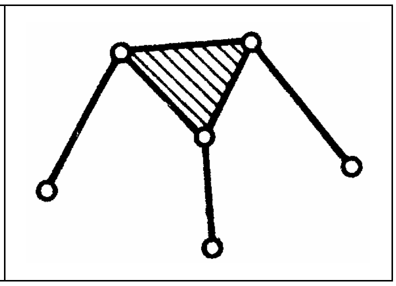


*Рис. 4*

Представленный выше анализ традиционной классификации групп Ассура показывает, что в настоящее время возникла необходимость в создании новой классификации, лучше приспособленной к современному состоянию структурной теории механизмов.

**Об определении понятия "группа Ассура"**

В таблице 1 приведено несколько определений понятия "*группа Ассура*", содержащихся в ряде известных учебников по теории механизмов и машин и в терминологических сборниках. Представленные в таблице определения достаточно близки по смыслу и формулировкам (кроме определения, приведённого в учебном пособии [23]). Они используются в течение уже многих десятилетий, стали вполне привычными и, по-видимому, воспринимаются специалистами по теории механизмов как вполне удовлетворительные. Но при внимательном прочтении этих определений можно придти к заключению, что они не вполне адекватно отображают свойства групп Ассура, а также не точны в смысле используемой терминологии.

Заметим, что на практике в структуре плоских рычажных механизмов используется очень небольшое число групп Ассура (в подавляющем большинстве случаев – двухзвенная группа, то есть диада, и в редких случаях – первая или вторая разновидность четырёхзвенной группы). По этой причине недостатки традиционного определения рассматриваемого понятия (о них будет сказано ниже) во многих случаях не вызывают особых затруднений с пониманием того, что же такое *группа Ассура*. Иное дело – попытка применить традиционное определение при разработке алгоритмов структурного синтеза многозвенных групп Ассура. Именно в этом случае обнаруживаются неполнота и нестрогость традиционного определения.

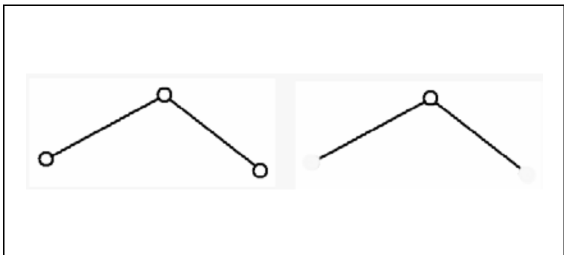
При некоторых различиях в определениях, приведённых в таблице 1, в них имеются следующие общие признаки: 1) группа Ассура – это кинематическая цепь; 2) группа Ассура имеет нулевую подвижность относительно элементов внешних пар; 3) группа Ассура не должна распадаться на более простые кинематические цепи, удовлетворяющие предыдущему условию.

Что касается признака 1, то, по нашему мнению, здесь имеется неточность в отношении используемой терминологии, так как группа Ассура, строго говоря, не является кинематической цепью. Различие между группой Ассура и кинематической цепью видно из рисунков 5 и 6. На рис. 5 слева показана двухзвенная группа Ассура, а справа – двухзвенная незамкнутая кинематическая цепь. На рис. 6 слева – четырёхзвенная группа Ассура, а справа – четырёхзвенная замкнутая кинематическая цепь.

Таблица 1

**Различные известные определения понятия "группа Ассура"**

| Источник | Определение термина "группа Ассура" |
|---|---|
| 5 | "*Группой Ассура* будем называть кинематическую цепь с нулевой степенью свободы относительно тех звеньев, с которыми входят в кинематические пары свободные элементы её звеньев, и не распадающуюся на более простые цепи, обладающие также нулевой степенью свободы". |
| 12 | "*Структурной группой* называется кинематическая цепь, число степеней свободы которой равно нулю относительно элементов её внешних пар, причём группа не должна распадаться на более простые кинематические цепи, удовлетворяющие этому условию". |
| 21 | Группа Ассура – это "кинематическая цепь, присоединение которой к механизму или её отсоединение образует механизм, имеющий подвижность, равную подвижности исходного механизма, не разделяемая на другие цепи с теми же свойствами". |
| 30 | Группа Ассура – это "кинематическая цепь, при присоединении которой к исходному механизму или отсоединении от него образуется новый механизм, который обладает таким же числом степеней свободы, как и исходный". |
| 22 | "Кинематическая цепь, число степеней свободы которой относительно элементов её внешних кинематических пар равно нулю, называют *структурной группой*, если из неё нельзя выделить более простые кинематические цепи, удовлетворяющие этому условию". |
| 23 | "Кинематическая цепь называется *нормальной n-подвижной структурной группой* или просто *структурной группой*, если число её независимых входов $n_{ц}$ совпадает с числом степеней подвижности $w_{ц}$. … Структурная группа называется *простой*, если она не может быть разделена на несколько структурных групп с меньшим числом звеньев. Простая структурная группа, у которой , называется *группой Ассура*". |



