

## О СТРУКТУРНЫХ ГРУППАХ АССУРА

### Введение

В настоящей работе с точки зрения геометрической теории шарнирных устройств [1,2] рассматриваются так называемые структурные группы Ассура теории механизмов. Напомним принцип образования структурных схем механизмов, предложенный впервые Л.В. Ассуром в 1914 году [3]. *Схема любого механизма может быть составлена последовательным присоединением к ведущим звеньям групп звеньев с нулевой степенью подвижности относительно тех звеньев, к которым группа присоединяется.* Впоследствии этот принцип развивался преимущественно отечественными авторами, упомянем хотя бы И.И. Артоболевского [4, 5], В.В. Добровольского [6], С.Н. Кожевникова [7]. Из последних работ отметим книгу Э.Е. Пейсаха [8]. Следует заметить, что в англоязычной литературе понятие групп Ассура мало распространено. Так, из четырёх монографий, посвящённых кинематике механизмов [9, 10, 11, 12], группы Ассура упоминаются лишь в первой, и то вскользь, в литературном обзоре. В настоящей работе будет дано строгое определение групп Ассура для шарнирно-рычажных механизмов и приведён критерий (необходимое и достаточное условие) граф-схемы группы Ассура в плоском случае. Автор считает своим долгом поблагодарить рецензента статьи Э.Е. Пейсаха за ряд полезных замечаний и советов, способствовавших усовершенствованию текста.

Эта статья написана геометром. Автор отдаёт себе отчёт, что у специалистов по теории механизмов могут возникнуть болезненные терминологические затруднения: привычным для них словам придаётся несколько иной смысл. Чтобы по возможности избежать этих затруднений подробно опишем объект исследования. Отметим, что наша модель изначально не опирается на такие исходные для теории механизмов понятия как звено и кинематическая пара. Её исходные понятия — рычаг и шарнир. Итак, мы рассматриваем плоские конструкции, составленные из абсолютно жёстких прямолинейных стержней (рычагов), имеющих на своих концах отверстия. Можно считать, что в эти отверстия вставлены маленькие оси, вокруг которых стержни могут свободно вращаться без люфтов. Все рычаги конструкции лежат в одной или параллельных плоскостях, а оси перпендикулярны этой плоскости. Если такая ось закреплена в плоскости (играющей роль стойки), то мы называем её закреплённым шарниром. Если ось не закреплена в плоскости, то она называется свободным шарниром.

С точки зрения теории механизмов свободный шарнир может быть: обычной вращательной кинематической парой, если на ось надеты концы ровно двух рычагов; может оказаться так называемым совмещённым шарниром, если на ось надеты концы более двух рычагов; а может вовсе и не быть кинематической парой, если ось вставлена в конец всего лишь одного рычага. При этом всегда можно считать, что ось намертво вварена в один из рычагов, это не влияет на дальнейшие рассуждения. Закреплённые шарниры являются либо шарнирами в обычном смысле этого слова, либо совмещёнными шарнирами. Шарниры допускают всевозможные вращения сочленённых в них рычагов относительно друг друга и относительно стойки-плоскости. В нашей модели мы не учитываем, что этим вращениям может помешать пересечение одних рычагов с другими рычагами или же с осями конструкции. Аналогичную модель можно рассмотреть и в пространственном случае, только шарниры на этот раз будут сферическими. Конечно же, свойства пространственной модели значительно отличаются от свойств соответствующих конструкций «из железа». Ведь осуществить совмещённые сферические шарниры и избежать пересечения рычагов такой конструкции, хотя бы при ограниченном её движении, намного сложнее, чем в плоском случае. Тем не менее, такой подход даёт ряд преимуществ при описании геометрии рычажно-шарнирных конструкций. Во-первых, сопоставляя рычагам рёбра, а шарнирам — вершины графа, мы

сопоставим шарнирной конструкции её структурную граф-схему, в нашей терминологии — шарнирную структурную схему (ШСС). В отличие от часто используемых структурных схем, где звеньям сопоставляются вершины, а кинематическим парам — рёбра графа, конструкциям с совмещёнными шарнирами ШСС сопоставляется однозначно. С этим обстоятельством связано и удобство составления, исходя из ШСС, уравнений, описывающих конструкцию. При этом пространство переменных, описывающих конструкцию, есть пространство координат всех свободных шарниров, а каждому рычагу отвечает уравнение с этими переменными, задающее длину рычага.

