

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВИБРОРОТАЦИОННОГО СТЕНДА

Данная статья посвящена математическому описанию динамической модели стенда, схема которого показана на рис. 1.

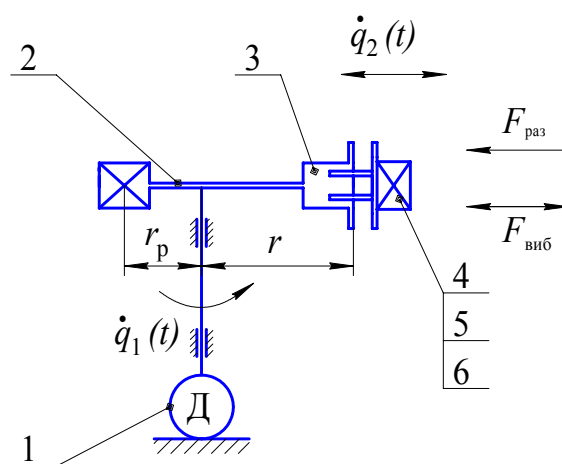


Рис. 1. Схема стенда

Двигатель вращения центрифуги 1 жестко соединен с платформой 2, на плече которой закреплена неподвижная часть вибратора 3. Описанную цепь элементов назовем ротационным узлом (РУ). Подвижную обмотку вибратора 4, стол 5 и испытуемое изделие 6 назовем виброротационным узлом (ВРУ). РУ и ВРУ совершают вращательное движение со скоростью $\dot{q}_1(t)$, вследствие чего испытуемое изделие находится в поле действующего центростремительного ускорения. Одновременно с вращением ВРУ совершает возвратно поступательное движение со скоростью $\dot{q}_2(t)$, которое вызывается переменной силой $F_{\text{виб}}$. В дальнейшем будем полагать, что $F_{\text{виб}}$ имеет гармонический характер:

$$F_{\text{виб}} = m_2 a_{\text{виб}}(t) = m_2 A_{\text{виб}}^{\text{max}} \sin(2\pi f_{\text{виб}} t), \quad (1)$$

где m_2 – масса ВРУ; $a_{\text{виб}}(t)$ – вибрационное ускорение; $A_{\text{виб}}^{\text{max}}$ – амплитудное значение вибрационного ускорения; $f_{\text{виб}}$ – частота изменения вибрационного ускорения; t – время. Таким образом, испытуемое изделие подвергается сложному воздействию.

Для компенсации воздействия центробежной силы инерции, действующей на ВРУ, предусмотрена разгрузка, которая задается силой $F_{\text{раз}}$. Сила $F_{\text{раз}}$ противоположна центробежной силе инерции по направлению и равна ей по модулю:

$$F_{\text{раз}} = m_2 r \omega_0^2 = \text{const}, \quad (2)$$

где r – расстояние от центра масс ВРУ до оси вращения центрифуги при выключенном вибраторе; ω_0 – скорость вращения центрифуги.

Предполагая реализуемые кинематическими парами связи идеальными, запишем уравнения движения станда в форме уравнений Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s(t)} - \frac{\partial T}{\partial q_s(t)} = Q_s, \quad s = 1, 2. \quad (3)$$

Здесь T – кинетическая энергия станда; $q_s(t)$ – s -я обобщенная координата станда; $\dot{q}_s(t)$ – ее производная по времени и Q_s – s -я обобщенная сила.

Станд рассматривается как система с двумя степенями свободы, причем РУ вместе с разгружающим устройством вращается вокруг неподвижной оси с угловой скоростью $\dot{q}_1(t)$ на переменном расстоянии $r + q_2(t)$ от нее. Учитывая это, запишем кинетическую энергию станда в виде:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} (m_1 r^2 \dot{q}_1(t)^2 + m_p r_p^2 \dot{q}_1(t)^2 + m_2 r^2 \dot{q}_1(t)^2 + 2m_2 r q_2(t) \dot{q}_1(t)^2 + m_2 q_2(t)^2 \dot{q}_1(t)^2 + m_2 \dot{q}_2(t)^2), \quad (4)$$

где T , T_1 , T_2 – общая кинетическая энергия станда, кинетическая энергия РУ и ВРУ соответственно; m_1 , m_p – масса РУ и масса разгрузки РУ; r_p – расстояние от оси вращения центрифуги до центра масс разгрузки РУ (см. рис. 1). При выражении кинетической энергии станда не учтены моменты инерции ротора двигателя центрифуги и платформы вследствие малости их вклада в кинетическую энергию.

