

О ПОВЫШЕНИИ ТОЧНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ ДИССИПАТИВНЫХ СВОЙСТВ ЖИДКОСТИ НА СТЕНДЕ «И1»

Для расчетов динамических процессов в машинах с гидроприводами необходимо учитывать упруго-диссипативные свойства рабочих жидкостей. Упругие свойства гидрролинии хорошо описываются приведенным модулем объемной упругости

$$E = \frac{E_{\text{ж}}}{1 + \frac{d}{\delta} \cdot \frac{E_{\text{ж}}}{E_{\text{т}}}}, \quad (1)$$

где $E_{\text{ж}}$ – модуль объемной упругости жидкости; $E_{\text{т}}$ – модуль Юнга материала трубопровода; d и δ – диаметр и толщина стенки трубопровода. Так как обычно выполняется неравенство

$$\frac{d}{\delta} \cdot \frac{E_{\text{ж}}}{E_{\text{т}}} < 0,1, \quad (2)$$

и величина $E_{\text{ж}}$ известна с погрешностью более 10 %, то деформацией труб можно пренебречь и полагать

$$E = E_{\text{ж}}. \quad (3)$$

Для описания диссипативных свойств наиболее простым является введение в рассмотрение модуля объемной упругости жидкости в комплексной форме [2] и соответствующее изменение записи (3):

$$E = E_{\text{ж}}(1 + \Psi p), \quad (4)$$

где Ψ – относительное демпфирование, p – переменная Лапласа. Относительное демпфирование зависит от типа применяемой жидкости и температуры. Для экспериментального определения Ψ был создан стенд. В статье [1] описан расчет основных параметров данного стенда, показанного на рис. 1, предназначенного для исследования упруго-диссипативных свойств рабочих жидкостей, применяемых в гидроприводах. После изготовления стенда первые же испытания подтвердили хорошее совпадение с расчетными характеристиками. Основной проблемой при конструкторских расчетах было правильное назначение полей допусков на размеры иглы и втулки для обеспечения достаточной герметичности и минимального трения. Из-за быстрого затухания свободных колебаний иглы в жидкости не удалось экспериментально получить численных значений Ψ с достаточной точностью. Для снижения влияния сухого трения и повышения точности было предложено изучать колебания при одновременном вращении иглы. При этом значительно возрастают математические сложности при формировании функций регрессии.

Запишем уравнения движения иглы как абсолютно твердого тела в статически определенной опоре. Для этого применим метод кинестатики. Главный вектор и главный момент

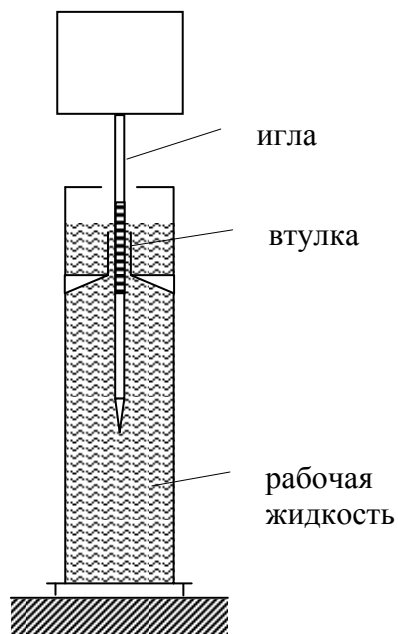


Рис. 1. Схема испытательного стенда «И1»

сил сухого трения выразим через силы в точках контакта иглы с опорой. При вращении и одновременном поступательном движении иглы возникают силы сухого трения F_A ,

