УДК 531

ЛЕ СУАН АНЬ, ФАМ ЧОНГ ДАНГ ШОН

ИСТОЛКОВАНИЕ ПРИНЦИПА ГАУССА ДЛЯ СИСТЕМ С КУЛОНОВЫМ ТРЕНИЕМ

Вводные предложения

Вопрос о распространении принципа Гаусса на систему с кулоновым трением впервые рассматривал Г. К. Пожарицкий [3]. Заранее предполагая, что нормальные реакции контактных связей с трением определяются единственно, т.е. парадоксы Пэнлеве отсутствуют, автор доказал для действительного движения существование изолированного минимума по ускорениям некоторой функции. Установлено, что всегда существует хотя бы одно такое движение. Следовательно, судя по формулировке принципа Гаусса, которую дал Г. К. Пожарицкий, даже в случае отсутствия парадоксов Пэнлеве открытым остается вопрос о единственности закона движения, т. е. о единственности решения задачи динамики систем с трением.

В работах Румянцева [5] установлен принцип Гаусса для систем с трением в двух формах (с явно входящими силами трения и без явно входящих реакций), а также доказана теорема о сравнении истинного, мыслимого и освобожденного движений.

В настоящей статье поставлена задача: осуществить первую идею Румянцева, построить формулировку принципа Гаусса с явно входящими силами трения и на основании этой формулировки вывести уравнения Аппеля для систем с трением. В отличие от работы Г. К. Пожарицкого, выведенная здесь функция Гаусса выражена явно через коэффициенты кулонова трения.

Силы трения, приложенные к отдельным материальным точкам механической системы

Согласно концепции Пэнлеве [4], если в механической системе имеется хотя бы одна пара трения, то эта сила трения через внутренние связи передается ко всем материальным точкам. В результате к i-той материальной точке будет приложена такая сила трения [4]:

$$\overline{\rho}_i = \overline{K}_i - \overline{K}_i^0 = M_i \overline{w}_i - M_i \overline{w}_i^0 = M_i \overline{a}_i . \tag{1}$$

Здесь $\overline{K}_i^0$ и $\overline{K}_i$ – реакции связей, действующие на i-тую материальную точку массы M_i соответственно при отсутствии и при наличии трения; ${}_i\overline{w}_i^0$, $\overline{w}_i$ – ускорение i-той точки в этих случаях; $\overline{a}_i = \overline{w}_i - \overline{w}_i^0$ – разность ускорения, вызываемая силой трения.

Таким образом, при составлении, например, уравнений Лагранжа первого рода для систем с кулоновым трением в первую очередь необходимо выразить силы трения $\overline{\rho}_i (i = 1, \ldots N)$ через коэффициенты кулонова трения.

В работах [4] Пэнлеве опубликовал систему $3N$ уравнений:

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \rho_{ix} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \rho_{ix} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \rho_{ix} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_k} \cdot \overline{K}_i , \\ \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} \rho_{ix} + \frac{\partial \phi_j}{\partial y_i} \rho_{iy} + \frac{\partial \phi_j}{\partial z_i} \rho_{iz} \right) = 0 \end{gathered} \tag{2}$$

с тремя неизвестными ρ_{ix}, ρ_{iy}, ρ_{iz} $i=1,...N)$. Здесь через ρ_{ix}, ρ_{iy}, ρ_{iz} обозначены проекции вектора $\overline{\rho_i}$ на неподвижные оси координат x, y, z; ϕ_j есть уравнения связей:

$$\phi_j = \phi_j(x_1, y_1, z_1, ..., x_N, y_N, z_N) \qquad (j = 1, 2, ..., 3N - n).$$

На основании уравнений (2) Пэнлеве доказал следующее свойство сил трения $\overline{\rho_i}$:

Теорема Пэнлеве: среди всех мыслимых систем сил $\overline{K_i}(i=1,...,N)$, элементарная работа которых равна τ, система сил $\overline{\rho_i}$ является такой, для которой сумма квадратов $\rho_1^2 + \rho_2^2 + ... + \rho_N^2$ является наименьшей:

$$\sum_{i=1}^{N} \rho_i^2 = \min \sum_{i=1}^{N} K_i^2. \tag{3}$$

Данное свойство сил трения ρ_i Пэнлеве считал «прекрасным свойством этих сил».