Для записи выражений обобщенных сил, действующих в станде, необходимо определить работу активных сил на возможных перемещениях δq_1 и δq_2 :

$$Q_1 = D_d, \quad (5)$$

$$Q_2 = F_{\text{виб}} - F_{\text{раз}}, \quad (6)$$

где D_d – движущий момент, создаваемый ротором двигателя привода центрифуги. Заметим, что силами трения и силами упругости мы пренебрегли. Далее будем рассматривать установившейся режим вращения центрифуги, полагая силы лобового сопротивления скомпенсированными движущим моментом.

Определив кинетическую энергию станда и обобщенные силы, запишем уравнения Лагранжа в форме (3):

$$\left. \begin{aligned} & (m_p r_p^2 + m_2 r^2 + m_1 r^2 + 2m_2 r q_2(t) + m_2 q_2(t)^2) \ddot{q}_1(t) + \\ & + (2m_2 r \dot{q}_2(t) + 2m_2 q_2(t) \dot{q}_2(t)) \dot{q}_1(t) = 0, \\ & m_2 \ddot{q}_2(t) - m_2 \dot{q}_1(t)^2 q_2(t) = m_2 r \dot{q}_1(t)^2 - m_2 r \omega_0^2 + m_2 A_{\text{виб}}^{\text{max}} \sin(2\pi f_{\text{виб}} t). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

В качестве неизвестных величин в системе выступают обобщенные координаты, скорости и ускорения: $q_1(t)$, $q_2(t)$, $\dot{q}_1(t)$, $\dot{q}_2(t)$, $\ddot{q}_1(t)$, $\ddot{q}_2(t)$.

Отыскание этих неизвестных в аналитическом виде затруднительно, что связано с нелинейностью системы уравнений (7). В таких случаях целесообразно либо пользоваться чис-

ленными методами, либо каким-то образом упростить систему, чтобы получить аналитические зависимости.

Для решения системы уравнений численным методом мы воспользовались пакетом Mathematica 5.0. Решение искали при следующих исходных данных: $m_2 = 30$ кг, $r = 1.5$ м, $m_1 = 10$ кг, $m_p = 10$ кг, $r_p = 1.5$ м, $\omega_0 = 25$ с⁻¹, $A_{\text{виб}}^{\text{max}} = 10$ м/с², $f_{\text{виб}} = 20$ Гц. В качестве начальных условий было принято: $\dot{q}_1(0) = \omega_0$, $\dot{q}_2(0) = 0$, $q_1(0) = 0$, $q_2(0) = 0$. Полученные зависимости для $\dot{q}_1(t)$, $q_2(t)$, $\ddot{q}_2(t)$ показаны на рис. 2, 3, 4.