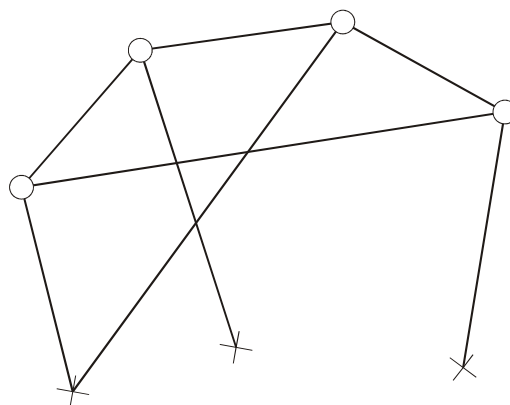


Рис. 1

Группой Ассура принято называть кинематическую цепь, степень подвижности которой относительно внешних кинематических пар равна нулю, и не содержащую меньших цепей с теми же свойствами. Внешние кинематические пары считаются неподвижными, они либо закреплены в стойке, либо принадлежат ведущим звеньям, либо принадлежат группам Ассура, выделенным из структуры механизма на предшествующих шагах её анализа. И.И. Артоболовским была разработана классификация структурных схем плоских механизмов на основе этого принципа и классификации групп Ассура, изложенная в [4, 5]. Однако она далека от математической ясности и законченности. Более того, методы построения структурных групп, идущие от Ассура (метод развития поводка и другие), по-видимому, не исчерпывают всего их многообразия. В приведённых Артоболовским примерах групп Ассура, кроме простейшего — двухповодковой группы, в графах ШСС имеются треугольные циклы. На рис. 1 показана нетривиальная группа Ассура, не содержащая треугольных циклов. На этом и на следующих рисунках закреплённые шарниры обозначены крестиками, а свободные — кружочками. Существуют и другие необычные примеры<sup>1</sup>.

Отметим, что известные примеры групп Ассура, содержащие многошарнирные звенья с числом шарниров большим двух, заведомо содержат треугольные циклы в отвечающей им граф-схеме. В качестве иллюстрации на рис. 2 слева изображена общепринятая структурная схема устройства с четырёхшарнирным звеном, а справа показана отвечающая ему

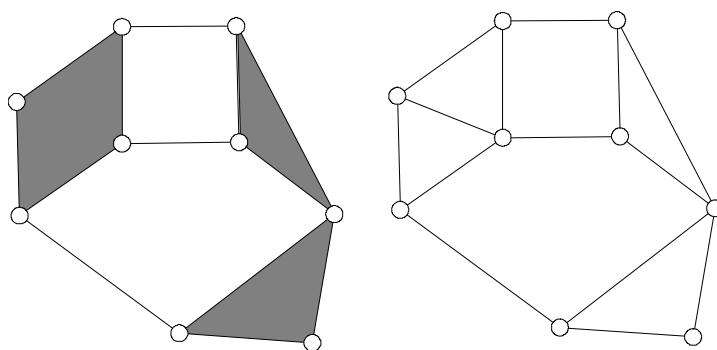


Рис. 2

<sup>1</sup> Э.Е. Пейсах указал автору, что группа Ассура на рис. 1 по существу содержится под номером 3 среди восьмизвенных групп в каталоге **Peisach E., Dresig H., Schönherr J.** Typ- und Masssynthese von ebenen Koppelgetrieben mit hoeheren Gliedgruppen (Zwischenbericht zum Fortsetzungsantrag). – DFG-Themennummer: Dr 234/7-1, TU Chemnitz, Professur Maschinendynamik / Schwingunglehre, Professur Getriebelehre, Chemnitz, 1998.

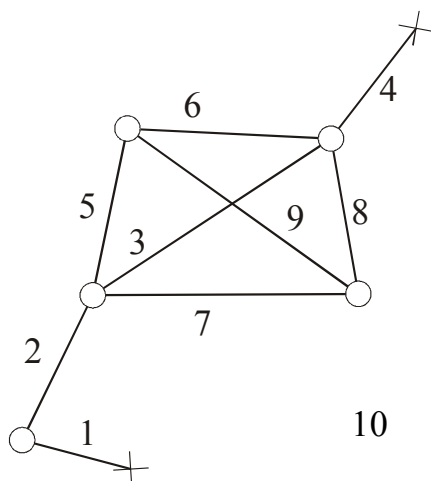


Рис. 3

ШСС. Чтобы получить ШСС, к многошарнирному звену добавляются рычаги, соединяющие его шарниры и порождающие треугольные циклы в граф-схеме. При этом образуются совмещённые но, так сказать, замороженные шарниры. Ведь рычаги, образующие треугольный цикл, заведомо нельзя вращать один относительно другого вокруг шарниров их соединяющих. Отметим, что появление таких замороженных шарниров происходит всегда при переходе от обычной схемы с многошарнирным звеном к соответствующей ШСС.