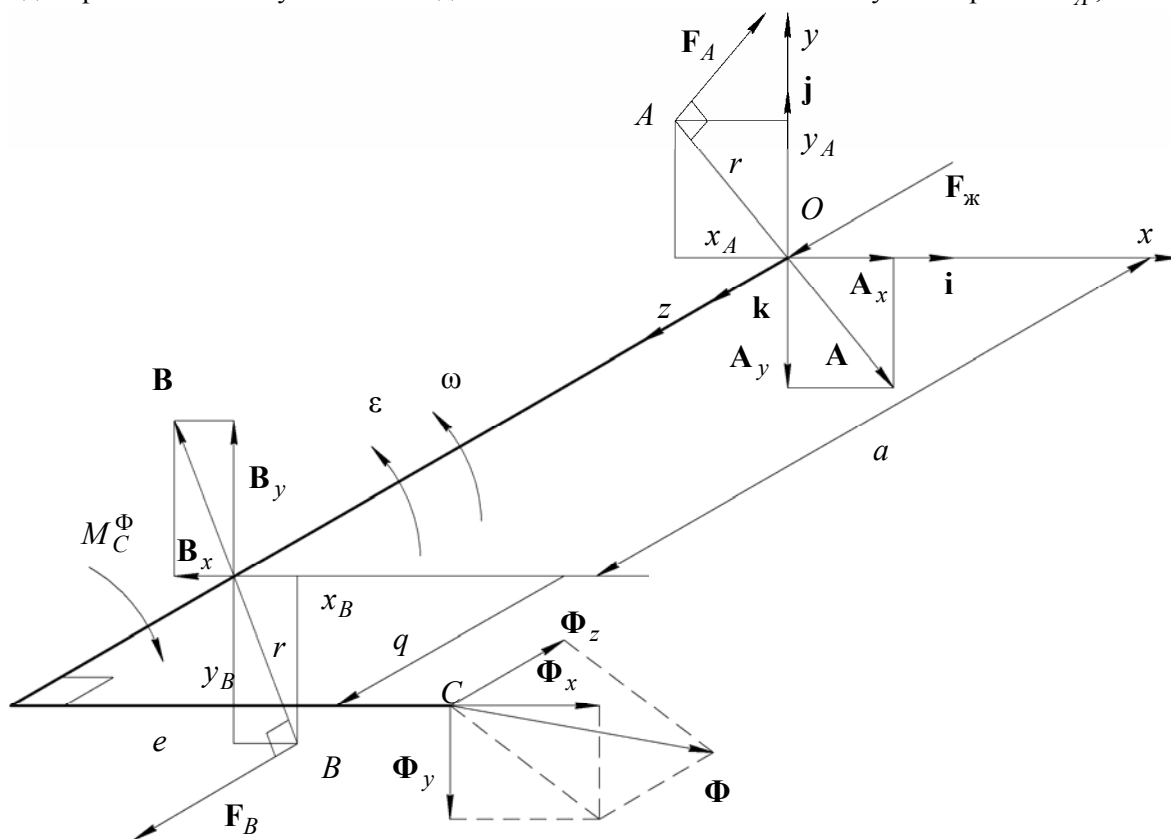


Рис. 2. Система сил, действующих на иглу

\mathbf{F}_B , действующие в точках контакта A и B (рис. 2); $\mathbf{F}_ж$ – упруго-диссипативная сила, создаваемая жидкостью в баллоне; \mathbf{A} и \mathbf{B} – нормальные реакции опоры; x, y, z – связанные с иглой оси координат; ω и ε – угловые скорость и ускорение иглы; Φ – сила инерции иглы; r – радиус иглы; C – центр тяжести иглы; e – эксцентриситет, q – продольное смещение иглы.