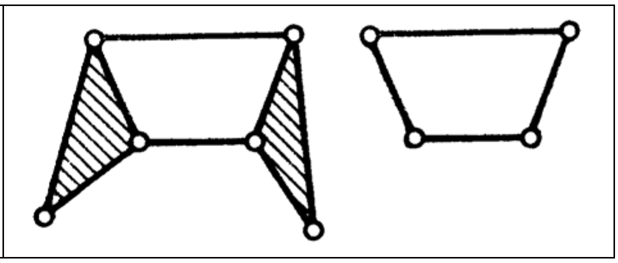


***Рис. 5*** ***Рис. 6***

По определению, кинематическая цепь – это система звеньев, связанных *между собой* кинематическими парами [20]. Для кинематической цепи, в том числе для незамкнутой, не существует понятия "*внешние пары*"; можно сказать, что все пары, образуемые звеньями кинематической цепи, являются внутренними. В то же время, группа Ассура имеет как внутренние, так и внешние пары. При отсоединении группы Ассура от исходного механизма вместе с отсоединяемыми звеньями "уходят" и кинематические пары, посредством которых группа была присоединена к исходному механизму. Эти пары условно приписываются к группе Ассура (это есть её внешние пары). При подсчёте числа степеней свободы оставшегося механизма эти кинематические пары не учитываются. Напротив, при определении числа степеней свободы группы Ассура её внешние пары учитываются.

Отметим ещё, что кинематическая цепь может иметь однопарные звенья, а группа Ассура не может иметь однопарных звеньев.

Упомянутые выше признаки 2 и 3, вообще говоря, правильны, хотя и требуют уточнения в смысле их формулировки. Однако эти два признака не достаточны для того, чтобы осуществлять только на их основе структурный синтез многозвенных групп Ассура, а также для того, чтобы дать однозначный ответ на вопрос, является ли рассматриваемая группа звеньев группой Ассура или не является. Необходимо ввести в определение понятия "группа Ассура" ещё некоторые дополнительные признаки.

Теперь дадим предлагаемое определение понятия "группа Ассура".

*Группа Ассура* – это группа звеньев, которая обладает следующими свойствами:

1) звенья группы образуют друг с другом кинематические пары (это – *внутренние* пары); кроме того, не менее двух звеньев группы содержат элементы кинематических пар, посредством которых эти звенья могут присоединяться к твёрдым телам, в частности, – к звеньям какого-либо механизма, не входящим в состав группы (это – *внешние* пары);

2) на звене группы не может быть более одной внешней пары;

3) звено группы не может быть однопарным;

4) любое из звеньев группы имеет относительную подвижность по отношению к любому другому её звену при условии, что хотя бы одна из внешних пар не присоединена к твёрдому телу, не входящему в состав группы;

5) если группу звеньев присоединить внешними парами к одному и тому же твердому телу, то число степеней свободы группы относительно указанного тела будет равно нулю;

6) от группы звеньев нельзя отделить подгруппу с числом звеньев меньшим, чем у группы, которая удовлетворяла бы указанным выше свойствам группы (при отделении подгруппы звеньев от рассматриваемой группы кинематические пары, в которых производится разъединение, относятся к отделяемой подгруппе и входят в состав её внешних пар).

По нашему мнению, приведённое выше определение адекватно отображает свойства групп Ассура и может служить основанием для их структурного синтеза. Недостатком предлагаемого определения является то, что оно не столь лаконично, как традиционное определение.

Как уже отмечалось ранее, внешние пары условно приписываются к группе Ассура. При определении числа кинематических пар и числа степеней свободы группы учитываются как внутренние, так и внешние её пары. При присоединении группы Ассура всеми её внешними парами к одному и тому же твёрдому телу образуется статически определимая ферма.