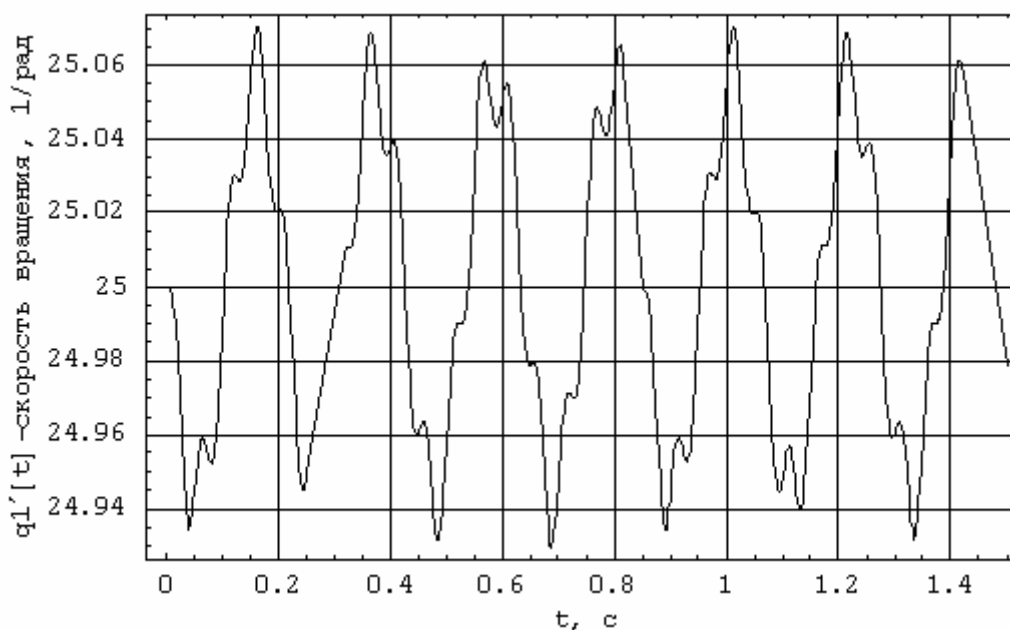


Рис. 2. График зависимости скорости вращения от времени

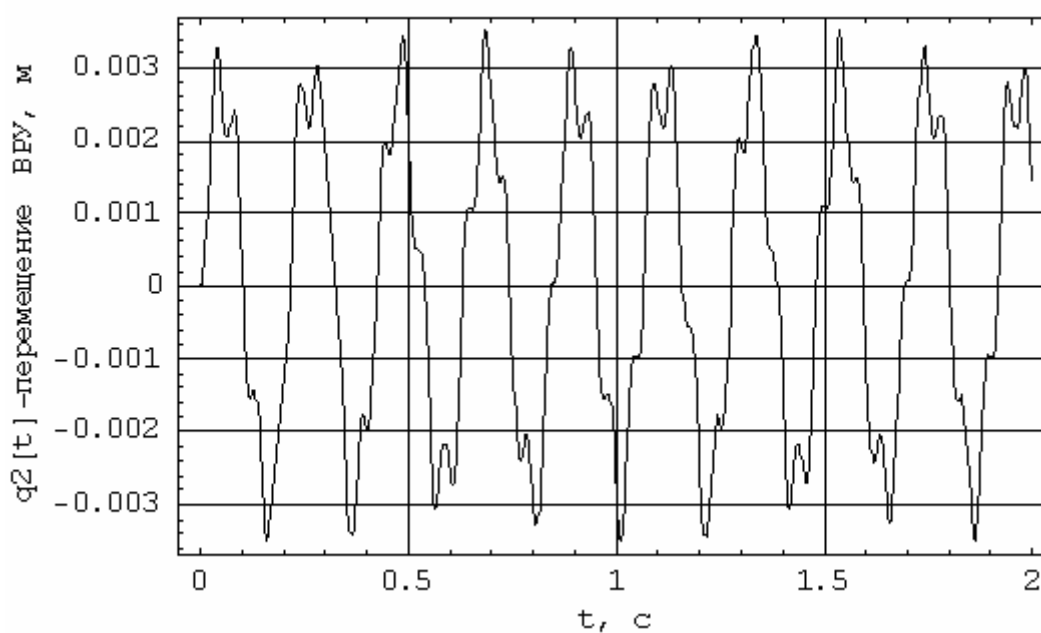


Рис. 3. График зависимости перемещения ВРУ от времени

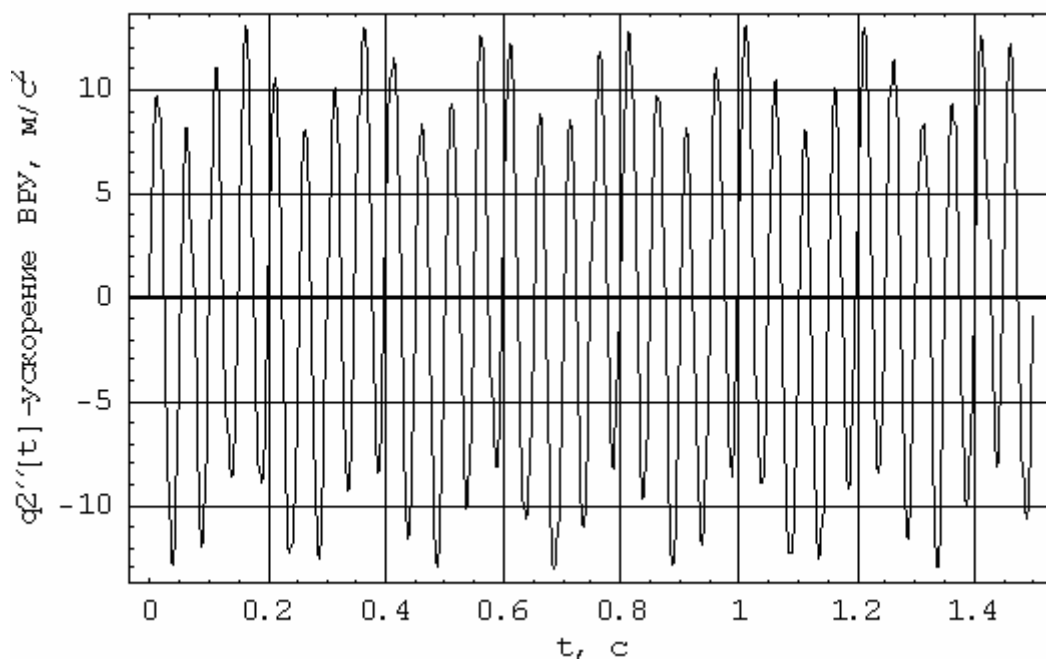


Рис. 4. График зависимости ускорения ВРУ от времени

Как видно из рисунков, эти графики имеют периодический характер. Если проанализировать зависимость $q_2(t)$, то можно заметить, что изменение перемещения ВРУ происходит с некоторой амплитудой на низкой частоте, назовем ее k^* . На эти изменения координаты $q_2(t)$ наложены колебания с меньшей амплитудой и более высокой, чем k^* , частотой. Полученная зависимость похожа на вынужденные колебания системы с одной степенью свободы при отсутствии трения.

Предположим, что искомое значение угловой скорости вращения стенда $\dot{q}_1(t)$ мало отличается от некоторого среднего значения скорости $\omega_0 = \text{const}$ установившегося режима вращения, причем наибольшие отклонения от ω_0 малы по сравнению с этим средним значением, то есть можно записать:

$$q_1(t) = \omega_0 t + \psi_1(t),$$

$$\dot{q}_1(t) = \omega_0 + \dot{\psi}_1(t), \quad (8)$$

$$\ddot{q}_1(t) = \ddot{\psi}_1(t).$$

где $\psi_1(t)$ – отклонения угла поворота от $\omega_0 t$; $\dot{\psi}_1(t)$ – отклонение скорости вращения от ω_0 , $\ddot{\psi}_1(t)$ – угловое ускорение. Принимая, что равномерное вращение можно считать для установившегося режима программным движением, функцию $\psi_1(t)$ естественно рассматривать, как динамическую ошибку по углу, а ее первую производную $\dot{\psi}_1(t)$ как динамическую