Обнаружив ошибку Пэнлеве при выводе системы уравнений (2) и при доказательстве данной теоремы, один из авторов [1] вывел следующую систему уравнений:

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \rho_{ix} + \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \rho_{iy} + \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \rho_{iz} \right) = -\sum_{\alpha=1}^{m} \varepsilon_\alpha \mu_\alpha \frac{\partial \upsilon_{\mathrm{T}\alpha}}{\partial \dot{q}_k} R_\alpha,$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{M_i} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} \rho_{ix} + \frac{\partial \phi_j}{\partial y_i} \rho_{iy} + \frac{\partial \phi_j}{\partial z_i} \rho_{iz} \right) = 0, \tag{4}$$

$$(k = 1, ..., n; j = 1, ..., 3N - n).$$

Как видно, система (4) отличается от уравнений Пэнлеве (2) наличием множителя $1/M_i$ во второй строке.

Более того, уравнения (4) позволяют, при их разрешении относительно переменных ρ_{ix}, ρ_{iy}, ρ_{iz}, выразить силы трения $\overline{\rho_i}(i=1,...,N)$ через коэффициенты кулонова трения.

В уравнениях (4) R_α – величина α-той нормальной реакции контактной связи, $\varepsilon_\alpha = \mathrm{sign} R_\alpha$, $\upsilon_{\mathrm{T}\alpha} = \left|\overline{\upsilon_{\mathrm{T}\alpha}}\right|$; $\overline{\upsilon_{\mathrm{T}\alpha}}$ – вектор скорости скольжения контактной связи, μ_α – коэффициент кулонова трения этой связи.

На основании уравнений (4) можно доказать следующее свойство сил трения ρ_i.

Теорема Ле Суан Аня. Среди всех систем мыслимых сил $\overline{K_i}(i=1,2,...N)$, элементарная работа которых равна работе сил кулонова трения, система реальных сил ρ_i является такой, для которой

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{M_i} \rho_i^2 = \min \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{M_i} K_i^2.$$

Уравнения (4) и упомянутую теорему будем называть соответственно уточненными уравнениями Пэнлеве и уточненной теоремой Пэнлеве. Заметим также, что ниже, при формулировке принципа Гаусса для систем с трением, будем использовать уравнения (4).

Формулировка принципа Гаусса для систем с кулоновым трением

На основании принципа наименьшего принуждения Гаусса Румянцев В.В. доказал для систем с трением следующий принцип: среди всех мыслимых ускорений действительные движения точек систем с трением обращают в минимум величину:

$$A=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}M_i\left(\frac{X_i}{M_i}+\frac{\rho_{ix}}{M_i}-\ddot{x}_i\right)^2+M_i\left(\frac{Y_i}{M_i}+\frac{\rho_{iy}}{M_i}-\ddot{y}_i\right)^2+M_i\left(\frac{Z_i}{M_i}+\frac{\rho_{iz}}{M_i}-\ddot{z}_i\right)^2, \qquad (5)$$

и наоборот, условия минимума этой величины по ускорениям, удовлетворяющим условиям связей, приводят к уравнениям движения. Здесь X_i, Y_i, Z_i – проекции задаваемой силы, действующей на i-ую материальную точку системы.

Величина A с точностью до множителя $(dt)^4$ совпадает с гауссовым принуждением $E = A(dt)^4$. Поэтому A назовем функцией принуждения.