На основе шести признаков групп Ассура, фигурирующих в предлагаемом определении, можно составить перечень условий (или структурных свойств), которым должны удовлетворять группы, принадлежащие некоторому подмножеству (например, все плоские группы Ассура или все пространственные группы Ассура с определённым набором кинематических пар). В качестве примера рассмотрим здесь структурные признаки плоских групп Ассура с вращательными парами (шарнирами).

Введём обозначения: $n$ – число звеньев группы Ассура; $p$ – число кинематических пар в группе; $r$ – число внешних пар (называемое *порядком* группы Ассура); $m$ – число взаимно независимых замкнутых контуров в структуре группы; $n_2$, $n_3$, $n_4$, … – число двухпарных, трёхпарных, четырёхпарных, … звеньев; $k$ – целое положительное число.

Плоские группы Ассура с вращательными парами имеют следующие характерные структурные признаки и особенности своего строения:

1) число $n$ звеньев группы Ассура определяется по формуле: $n=2k$, где $k=1$, или 2, или 3 и т.д.;

2) два звена группы Ассура могут образовывать друг с другом только одну кинематическую пару (т.е. один шарнир);

3) если группа Ассура имеет четыре или более звеньев, то не должны присоединяться друг к другу два двухшарнирных звена;

4) если группа Ассура имеет четыре или более звеньев и два внешних шарнира, то ни одно из двух звеньев, содержащих внешний шарнир, не может быть двухшарнирным звеном;

5) замкнутый контур, образуемый звеньями группы, должен состоять из четырёх или более звеньев;

6) число шарниров на одном звене (включая и внешний шарнир, если таковой имеется) не может превышать $k+1$;

7) число $p$ шарниров группы Ассура определяется по формуле: $p=3k$ ;

8) число $r$ внешних шарниров группы может иметь любое значение от 2 до $k+1$ и определяется по формуле: $r = 3n - [2n_2 + 3n_3 + \ldots + (k+1)n_{k+1}]$ ;

9) число $m$ взаимно независимых замкнутых контуров в структуре группы определяется по формуле: $m = k+1-r$ ;

10) число $n'$ звеньев в любой подгруппе, входящей в группу, и число $p'$ внутренних шарниров, образуемых этими звеньями между собой, должны удовлетворять условию: $3n'-2p' > 3$ (здесь: $2 \le n' \le n$);

11) от группы Ассура нельзя отделить подгруппу с числом звеньев меньшим, чем у группы, которая удовлетворяла бы указанным выше свойствам группы (шарниры, в которых производится разъединение, относятся к отделяемой подгруппе).

Одиннадцать указанных свойств плоских групп Ассура с вращательными парами вполне достаточны для того, чтобы на их основе разрабатывать алгоритм структурного синтеза всех таких групп с заданным числом звеньев $n$ ( $n$ = 2, 4, 6, 8, …).

**Новая классификация плоских структурных групп**

В предлагаемой системе классификации групп Ассура фигурируют два основных структурных признака – *класс* и *разряд*. Кроме того, имеются ещё четыре дополнительных структурных признака – *число звеньев*, *число кинематических пар*, *порядок* и *число изменяемых замкнутых контуров*. Если известны класс и разряд группы, то все четыре дополнительных структурных признака определяются однозначно, то есть они являются зависимыми от двух основных признаков.

В дополнение к указанным выше обозначениям, введём ряд новых обозначений: $k$ – номер класса группы Ассура; $R$ – разряд группы; $N$ – число групп Ассура, принадлежащих соответствующему множеству (при подсчёте числа $N$ учитываются группы только с вращательными парами).

Все группы Ассура разделяются на *классы*. Номера $k$ классов: первый, второй, третий и т. д. Принцип выбора класса группы такой же, как и в классификации Г.Г. Баранова [8, 9]. В соответствии с нею, класс группы равен половине числа её звеньев.

Все группы, принадлежащие какому-либо классу, распределяются по *разрядам*. Один разряд включает в свой состав все группы Ассура $k$-го класса, у которых совпадают числа двухпарных, трёхпарных, четырёхпарных, …, ($k+1$)-парных звеньев. Разряд $R$ группы записывается при помощи $k$-значного числа. Первую позицию в числе $R$ занимает число $n_2$ двухпарных звеньев, вторую позицию – число $n_3$ трёхпарных звеньев, …, $k$-ю позицию – число $n_{k+1}$ ($k+1$)-парных звеньев. Разряд группы предложен автором данной статьи.