ошибку по угловой скорости. Также примем, что величины $q_2(t)$, $\dot{q}_2(t)$, $\ddot{q}_2(t)$ малы. Подставляя соотношения (8) в уравнения (7) и пренебрегая величинами порядка малости больше, чем первый, получим:

$$\left. \begin{aligned} (m_p r_p^2 + m_1 r^2 + m_2 r^2) \ddot{\psi}_1(t) &= -2m_2 r \omega_0 \dot{q}_2(t), \\ m_2 \ddot{q}_2(t) - m_2 \omega_0^2 q_2(t) &= 2m_2 r \omega_0 \dot{\psi}_1(t) + m_2 A_{\text{виб}}^{\max} \sin(2\pi f_{\text{виб}} t). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Разрешив второе уравнение системы (9) относительно $\dot{\psi}_1(t)$, взяв от нее производную по времени, подставим полученные выражения в первое уравнение:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{m_p r_p^2}{2r\omega_0} + \frac{m_1 r}{2\omega_0} + \frac{m_2 r}{2\omega_0} \right) \ddot{\ddot{q}}_2(t) + \left(-\frac{m_p r_p^2 \omega_0}{2r} - \frac{m_1 r \omega_0}{2} + \frac{3m_2 r \omega_0}{2} \right) \dot{q}_2(t) = \\ &= \left(\frac{m_p r_p^2}{r\omega_0} + \frac{m_1 r}{\omega_0} + \frac{m_2 r}{\omega_0} \right) \pi A_{\text{виб}}^{\max} f_{\text{виб}} \cos(2\pi f_{\text{виб}} t). \end{aligned} \quad (10)$$

Получено неоднородное дифференциальное уравнение третьего порядка. Вводя новую переменную $z_2(t) = \dot{q}_2(t)$ и приняв:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{m_p r_p^2}{2r\omega_0} + \frac{m_1 r}{2\omega_0} + \frac{m_2 r}{2\omega_0} \right), \\ C &= \left(-\frac{m_p r_p^2 \omega_0}{2r} - \frac{m_1 r \omega_0}{2} + \frac{3m_2 r \omega_0}{2} \right), \\ H &= \left(\frac{m_p r_p^2}{r\omega_0} + \frac{m_1 r}{\omega_0} + \frac{m_2 r}{\omega_0} \right) \pi A_{\text{виб}}^{\max} f_{\text{виб}}, \\ K^2 &= \frac{C}{A}, \end{aligned}$$

приводим уравнение (10) к виду:

$$\ddot{z}_2(t) + K^2 z_2(t) = \frac{H}{A} \cos(2\pi f_{\text{виб}} t). \quad (11)$$

Его частное решение при нулевых начальных условиях имеет вид:

$$z_2(t) = \frac{H}{A(K^2 - 4\pi^2 f_{\text{виб}}^2 \pi^2)} (\cos(2\pi f_{\text{виб}} t) - \cos(Kt)). \quad (12)$$

Переходя к старым координатам, проинтегрируем выражение (11):

$$q_2(t) = \int \dot{z}_2(t) dt = -\frac{H}{AK(K^2 - 4\pi^2 f_{\text{виб}}^2 \pi^2)} \sin(Kt) - \frac{H}{2\pi A f_{\text{виб}}(4\pi^2 f_{\text{виб}}^2 \pi^2 - K^2)} \sin(2\pi f_{\text{виб}} t). \quad (13)$$

Получено аналитическое решение линеаризованной системы уравнений (9). Заметим, что уравнение (11), к которому в конечном итоге свелась задача определения движения стенда, и в самом деле представляет собой уравнение вынужденных колебаний колебательной системы с одной степенью свободы. Низкочастотная составляющая колебаний ВРУ, нарушающая правильную работу виброротационного стенда, представляет собой свободные колебания этой системы. Более того, при неудачном подборе параметров стенда величина C может оказаться отрицательной, что приведет к неустойчивости режима работы стенда.

При неизбежном наличии в системе трения колебания ВРУ на частоте $k^* = K$ со временем угаснут, останутся лишь колебания на частоте вынуждающей силы $f_{\text{виб}}$. Задача проектировщика состоит, в частности, в ведении в систему демпфирования.