Силы сухого трения:

$$\mathbf{F}_A = -f|\mathbf{A}|\frac{\mathbf{v}_A}{|\mathbf{v}_A|}, \quad \mathbf{F}_B = -f|\mathbf{B}|\frac{\mathbf{v}_B}{|\mathbf{v}_B|}, \quad (5)$$

где f – коэффициент сухого трения; \mathbf{v}_A и \mathbf{v}_B – векторы скоростей точек A и B ; их модули

$$|\mathbf{v}_A| = |\mathbf{v}_B| = |\mathbf{v}| = \sqrt{\omega^2 r^2 + \dot{q}^2}. \quad (6)$$

Эти скорости имеют одинаковые проекции на продольную ось z и на касательные в поперечных сечениях направления:

$$v_{Az} = v_{Bz} = \dot{q}, \quad v_A^\tau = v_B^\tau = \omega r. \quad (7)$$

Запишем проекции главного вектора $\mathbf{R} = \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B$ и главного момента M_O^R этих сил на ось z :

$$R_z = -f \frac{\dot{q}}{|\mathbf{v}|} (|\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|), \quad M_{Oz}^R = -f \frac{\omega r^2}{|\mathbf{v}|} (|\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|). \quad (8)$$

При небольшом трении реакции в основном определяются силами нормального давления. Так как проекция силы R_z и момент M_{Oz}^R содержат малый множитель f , то в выражениях (8) для $|\mathbf{A}|$ и $|\mathbf{B}|$ не будем учитывать трения. Определим модули нормальных реакций $|\mathbf{A}|$ и $|\mathbf{B}|$ через их главный вектор \mathbf{R} и главный момент \mathbf{M}_O^R :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{A} + \mathbf{B}, \\ \mathbf{M}_O^R &= \overline{OB} \times \mathbf{B}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Решение этой системы имеет следующий вид

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A} &= \left(R_x - \frac{M_{Oy}^R}{a} \right) \mathbf{i} + \left(R_y - \frac{M_{Ox}^R}{a} \right) \mathbf{j}, \\ \mathbf{B} &= \frac{M_{Oy}^R}{a} \mathbf{i} - \frac{M_{Ox}^R}{a} \mathbf{j}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Проекции R_x, R_y, M_{Ox}^R и M_{Oy}^R найдем из уравнений кинетостатики без учета трения:

$$\left. \begin{aligned} R_x + \Phi_x &= 0, \\ R_y + \Phi_y &= 0, \\ M_{Ox}^R - \Phi_y(a+q) &= 0, \\ M_{Oy}^R - \Phi_z e + \Phi_x(a+q) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

или

$$\left. \begin{aligned} R_x + m\omega^2 e &= 0, \\ R_y - m\epsilon e &= 0, \\ M_{Ox}^R + m\epsilon e(a+q) &= 0, \\ M_{Oy}^R + me[\ddot{q} + (a+q)\omega^2] &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где $\Phi_x = m\omega^2 e$; $\Phi_y = -m\epsilon e$; $\Phi_z = -m\ddot{q}$; m – масса иглы. Следовательно,

$$\begin{aligned} A_x &= -m\omega^2 e - \frac{-me[\ddot{q} + (a+q)\omega^2]}{a}, \\ A_y &= m\epsilon e + \frac{-m\epsilon e(a+q)}{a}, \\ B_x &= \frac{-me[\ddot{q} + (a+q)\omega^2]}{a}, \\ B_y &= -\frac{-m\epsilon e(a+q)}{a}. \end{aligned} \quad (13)$$

Подставив эти выражения в (8), получим проекции главного вектора и главного момента сил сухого трения на ось z в виде функций закона движения $(\omega, \epsilon, q, \dot{q}, \ddot{q})$, массы m и геометрических параметров иглы (a, e) :

$$R_z = -f\dot{q}\gamma, \quad M_{Oz}^R = -fr^2\omega\gamma, \quad (14)$$

где

$$\gamma = \left\{ \sqrt{\left[-m\omega^2 e + \frac{me[\ddot{q} + (a+q)\omega^2]}{a} \right]^2 + \left[m\epsilon e - \frac{m\epsilon e(a+q)}{a} \right]^2} + \sqrt{\left[\frac{me[\ddot{q} + (a+q)\omega^2]}{a} \right]^2 + \left[\frac{m\epsilon e(a+q)}{a} \right]^2} \right\} / |\mathbf{v}|.$$