Порядок $r$ группы равен числу её внешних пар, т.е. этот структурный признак заимствован из классификации И.И. Артоболевского. При известных значениях $k$ и $R$ число $r$ имеет определённое значение и подсчитывается по формуле:

$$r = 3n - 2n_2 - 3n_3 - \ldots - (k+1) \cdot n_{k+1} . \qquad (1)$$

Число $n$ звеньев группы, число $p$ кинематических пар и число $m$ изменяемых замкнутых контуров определяются по формулам:

$$n = 2k, \quad p = 3k, \quad m = k + 1 - r . \qquad (2)$$

Рассмотрим теперь некоторые особенности предлагаемого способа классификации плоских групп Ассура.

Из формул (1) и (2) видно, что по номеру $k$ класса группы легко определяются число $n$ её звеньев и число $p$ её кинематических пар; по классу $k$ и разряду $R$ однозначно определяется порядок $r$ группы; по классу $k$ и порядку $r$ группы подсчитывается число $m$ взаимно независимых изменяемых замкнутых контуров в структуре группы.

Используя предлагаемый способ классификации, можно перечислить все группы, относящиеся а) к данному классу, б) к данному классу и данному разряду, в) к данному классу и данному порядку, а также указать их число.

Максимально возможное число $H_{\max}$ вариантов сборки группы Ассура при фиксированных положениях внешних шарниров зависит от её класса (хотя и не однозначно). Так, для группы первого класса (диады) $H_{\max} = 2$; для обеих групп второго класса $H_{\max} = 6$ [13]; для групп третьего класса, как доказал К. Инносенти [24–26], $H_{\max} = 14$, 16 или 18 – в зависимости от конкретного выбора шестизвенной группы среди десяти групп третьего класса.

Между классом группы Ассура и степенью сложности задачи о положениях её звеньев при заданных положениях внешних шарниров существует определённого рода зависимость, а именно: а) чем больше номер $k$ класса, тем сложнее задача; б) для всех групп одного класса сложность указанной задачи примерно одинакова.

## О структурном синтезе плоских групп Ассура

Задача структурного синтеза групп Ассура состоит в нахождении всех структурных групп заданного класса $k$, т. е. с заданным числом звеньев $n = 2k$ (рассматриваются группы Ассура только с вращательными парами). Решением этой задачи занимались в разные годы Л.В. Ассур [5], И.И. Артоболевский [1–4], В.В. Добровольский [10], Г.Г. Баранов [8, 9], С. Н. Кожевников [11], Н.И. Манолеску и Т. Эрделян [28], И. И. Тартаковский [19] и другие.

В работе [29] (1998) для решения этой задачи были разработаны соответствующий алгоритм и компьютерная программа. В алгоритме синтеза учтены все условия, о которых говорилось в предыдущем разделе статьи. Алгоритм включает в себя три этапа.

На первом этапе решения задачи структурного синтеза определяются все целочисленные значения величин $n_2$, $n_3$, …, $n_{k+1}$. Тем самым устанавливаются все возможные разряды $R$ для структурных групп заданного класса $k$. Каждому разряду соответствует определённый набор звеньев.

На втором этапе для каждого разряда $R$ определяются $n$-звенные структурные группы, которые можно сформировать из соответствующего набора звеньев, соединяя их разными способами при помощи $p = 3k$ шарниров. Может оказаться, что для какого-либо из найденных разрядов не существует ни одной структурной группы. Такой разряд является пустым и его следует отбросить.

К каждой из структурных групп, получаемых при их последовательном перечислении, применяется специальная *процедура идентификации*. Цель идентификации – *формализованное символьное представление* структурной группы в виде некоторого индивидуального *символьного кода*. Процедура идентификации обеспечивает взаимно однозначное соответствие между структурной группой и её символьным кодом. Одна из возможных процедур идентификации кинематических цепей и механизмов описана в работе [14]. Аналогичная процедура идентификации была составлена также и для структурных групп.

