

АНАЛИЗ ЗАМКНУТОГО ДВУХПОДВИЖНОГО МЕХАНИЗМА (РОБОТА)

В основе современных манипуляционных систем, как правило, лежат разомкнутые кинематические цепи, характеризующиеся большим рабочим пространством и высокой ориентирующей способностью. В то же время последовательное соединение звеньев не позволяет получить достаточно высокую жесткость кинематической цепи, что приводит к заметным погрешностям позиционирования.

Для устранения таких недостатков в структуру манипуляционных систем включают замкнутые многоподвижные цепи или создают роботы с чисто параллельной структурой.

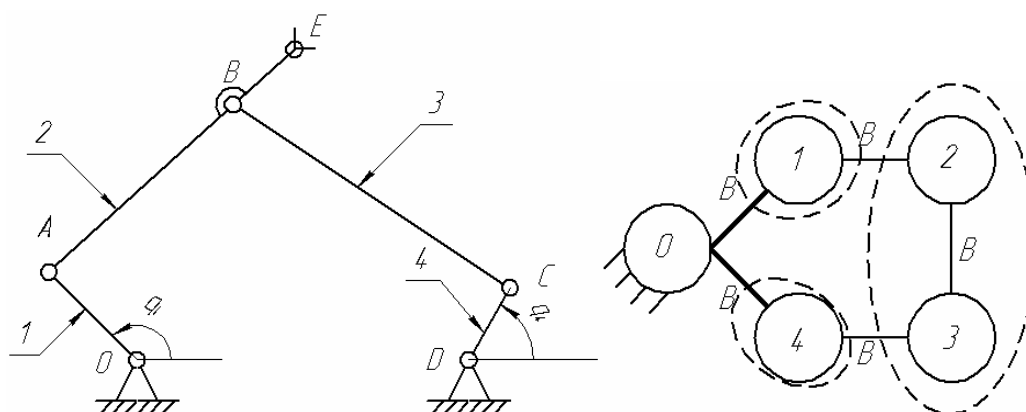


Рис. 1. Двухподвижный манипулятор

Рассмотрим двухподвижный четырехзвенник (рис. 1). Проведем геометрический анализ данного механизма. Размыкая кинематическую цепь в шарнире В, приведем замкнутую цепь к открытой цепи. На рис. 2 показаны две открытые цепи (ветви): ОА, АВСD.

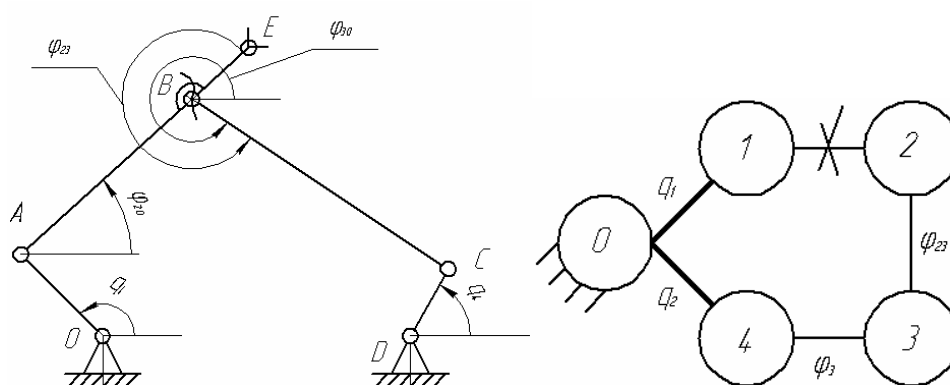


Рис. 2. Условный разрыв механизма в шарнире В

Из групповых уравнений

$$\left. \begin{aligned} l_2 \cos \varphi_2 + l_3 \cos(\varphi_2 + \varphi_{23}) &= x_C - x_A, \\ l_2 \sin \varphi_2 + l_3 \sin(\varphi_2 + \varphi_{23}) &= y_C - y_A \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

определим

$$\cos \varphi_{23} = \frac{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 - \ell_2^2 - \ell_3^2}{2\ell_2\ell_3}, \quad (2)$$

$$\sin \varphi_{23} = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_{23}}, \quad (3)$$

где: $\ell_2; \ell_3$ – длины звеньев, φ_2 – абсолютный угол, φ_{23} – относительный угол.