Для получения уравнений движения иглы достаточно подставить (14) в следующие два уравнения кинестатики:

$$\left. \begin{aligned} -m\ddot{q} + F_{ABz} + F_{BBz} + F_{ж} + R_z &= 0, \\ -J_z \varepsilon - \left(|F_{AB}^\tau| + |F_{BB}^\tau| \right) \cdot r \cdot \text{sign} \omega + M_{Oz}^R &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где продольные составляющие сил вязкого трения: $F_{ABz} = F_{BBz} = -b\dot{q}$ и касательные: $|F_{AB}^\tau| = |F_{BB}^\tau| = |b\omega r|$, так как $\mathbf{F}_{AB} = -b\mathbf{v}_A$, $\mathbf{F}_{BB} = -b\mathbf{v}_B$; $F_{ж} = -\beta\dot{q} - cq$, β и c – коэффициенты диссипации и жесткости рабочей жидкости в баллоне; J_z – момент инерции иглы относительно продольной оси (эксцентриситет e можно не учитывать в силу его малости по сравнению с радиусом инерции). После несложных преобразований уравнения движения (15) могут быть записаны в окончательной форме

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{q} + (2b + \beta + f\gamma)\dot{q} + cq &= 0, \\ J_z \varepsilon + (2b + f\gamma) \cdot r^2 \omega &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

где

$$\gamma = \frac{me}{a\sqrt{\dot{q}^2 + \omega^2 r^2}} \left[\sqrt{(\ddot{q} + q\omega^2)^2 + (q\varepsilon)^2} + \sqrt{[\ddot{q} + (a+q)\omega^2]^2 + [(a+q)\varepsilon]^2} \right].$$

Расчетные графики с исходными данными, соответствующими рассматриваемому стенду, показаны на рис. 3.

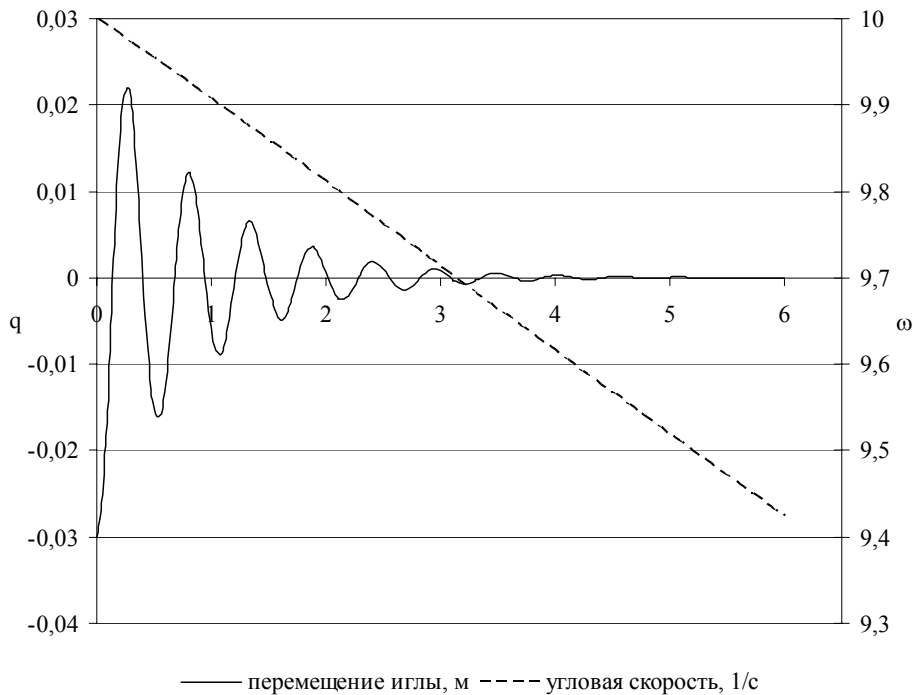


Рис. 3. Поступательное и вращательное движение иглы

Искомый параметр $\Psi = \beta/c$ может быть определен из сравнения экспериментальных кривых $q(t)$, $\omega(t)$ с расчетными. Проведя эксперимент при $q = \text{const}$, можно оценить коэффициенты b и f . После этого значительно проще отыскать параметр β из системы уравнений (16) при одновременном вращении и продольном движении иглы.