Запишем выражение для k^* :

$$k^* = \sqrt{\frac{3m_2 r^2 - (m_p r_p^2 + m_1 r^2)}{m_p r_p^2 + m_1 r^2 + m_2 r^2}} \cdot \omega_0. \quad (14)$$

Подкоренное выражение (14) положительно, если выполняется условие:

$$\frac{(m_p r_p^2 + m_1 r^2)}{m_2 r^2} \leq 3,$$

то есть, когда отношение момента инерции РУ к моменту инерции ВРУ будет меньше либо равно 3. При использовании в качестве виброзадающего устройства электродинамического вибратора можно с уверенностью говорить о том, что момент инерции РУ на порядок превосходит момент инерции ВРУ. Так, к примеру, электродинамический вибростенд фирмы Data Physics (модель V400 DSA4-8k) с эффективной выталкивающей силой при пустом столе 7236 Н имеет массу неподвижной части вибратора, равную 350 кг, при массе подвижной части, равной 5,22 кг. Отсюда следует, что рассчитываемая модель стенда при реальных параметрах не будет воспроизводить ожидаемое воздействие. В связи с этим предлагается пересмотреть расчетную схему.

Для компенсации воздействия центробежной силы инерции, действующей на ВРУ, была предусмотрена установка разгружающего устройства, которое было бы способно воспроизводить силу $F_{\text{раз}}$ (2). В качестве такого устройства может быть взят пружинный разгрузатель (рис. 5), основной составляющей которого является упругий элемент в виде цилиндрической пружины. Настройка разгрузателя осуществляется на определенную центробежную силу инерции путем задания предварительного поджатия.

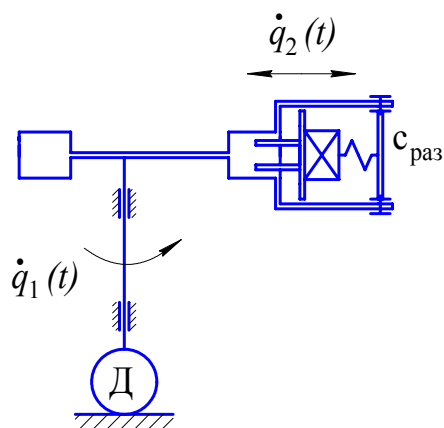


Рис. 5. Схема стэнда с разгрузкой

Таким образом, с учетом действия пружинного разгрузителя система (7) переписывается следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} & (m_p r_p^2 + m_2 r^2 + m_1 r^2 + 2m_2 r q_2(t) + m_2 q_2(t)^2) \ddot{q}_1(t) + \\ & + (2m_2 r \dot{q}_2(t) + 2m_2 q_2(t) \dot{q}_2(t)) \dot{q}_1(t) = 0, \\ & m_2 \ddot{q}_2(t) + (c_{\text{раз}} - m_2 \dot{q}_1(t)^2) q_2(t) = m_2 r \dot{q}_1(t)^2 - m_2 r \omega_0^2 + m_2 A_{\text{виб}}^{\text{max}} \sin(2\pi f_{\text{виб}} t). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

После линеаризации системы (15) мы будем иметь возможность разрешить её аналитически. Задача определения $q_2(t)$ сведется к решению дифференциального уравнения (11). Частота свободных колебаний определится выражением:

$$k^* = K = \sqrt{\frac{c_{\text{раз}} - ((m_1 - 3m_2)r^2 + m_p r_p^2)\omega_0^2}{m_2 - \frac{m_1 r^2 + m_2 r^2 + m_p r_p^2}{m_1 r^2 + m_2 r^2 + m_p r_p^2}}}. \quad (16)$$

Для того чтобы подкоренное выражение было положительным, необходимо выполнение следующего условия:

$$c_{\text{раз}} > \frac{(m_1 r^2 + m_p r_p^2 - 3m_2 r^2)m_2 \omega_0^2}{m_1 r^2 + m_2 r^2 + m_p r_p^2}. \quad (17)$$

Полученное условие целесообразно использовать для выбора жесткости упругих элементов разгрузочного устройства.

Поступила в редакцию 22.01.2007
После доработки 15.02.2007