При перечислении структур, как правило, имеет место ситуация, когда в полученном множестве структурных групп, относящихся к рассматриваемому разряду, встречаются повторяющиеся (т. е. *структурно изоморфные*) группы. Поэтому на третьем этапе решения задачи структурного синтеза производится отбор неповторяющихся структур (при отборе используется упомянутый выше символьный код каждой из структурных групп).

Все найденные неповторяющиеся структурные группы вносятся в *базу данных* (БД). В результате этого формируются *электронные каталоги* плоских структурных групп различных классов с вращательными парами.

**Количественные данные о группах Ассура различных классов и разрядов**

Существует только одна группа Ассура первого класса (двухзвенная группа, или диада), две группы второго класса (четырёхзвенные) и десять групп третьего класса (шестизвенных). Двухзвенная группа (диада Сильвестра) и обе четырёхзвенных группы были известны ещё в XIX веке (они упоминаются, например, в трудах Грюблера (1883) и Бурместера (1888)). Все десять шестизвенных групп были впервые найдены В.В. Добровольским [10] (1939), хотя некоторые из шестизвенных групп были известны и ранее. В 1952 году Г.Г. Баранов [8] обнаружил 26 девятизвенных плоских статически определимых ферм, из которых, как утверждает автор статьи [8], может быть получена 161 восьмизвенная группа Ассура (сами эти группы в статье не приведены). Найденные Барановым девятизвенные фермы, а следовательно, и восьмизвенные группы, составляют значительную часть (но не все) от полного набора таких ферм и таких групп.

В 1971 г. Н.И. Манолеску и Т. Эрделян [28] получили полный состав плоских статически определимых ферм, общее число которых оказалось равным 28. В 1983 г. И.И. Тартаковский [19] сообщает, что из 28 ферм может быть получено 173 восьмизвенных группы Ассура. Этот результат был подтверждён в 1998 г. в работе [29]. С помощью нового алгоритма, предложенного в этой работе, и соответствующей программы был выполнен структурный синтез групп Ассура до шестого класса включительно, т. е. для $k = 1, 2, 3, 4, 5$ , 6, а также составлен электронный каталог групп Ассура для $k = 2, 3, 4, 5$ . Таким образом, в работе [29] не только подтверждены ранее известные результаты о числе 2-, 4-, 6- и 8-звенных групп Ассура, но и впервые получены данные о числе 10- и 12-звенных групп Ассура. Было установлено, что общее число 10- и 12-звенных структурных групп равно соответственно: 5442 и 251638.

Применение предлагаемой классификации структурных групп проиллюстрируем на примере групп второго, третьего, четвёртого и пятого классов. В таблицах 2–5 приведены сведения о разрядах $R$ групп Ассура указанных классов, а также значения структурных признаков $n$, $p$, $r$, $m$. Кроме того, в таблицах приведены данные о числе $N$ структурных групп, принадлежащих каждому классу и разряду.

Таблица 2

**Группы Ассура второго класса ($k = 2$, $n = 4$, $p = 6$)**

| Разряд | | $r$ | $m$ | $N$ | Разряд | | $r$ | $m$ | $N$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| № | $R$ | | | | № | $R$ | | | |
| 1 | 22 | 2 | 1 | 1 | 2 | 31 | 3 | 0 | 1 |
| | | | | | | | | Итого | 2 |

Таблица 3

**Группы Ассура третьего класса ($k = 3$, $n = 6$, $p = 9$)**

| Разряд | | $r$ | $m$ | $N$ | Разряд | | $r$ | $m$ | $N$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| № | $R$ | | | | № | $R$ | | | |
| 1 | 240 | 2 | 2 | 3 | 4 | 411 | 3 | 1 | 1 |
| 2 | 321 | 2 | 2 | 1 | 5 | 420 | 4 | 0 | 1 |
| 3 | 330 | 3 | 1 | 4 | | | | Итого | 10 |

Таблица 4

**Группы Ассура четвёртого класса ($k = 4$, $n = 8$, $p = 12$)**

| Разряд | | $r$ | $m$ | $N$ | Разряд | | $r$ | $m$ | $N$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| № | $R$ | | | | № | $R$ | | | |
| 1 | 2600 | 2 | 3 | 19 | 8 | 5120 | 3 | 2 | 5 |
| 2 | 3410 | 2 | 3 | 37 | 9 | 5201 | 3 | 2 | 2 |
| 3 | 4220 | 2 | 3 | 12 | 10 | 4400 | 4 | 1 | 13 |
| 4 | 4301 | 2 | 3 | 2 | 11 | 5210 | 4 | 1 | 6 |
| 5 | 5030 | 2 | 3 | 1 | 12 | 6020 | 4 | 1 | 1 |
| 6 | 3500 | 3 | 2 | 33 | 13 | 5300 | 5 | 0 | 1 |
| 7 | 4310 | 3 | 2 | 41 | | | | Итого | 173 |