При учете в (5) соотношения (1) можно представить функцию принуждения в виде

$$A=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}M_i\left(\frac{X_i}{M_i}+a_{ix}-\ddot{x}_i\right)^2+M_i\left(\frac{Y_i}{M_i}+a_{iy}-\ddot{y}_i\right)^2+M_i\left(\frac{Z_i}{M_i}+a_{iz}-\ddot{z}_i\right)^2. \qquad (6)$$

Для формулировки принципа Гаусса для систем с кулоновым трением преобразуем выражение (6) с учетом уравнений (4). Так, раскрывая скобки, найдем равенство:

$$\begin{gathered}A=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}M_i\left(\ddot{x}_i^2+\ddot{y}_i^2+\ddot{z}_i^2\right)-\sum_{i=1}^{N}\left(X_i\ddot{x}_i+Y_i\ddot{y}_i+Z_i\ddot{z}_i\right)-\\ -\sum_{i=1}^{N}M_i\left(a_{ix}\ddot{x}_i+a_{iy}\ddot{y}_i+a_{iz}\ddot{z}_i\right)+\ldots,\end{gathered} \qquad (7)$$

где многоточие означает члены, не зависящие от ускорений $\ddot{x}_i, \ddot{y}_i, \ddot{z}_i$.

Далее, чтобы выразить A через обобщенные ускорения, следует учесть в (7) равенства:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_i&=\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k\partial q_s}\dot{q}_k\dot{q}_s+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\ddot{q}_k,\\ \ddot{y}_i&=\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2 y_i}{\partial q_k\partial q_s}\dot{q}_k\dot{q}_s+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial q_k}\ddot{q}_k,\\ \ddot{z}_i&=\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2 z_i}{\partial q_k\partial q_s}\dot{q}_k\dot{q}_s+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\ddot{q}_k,\end{aligned} \qquad (8)$$

где n – число обобщенных координат.

При подстановке в (7) значений $\ddot{x}_i, \ddot{y}_i, \ddot{z}_i$, взятых согласно равенствам (8), получаем три слагаемых. Первое из них, после опускания членов, не зависящих от обобщенных ускорений $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, ..., \ddot{q}_n$, примет вид

$$U = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{sk}\ddot{q}_s\ddot{q}_k + \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}[s,k,r]\dot{q}_s\dot{q}_k\ddot{q}_r\,, \tag{9}$$

где A_{sk} – коэффициенты кинетической энергии; $[s,k,r]$ – символ Кристоффеля первого рода, U – энергия ускорений.

Второе слагаемое равно

$$\sum_{i=1}^{N}\left(X_i\ddot{x}_i + Y_i\ddot{y}_i + Z_i\ddot{z}_i\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}\left(X_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + Y_i\frac{\partial y_i}{\partial q_k} + Z_i\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right)\ddot{q}_k + \ldots = \sum_{k=1}^{n} Q_k\ddot{q}_k + \ldots\,, \tag{10}$$

где Q_k – обобщенная активная сила, приведенная к обобщенной координате q_k :

$$Q_k = \sum_{i=1}^{N} X_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + Y_i\frac{\partial y_i}{\partial q_k} + Z_i\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\,. \tag{11}$$

Величина $\sum_{k=1}^{n} Q_k\ddot{q}_k$ является работой активных сил на обобщенных ускорениях.

Третье слагаемое равно

$$\sum_{i=1}^{N} M_i(a_{ix}\ddot{x} + a_{iy}\ddot{y} + a_{iz}\ddot{z}) = -\sum_{i=1}^{n}\ddot{q}_k\sum_{\alpha=1}^{m}\varepsilon_\alpha\mu_\alpha\frac{\partial\upsilon_{\mathrm{T}\alpha}}{\partial\dot{q}_k}R_\alpha =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} S_k\ddot{q}_k + \ldots\,, \tag{12}$$

$$S_k = -\sum_{\alpha=1}^{m}\varepsilon_\alpha\mu_\alpha\frac{\partial\upsilon_{\mathrm{T}\alpha}}{\partial\dot{q}_k}R_\alpha\,. \tag{13}$$

Здесь S_k – обобщенная реакция связей, приведенная к обобщенной координате q_k ; m – число неидеальных контактных связей.