Здесь двойной знак перед радикалом указывает на два решения тригонометрических уравнений. Этим решениям соответствуют два варианта сборки звеньев 2 и 3 группы ВВВ.

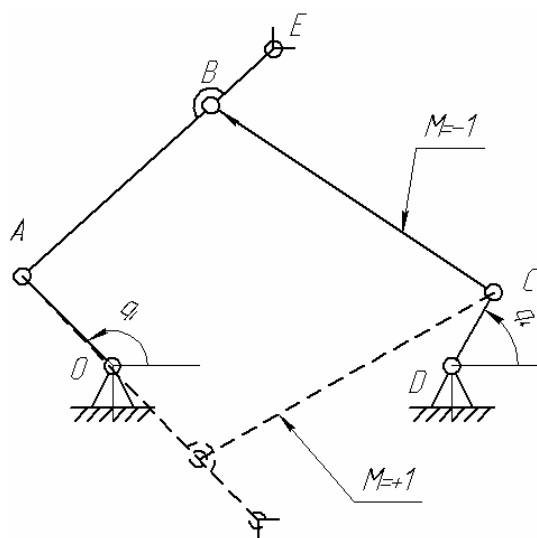


Рис. 3. Два варианта сборки данного механизма

Числовой показатель варианта сборки группы ВВВ на ЭВМ определяется по знаку момента вектора \overrightarrow{AB} относительно точки С:

$$M = \text{sign}(-\sin \varphi_{23}) = \text{sign}[M_C(\overrightarrow{AB})] = \begin{cases} +1 & \text{против ч. с.} \\ -1 & \text{по ч. с.} \end{cases} \quad (4)$$

Групповые уравнения (1) перепишем в виде:

$$\left. \begin{aligned} (\ell_2 + \ell_3 \cos \varphi_{23}) \cos \varphi_{20} - \ell_3 \sin \varphi_{23} \sin \varphi_{20} &= x_C - x_A, \\ \ell_3 \sin \varphi_{23} \cos \varphi_{20} + (\ell_2 + \ell_3 \cos \varphi_{23}) \sin \varphi_{20} &= y_C - y_A, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

откуда по правилу Крамера определим:

$$\cos \varphi_{20} = \frac{\begin{vmatrix} x_C - x_A & -\ell_3 \sin \varphi_{23} \\ y_C - y_A & \ell_2 + \ell_3 \cos \varphi_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \ell_2 + \ell_3 \cos \varphi_{23} & -\ell_3 \sin \varphi_{23} \\ \ell_3 \sin \varphi_{23} & \ell_2 + \ell_3 \cos \varphi_{23} \end{vmatrix}} = \quad (6)$$

$$= \frac{(x_C - x_A)(l_2 + l_3 \cos \varphi_{23}) + (y_C - y_A)l_3 \sin \varphi_{23}}{l_2^2 + l_3^2 + 2l_2l_3 \cos \varphi_{23}},$$

$$\sin \varphi_{20} = \frac{(y_C - y_A)(l_2 + l_3 \cos \varphi_{23}) - (x_C - x_A)l_3 \sin \varphi_{23}}{l_2^2 + l_3^2 + 2l_2l_3 \cos \varphi_{23}}.$$

Тогда абсолютные координаты: $\varphi_{20} = \varphi_2, \varphi_3 = \varphi_2 + \varphi_{23}$.
 Запишем якобиан для данного механизма:

$$J = \begin{vmatrix} -l_3 \sin \varphi_3 & -l_2 \sin \varphi_2 \\ l_3 \cos \varphi_3 & l_2 \cos \varphi_2 \end{vmatrix} = l_2 l_3 \sin(\varphi_2 - \varphi_3). \quad (7)$$

Таким образом, при $\varphi_2 = \varphi_3 + \pi k$ механизм попадает в особые положения (рис. 4).