Таблица 5

**Группы Ассура пятого класса ($k = 5$, $n = 10$, $p = 15$)**

| Разряд | | $r$ | $m$ | $N$ | Разряд | | $r$ | $m$ | $N$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| № | $R$ | | | | № | $R$ | | | |
| 1 | 28000 | 2 | 4 | 157 | 15 | 62110 | 3 | 3 | 66 |
| 2 | 36100 | 2 | 4 | 799 | 16 | 63001 | 3 | 3 | 4 |
| 3 | 44200 | 2 | 4 | 768 | 17 | 70210 | 3 | 3 | 3 |
| 4 | 45010 | 2 | 4 | 136 | 18 | 46000 | 4 | 2 | 222 |
| 5 | 52300 | 2 | 4 | 126 | 19 | 54100 | 4 | 2 | 341 |
| 6 | 53110 | 2 | 4 | 103 | 20 | 62200 | 4 | 2 | 83 |
| 7 | 54001 | 2 | 4 | 3 | 21 | 63010 | 4 | 2 | 24 |
| 8 | 60400 | 2 | 4 | 3 | 22 | 70300 | 4 | 2 | 2 |
| 9 | 61210 | 2 | 4 | 12 | 23 | 71110 | 4 | 2 | 5 |
| 10 | 37000 | 3 | 3 | 390 | 24 | 55000 | 5 | 1 | 35 |
| 11 | 45100 | 3 | 3 | 1249 | 25 | 63100 | 5 | 1 | 24 |
| 12 | 53200 | 3 | 3 | 672 | 26 | 71200 | 5 | 1 | 3 |
| 13 | 54010 | 3 | 3 | 156 | 27 | 64000 | 6 | 0 | 2 |
| 14 | 61300 | 3 | 3 | 54 | | | | Итого | 5442 |

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Артоболевский И.И.** Структура, кинематика и кинетостатика многозвенных плоских механизмов. – М.–Л.: ГОНТИ НКТП, 1939, 232 с.
2. **Артоболевский И.И.** К вопросу о структуре и классификации кинематических цепей с замкнутым контуром. – Известия АН СССР. ОТН, 1939, № 4, С. 27–34.
3. **Артоболевский И.И.** Теория механизмов и машин. Учебник для мех.-мат. факультетов университетов – М.–Л.: Гостехиздат, 1940, 742 с.
4. **Артоболевский И.И.** Курс теории механизмов и машин. – М.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1945, 450 с.
5. **Артоболевский И.И.** Теория механизмов и машин. Учебник. 4-е издание. – М.: Наука, 1988, 640 с.
6. **Ассур Л.В.** Исследование плоских стержневых механизмов с низшими парами с точки зрения их структуры и классификации. – Известия СПб. политехн. ин-та, т. XX, вып. 1, 1913, С. 329-385; т. XX, вып. 2, 1913, С. 581-635; т. XXI, вып. 1, 1914, С. 187-283; т. XXI, вып. 2, 1914, С. 475-573.
7. **Ассур Л.В.** Исследование плоских стержневых механизмов с низшими парами с точки зрения их структуры и классификации. – М., Изд. АН СССР, 1952, 592 с.
8. **Баранов Г.Г.** Классификация, строение, кинематика и кинетостатика механизмов с парами первого рода. – АН СССР, Труды семинара по теории машин и механизмов, 1952, том 2, вып. 46, С. 15–39.