Рассмотрим два предельных случая. Пусть игла не вращается. Тогда из первого уравнения (16):

$$m\ddot{q} + (2b + \beta)\dot{q} + cq = -f \frac{2me}{a} |\dot{q}| \text{sign} \dot{q}. \quad (17)$$

Пусть теперь игла не колеблется вдоль продольной оси, а только вращается. Тогда $q = \text{const}$ и

$$\gamma = \frac{me}{ar|\omega|} (|q| + |a + q|) \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}. \quad (18)$$

График множителя при радикале в скобках показан на рис. 4. При этом второе уравнение движения (16) можно записать в следующем виде

$$\varepsilon + n\omega = -\mu \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}, \quad (19)$$

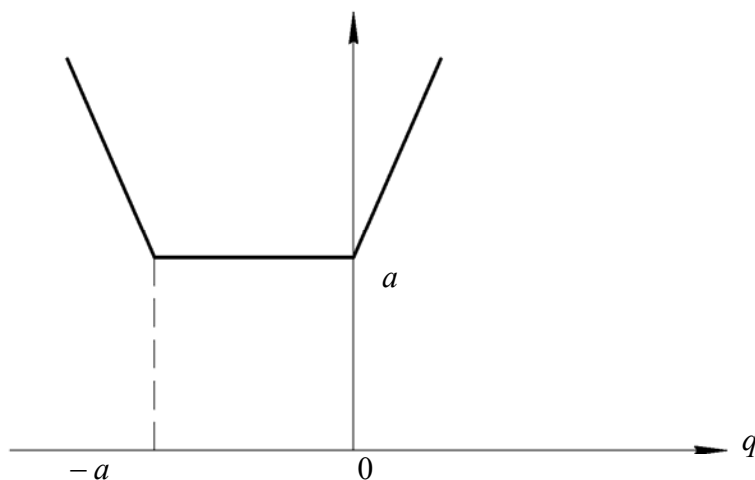


Рис. 4. График множителя при радикале

где $n = 2br^2/J_z$; $\mu = fme(|q| + |a + q|)/aJ_z$. Определение коэффициентов b и f из (19) удобнее осуществлять, если имеется не дифференциальное уравнение, а аналитическая запись интегральной кривой. Получим ее в предположении, что

$$\omega^4 \gg \varepsilon^2. \quad (20)$$

Это неравенство очевидно при $\omega \approx \omega_0 e^{-nt}$, так как обычно

$$\omega^2 \gg n^2. \quad (21)$$

В исследуемом стенде для измерений используется следующий интервал изменения угловой скорости: $3 \leq \omega \leq 12$, $n < 1$. С учетом сказанного выше перепишем (19):

$$\frac{d\omega}{dt} + n\omega + \mu\omega^2 = 0. \quad (22)$$

Это уравнение имеет следующее решение:

$$t = \frac{1}{n} \ln \frac{\omega_0(n + \mu\omega)}{\omega(n + \mu\omega_0)} \Big|_{n < \omega < \omega_0} \quad \text{или} \quad \omega = \omega_0 \frac{n}{(n + \mu\omega_0)e^{nt} - \mu\omega_0}. \quad (23)$$

Обозначим

$$t_{\max} = t \Big|_{\omega=n} = \frac{1}{n} \ln \frac{\omega_0(1 + \mu)}{n + \mu\omega_0}.$$

Проинтегрируем последнюю функцию (23) по времени:

$$\varphi = \frac{1}{\mu} \ln \left[1 + \frac{\mu\omega_0}{n} (1 - e^{-nt}) \right] \Big|_{0 \leq t < t_{\max}}. \quad (24)$$

Получим выражение для максимального значения угла:

$$\varphi_{\max} = \varphi \Big|_{t_{\max}} = \frac{1}{\mu} \ln \frac{n + \mu\omega_0}{n(1 + \mu)}.$$

Зависимость (24) используем в качестве функции регрессии для определения параметров μ и n . Важно иметь в виду, что интервал наблюдения $[0; t_{\max}]$ зависит от этих же искомых величин μ и n .