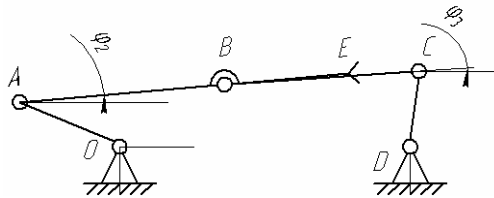


Рис. 4. Одно из особых положений механизма

Рассмотрим рабочую зону данного механизма; она очень мала – это является главным недостатком роботов с замкнутой структурой (рис. 5, а). При изменении длин звеньев, можно добиться пересечения рабочих зон различных сборок механизмов (рис. 5, б). Осуществим переход через особое положение, путем установки дополнительного внутреннего двигателя.

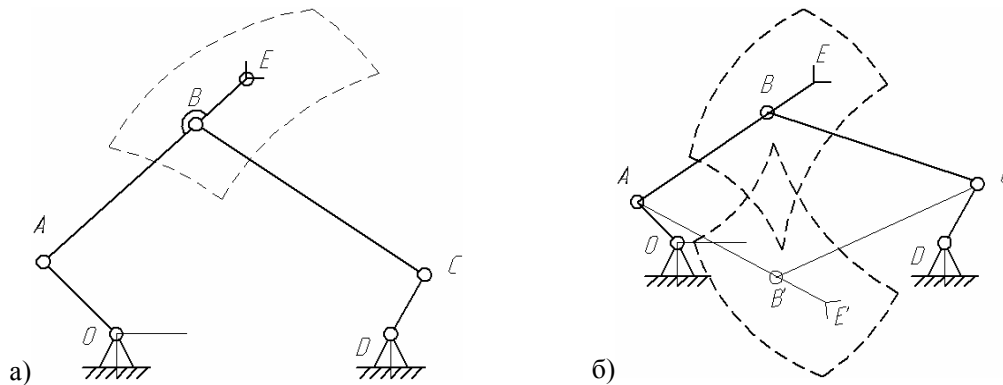


Рис. 5. Рабочая зона манипулятора

Введем дополнительный двигатель q_2 (выключив при этом двигатель на звене OA , т.е. $q_1 = \varphi_1$), тогда меняется структура механизма, а значит и особое положение (рис. 6).

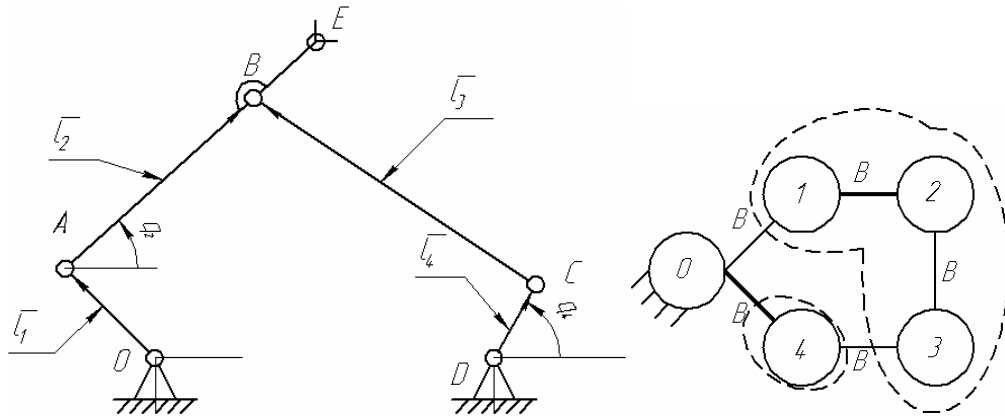


Рис. 6. Смена входной координаты q_1 на q_2

Проведем геометрический анализ измененного механизма. Размыкая кинематическую цепь в шарнире В, приведем замкнутую цепь к открытой цепи (аналогично механизму с входными координатами q_1 и q_4), получим:

$$\left. \begin{aligned} l_1 \cos \varphi_1 + l_3 \cos(\varphi_1 + \varphi_{13}) &= x_C - x_{AB}, \\ l_1 \sin \varphi_1 + l_3 \sin(\varphi_1 + \varphi_{13}) &= y_C - y_{AB}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Отсюда можно получить якобиан для такой системы:

$$J = \begin{vmatrix} l_1 \sin \varphi_1 & -l_3 \sin \varphi_3 \\ -l_1 \cos \varphi_1 & l_3 \cos \varphi_3 \end{vmatrix} = l_1 l_3 \sin(\varphi_1 - \varphi_3). \quad (9)$$

Таким образом, механизм попадает в особое положение при $\varphi_1 = \varphi_3 + \pi k$, то есть может пройти положение $\varphi_2 = \varphi_3 + \pi k$.