9. **Баранов Г.Г.** Курс теории механизмов и машин. Учебник для вузов. Издание 4-е. – М.: Машиностроение, 1967, 508 с.
10. **Добровольский В.В.** Основные принципы рациональной классификации механизмов. – В кн.: Добровольский В. В., Артоболевский И. И. Структура и классификация механизмов. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1939, С. 5–48.
11. **Кожевников С.Н.** Основания структурного синтеза механизмов. Киев: Наукова Думка, 1979, 232 с.
12. **Левитский Н.И.** Теория механизмов и машин. Учебник. – М.: Наука, 1979, 576 с.
13. **Пейсах Э.Е.** Определение положений звеньев трёхповодковой и двухповодковой четырёхзвенных групп Асура с вращательными парами. – Машиноведение, 1985, № 5, С. 55–61.
14. **Пейсах Э.Е.** Метод идентификации структурных схем рычажных механизмов. – Проблемы машиностроения и надежности машин, РАН, Москва, 1995, № 5, С. 18–23.
15. **Пейсах Э.Е.** Атлас структурных схем восьмизвенных плоских шарнирных механизмов. – Теория механизмов и машин, С.-Петербург, СПГПУ, 2006, №1(7), С. 3–17.
16. **Пейсах Э.Е.** К дискуссии по проблеме структурного синтеза плоских шарнирных механизмов. – Теория механизмов и машин, С.-Петербург, СПГПУ, 2006, №1(7), С. 49–54.
17. **Рабинович И.М.** Кинематический метод в строительной механике. – М., 1928, 72 с.
18. **Семёнов М.В.** Структура механизмов. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1959, 284 с.
19. **Тартаковский И.И.** Неразложимые статически определимые фермы и группы наслоения механизмов. – Прикладная механика, том XIX, № 11, 1983, Киев, С. 105–110.
20. **Теория механизмов и машин**. Терминология. Буквенные обозначения величин. – Серия: "Сборники рекомендуемых терминов", выпуск 99, АН СССР, изд-во "Наука", Москва, 1984, 40 с.
21. **Теория механизмов и машин.** Терминология. – Учебное пособие для вузов машиностроительных специальностей. Под редакцией К.В. Фролова. – М.: изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004, 80 с.
22. **Теория механизмов и механика машин.** – Учебник для вузов / К.В. Фролов, С.А. Попов, А.К. Мусатов и др.; под ред. К.В. Фролова. – 5-издание. – М.: изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004, 664 с.
23. **Теория механизмов и машин.** Учебное пособие / М.З. Коловский, А.Н. Евграфов, Ю.А. Семёнов, А.В. Слоущ. – М.: Изд. центр "Академия", 2006, 560 с.
24. **Innocenti C.** Analytical-Form Position Analysis of the 7-Link Assur Kinematic Chain with Four Serially-Connected Ternary Links, ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 116, 1994, No. 2, pp. 622–628.
25. **Innocenti C.** Polynomial Solution to the Position Analysis of the 7-Link Assur Kinematic Chain with One Quaternary Link, Mechanism and Machine Theory, Vol. 30, 1995, No. 8, pp. 1295–1303.
26. **Innocenti C.** Position Analysis in Analytical Form of the 7-Link Assur Kinematic Chain Featuring One Ternary Link Connected to Ternary Links Only. – Mechanism and Machine Theory, Vol. 32, 1997, No. 4, p. 501–509.
27. **Manolescu N.I.** The history of the original methods used in the synthesis of the planar kinematic chains with different degrees of liberty. – V. Konference o teorii stroju a mechanismu, Liberec, 1988, p. 145–157.
28. **Manolescu N.I., Erdelean T.** La determination des fermes Baranov avec $e$=9 elements en utilisant la methode de graphisation inverse. – In.: Proc. of 3rd World

Congress on Theory Machines and Mechanisms. Yugoslavia, IFToMM, 1971, vol. D, Paper D-12, p. 177–188.

29. **Peisach E., Dresig H., Schönherr J., Gerlach S.** Typ- und Masssynthese von ebenen Koppelgetrieben mit hoeheren Gliedgruppen (Zwischenbericht zum Fortsetzungsantrag) – DFG-Themennummer: Dr 234/7-1, TU Chemnitz, Professur Maschinendynamik / Schwingunglehre, Professur Getriebelehre, Chemnitz, 1998, 172 S.
30. Terminology for the mechanism and machine science. IFToMM Permanent Commission for Standardization of Terminology. – Mechanism and Machine Theory. Special Issue. Pergamon, 38, 2003, pp. 597-1111 (русскоязычная версия).

*Доложено 28.11.2006 на научном семинаре по теории механизмов и машин (Санкт-Петербург).*
*Поступила в редакцию 14.12.2006*