Предположим теперь, что неуравновешенность крайне мала, а сила сухого трения существует из-за небольшого натяга и наличия острых кромок, снимающих масляную пленку. Контакт иглы со втулкой при этом происходит не в двух, а в нескольких точках A_i , $i = 1, \dots, N$. Выражения (5), (6), (7) для сил сухого трения и скоростей точек контакта остаются справедливыми:

$$\mathbf{F}_{A_i} = -f |\mathbf{A}_i| \frac{\mathbf{v}_{A_i}}{|\mathbf{v}_{A_i}|}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (25)$$

где $|\mathbf{v}_{A_i}| = |\mathbf{v}| = \sqrt{\omega^2 r^2 + \dot{q}^2}$, $v_{A_{iz}} = \dot{q}$, $v_{A_i}^\tau = \omega r$. Запишем проекции главного вектора

$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{A_i}$ и главного момента \mathbf{M}_O^R этих сил на ось z :

$$R_z = -f \frac{\dot{q}}{|\mathbf{v}|} \sum_{i=1}^N |\mathbf{A}_i|; \quad M_{Oz}^R = -f \frac{\omega r^2}{|\mathbf{v}|} \sum_{i=1}^N |\mathbf{A}_i|. \quad (26)$$

Из эксперимента с одним вращением удается выделить момент сухого трения

$$M_{Oz}^R = -fr \sum_{i=1}^N |\mathbf{A}_i|. \quad (27)$$

Полагая модули всех нормальных реакций постоянными при движении,

$$|\mathbf{A}_i| = \text{const}(t), \quad i = 1, \dots, N, \quad (28)$$

оценим суммарную силу сухого трения

$$F = -f \sum_{i=1}^N |\mathbf{A}_i|. \quad (29)$$

Тогда выражения (26) примут следующий вид:

$$R_z = -F \frac{\dot{q}}{|\mathbf{v}|}; \quad M_{Oz}^R = -F \frac{\omega r^2}{|\mathbf{v}|}. \quad (30)$$

Уравнения (15) при этом также несколько преобразуются:

$$\left. \begin{aligned} -m\ddot{q} + \left(b_\Sigma + \beta + \frac{F}{\sqrt{\omega^2 r^2 + \dot{q}^2}} \right) \dot{q} + cq &= 0, \\ -J_z \varepsilon - \left(b_\Sigma + \frac{F}{\sqrt{\omega^2 r^2 + \dot{q}^2}} \right) r^2 \omega &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

где $b_\Sigma = Nb$ – суммарный коэффициент вязкого трения иглы со втулкой, также определяемый из эксперимента при только вращательном движении. Первое уравнение (31) позволяет оценить параметр β с достаточной точностью лишь при малых по сравнению с ним b_Σ и $F/\sqrt{\omega^2 r^2 + \dot{q}^2}$. Для этого необходимо одновременно регистрировать две переменные: $\omega(t)$ и $q(t)$. За время успокоения колебаний q угловая скорость ω изменяется мало. Это существенно упрощает расчеты искомой характеристики рабочей жидкости Ψ .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андриенко П.А., Ащеулов А.В., Терешин В.А. Исследование упруго-диссипативных свойств жидкости. // Современные проблемы проектирования и экс-

плутации транспортных и технологических систем.: Труды Междунар. науч.-техн. конф. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2006.

2. **Сорокин Е.С.** К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем / Академия строительства и архитектуры СССР. ЦНИИ строительных конструкций. – М.: Госстройиздат, 1960. – 131 с.

Поступила в редакцию 12.01.2007

После доработки 01.03.2007