Одной из обязательных задач в механизмах роботов является решение обратной геометрической задачи.

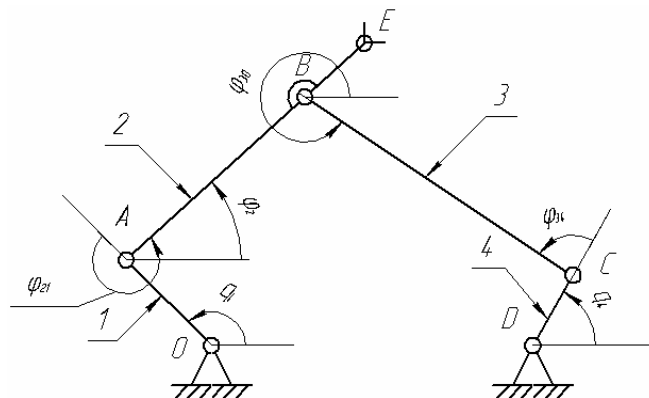


Рис. 7. Решение обратной задачи

Определим угловые координаты входных звеньев q_1 и q_4 , обеспечивающих попадание полюса E двухподвижного манипулятора в точку с заданными координатами x_E и y_E

(рис. 7). Неизвестный угол φ_{21} и искомую выходную координату q_1 получим из групповых уравнений (10):

$$\left. \begin{aligned} x_E &= x_0 + \ell_1 \cos q_1 + \ell_5 \cos(q_1 + \varphi_{21}) \\ y_E &= y_0 + \ell_1 \sin q_1 + \ell_5 \sin(q_1 + \varphi_{21}) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

откуда

$$\cos \varphi_{21} = \frac{(x_E - x_A)^2 + (y_E - y_A)^2 - \ell_1^2 - \ell_5^2}{2\ell_1\ell_5}, \quad (11)$$

$$\sin \varphi_{21} = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_{21}}$$

Из выражений (11) найдем два значения $\varphi_{21}^{(1)}, \varphi_{21}^{(2)}$.

Далее из уравнений замкнутого контура $OABCD$

$$\left. \begin{aligned} \ell_4 \cos q_4 + \ell_3 \cos(q_4 + \varphi_{34}) &= x_0 - x_D + \ell_1 \cos q_1 + \ell_2 \cos(q_1 + \varphi_{21}), \\ \ell_4 \sin q_4 + \ell_3 \sin(q_4 + \varphi_{34}) &= y_0 - y_D + \ell_1 \sin q_1 + \ell_2 \sin(q_1 + \varphi_{21}) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

получим

$$\cos \varphi_{34} = \frac{(x_B - x_D)^2 + (y_B - y_D)^2 - \ell_4^2 - \ell_3^2}{2\ell_4\ell_3}, \quad (13)$$

$$\sin \varphi_{34} = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_{34}}$$

и определим угол φ_{34} и входную координату q_4 . Здесь каждому значению $\varphi_{21}^{(1)}, \varphi_{21}^{(2)}$ и $q_1^{(1)}, q_1^{(2)}$ соответствует два значения φ_{34} и q_4 .

Таким образом, для одного положения точки E возможны четыре конфигурации механизма (рис. 8).