Величину $\sum_{k=1}^{n} S_k\ddot{q}_k$ будем называть работой силы кулонова трения (или работой реакций связей) на обобщенных ускорениях.

Заметим, что в формулах (10) – (12) не описаны члены, не зависящие от обобщенных ускорений.

На основании (7) – (12) вычисляем часть функции гауссового принуждения, зависящую от обобщенных ускорений:

$$A^* = U - \sum(Q_k + S_k)\ddot{q}_k\,. \tag{14}$$

Она представляет разность между энергией обобщенных ускорений и работой всех активных сил и сил трения на этих ускорениях. Судя по (7) и (8), условия минимума функции

A по ускорениям $\ddot{x}_i, \ddot{y}_i, \ddot{z}_i$ эквивалентны условиям минимума функции A^* по обобщенным ускорениям $\ddot{q}_k$. Отсюда придем к уравнениям Аппеля для систем с кулоновым трением:

$$\frac{\partial U}{\partial \ddot{q}_k} = Q_k + S_k . \tag{15}$$

При учете в (15) энергии ускорений, взятой согласно (9), получаем следующую систему n уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} A_{ks}\ddot{q}_k + \sum_{k=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}[k,t,s]\dot{q}_k\dot{q}_t = Q_s - \sum_{\alpha=1}^{m}\varepsilon_\alpha\mu_\alpha \frac{\partial \upsilon_{\mathrm{T}\alpha}}{\partial \dot{q}_s} R_\alpha = Q_s + S_s , \tag{16}$$

которые совпадают с уравнениями движения механических систем с кулоновым трением, выведенными в [1].

Таким образом, доказано, что для механических систем с кулоновым трением условие минимума функции принуждения приводит к уравнениям движения.

Докажем и обратное утверждение: действительные ускорения обращают функцию принуждения в минимум.

В самом деле, действительные ускорения должны удовлетворять уравнениям движения (16), но тогда выполняются и условия (15) и (14), в силу которых функция принуждения A имеет минимум.

Исходя из вышеизложенного, приходим к следующей формулировке принципа Гаусса для систем с кулоновым трением.

Формулировка принципа. Разность A^* между энергией обобщенных ускорений и работой всех задаваемых сил и сил кулонова трения на этих ускорениях для действительного движения меньше, чем такая разность для любого мыслимого движения, и, наоборот, условия минимума этой разности по ускорениям приводят к уравнениям движения; причем в случае отсутствия парадоксов Пэнлеве существует одно и только одно движение, удовлетворяющее указанным условиям, в парадоксальных случаях такое движение либо не существуют, либо неединственно.

Отмеченное подтверждает несостоятельность утверждения в [6] о том, что парадоксы Пэнлеве якобы могут быть разрешены при помощи принципа Гаусса.

Изложенный материал не противоречит результату исследования Пожарицкого [3], но его дополняет, так как через коэффициенты кулонова трения выражена зависящая от обобщенных ускорений часть гауссова принуждения, доказана не только достаточность, но и необходимость для действительного движения условий минимума принуждения, выяснен вопрос о существовании и единственности движения систем с кулоновым трением, удовлетворяющего этим условиям

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ле Суан Ань.** Динамика систем с кулоновым трением. – СПб: Нестор, 1999. – 298 с.
2. **Маркеев А. П.** Теоретическая механика. – М: Иж, 2001. – 591 с.
3. **Пожарицкий Г. К.** Распространение принципа Гаусса на системы с сухим трением. // ПММ, 1961. Т. 25, вып. 3, С. 391-406.
4. **Пэнлеве П.** Лекции о трении. – М.: ГИТТЛ, 1954. – 316 с.

5. **Румянцев В. В.** О системах с трением. // ПММ, 1961. т. XXV, вып. 6, С. 969-977.
6. **Скуридин М. А.** Динамика плоских механизмов с учетом трения. Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук. 1954. – 384 с.

Поступила в редакцию 18.12.2005
После доработки 31.01.2006