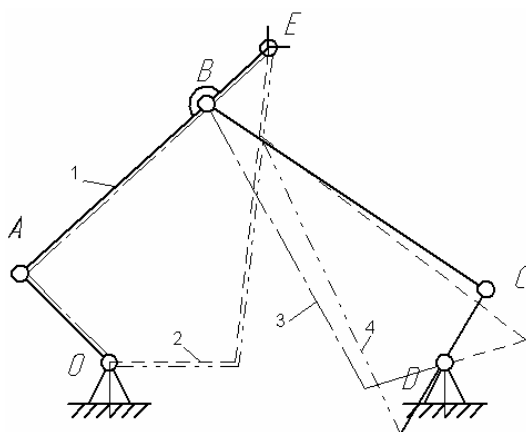


Рис. 8. Четыре возможных конфигурации манипулятора

Каждому виду конфигурации соответствует своя матрица Якоби и свое рабочее пространство. Определитель матрицы Якоби

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_E}{\partial q_1} & \frac{\partial x_E}{\partial q_4} \\ \frac{\partial y_E}{\partial q_1} & \frac{\partial y_E}{\partial q_4} \end{vmatrix} = \frac{AE \cdot l_1 l_4 \sin(\varphi_2 - q_1) \sin(\varphi_3 - q_4)}{l_2 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)} \quad (14)$$

позволяет получить два условия:

$$\begin{aligned} \sin(\varphi_2 - q_1) &= 0, \\ \sin(\varphi_3 - q_4) &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

определяющих границы между различными конфигурациями, и условие

$$\sin(\varphi_3 - \varphi_2) = 0, \quad (16)$$

задающее границу недостижимой области.

Эти алгоритмы решения данных задач были реализованы в компьютерной программе. На рис. 9, а показана схема механизма, точками представлена рабочая зона, ниже расположены кнопки управления механизмом для прохождения механизма через особое положение: при приближении к особому положению, необходимо включить дополнительный двигатель (управление входной координатой q_2). На рис. 9, б показаны возможные положения механизма (основной и пунктирной линиями) для попадания точки E выходного звена механизма в заданную точку.

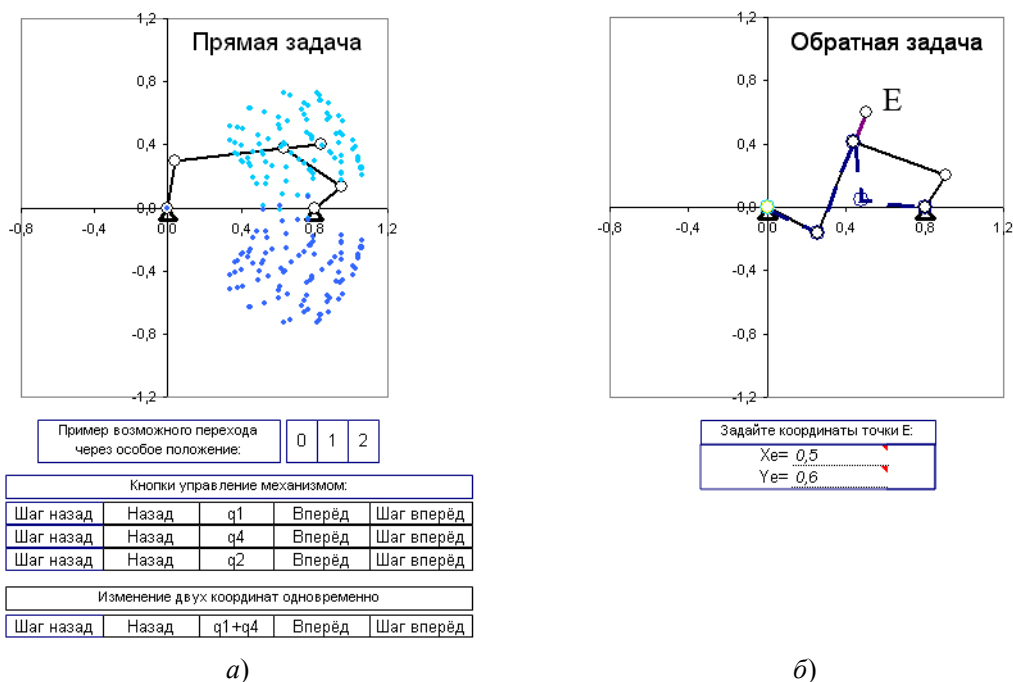


Рис. 9. Реализация алгоритмов в Excel

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Евграфов А.Н., Коловский М.З., Петров Г.Н.** Теория механизмов и машин: Учебное пособие для вузов – СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003.- 238 с.

Поступила в редакцию 08.12.2005
После доработки 18.01.2005