В последнее время появились компьютерные программы, автоматически выполняющие структурный анализ механизмов. Однако они также не лишены недостатков. Так, свободно распространяемая программа Structural Analyzer, описанная в статье [13], по-видимому, не учитывает возможного наличия так называемых пассивных связей. В результате эта программа приписывает механизму с двумя степенями свободы и пассивной связью, ШСС которого приведена на рис. 3, всего лишь одну степень свободы. Поскольку Structural

Analyzer работает со схемой механизма, в которой рычагам как звеньям отвечают вершины графа, а кинематическим парам — его рёбра, то, разумеется, приходится переходить от нашей схемы к таковой. Поскольку устройство содержит совмещённые шарниры, то ему отвечает не одна такая структурная схема. Одна из них изображена на рис. 4, где каждому рычагу, пронумерованному цифрой на рис. 3, сопоставлена вершина графа — кружок, содержащий соответствующую цифру. Вершина под номером 10 отвечает стойке.

### Плоский случай

Начнём с формализации понятия шарнирной структурной схемы (ШСС), о которой мы уже говорили. Шарнирной структурной схемой (ШСС) или граф-схемой мы называем

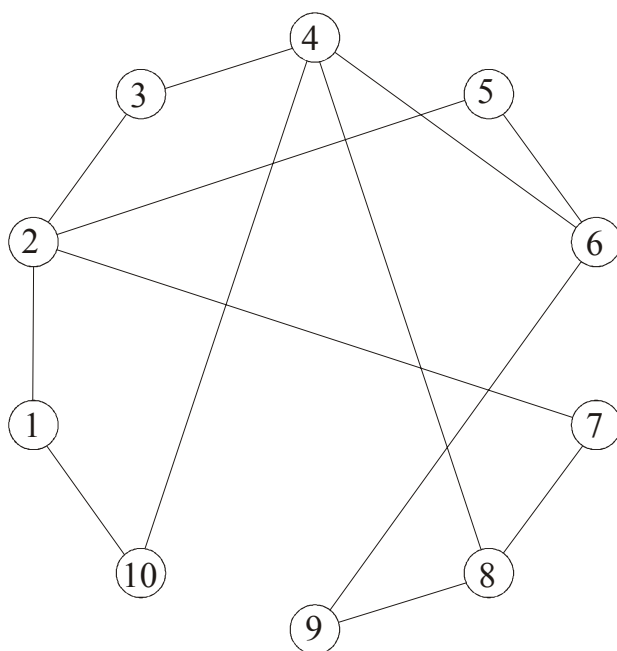


Рис. 4

[1] абстрактный связный граф  $G(V, E)$  без петель и кратных рёбер с вершинами двух видов: закреплёнными (они отвечают закреплённым шарнирам) и свободными, отвечающими незакреплённым шарнирам. Рёбра шарнирной схемы — отрезки, соединяющие её вершины между собой, — отвечают рычагам шарнирной конструкции. Пусть  $V_1 = \{v_1, \dots, v_m\}$  — совокупность свободных, а  $V_2 = \{v_{m+1}, \dots, v_{m+n}\}$  — совокупность закреплённых вершин,  $V = V_1 \cup V_2$ . Отметим, что на граф  $G(V, E)$  накладывается два естественных требования: он не содержит рёбер, соединяющих пары закреплённых вершин, и его подграф, состоящий из свободных вершин и соединяющих их между собой рёбер, связан. Если не выполнено второе условие, то шарнирное устройство распадается на несколько

независимых устройств. Допуская вольность речи, иногда будем называть вершины графа  $G(V, E)$  шарнирами, а его рёбра — рычагами. Поэтому, хотя автор и считает, что ШСС является одной из возможных формализаций принятого понятия структурной схемы механизма для рассматриваемых объектов, он использует этот особый термин. Терминология автора не является произвольной, а продиктована желанием ввести ясность в вопросы теории шарнирных устройств, непосредственно связанные с геометрией.

Рассмотрим ШСС в плоскости. Шарнирная структурная схема называется правильной, если число степеней свободы  $s$  шарнирных устройств (механизмов и ферм) общего положения с этой схемой можно считать по формуле  $s = 2m - r$ . Устройствам общего положения в англоязычной литературе отвечает термин “generic”. Устройства общего положения образуют во множестве всех устройств открытое всюду плотное подмножество. Его дополнение — совокупность особых устройств со специально подобранными длинами рычагов и положениями закреплённых шарниров, для которых число степеней свободы иное. Это дополнение представляет собой собственное алгебраическое подмножество множества всех устройств. Если, кроме правильности выполнено равенство  $r = 2m$  (а  $s = 0$ ), то ШСС называется изостатической. Шарнирное устройство общего положения с изостатической ШСС есть статически определяемая шарнирная ферма. Далее, говоря о числе степеней свободы устройства с данной ШСС, мы будем иметь в виду устройства общего положения.

Для ШСС в плоскости известен как критерий правильности, так и критерий изостатичности. На рис. 5 приведён простейший пример неправильной шарнирной схемы. Для неё выполнено необходимое условие  $r = 2m$  изостатичности. Однако шарнирное устройство общего положения с такой схемой является механизмом, который можно свободно вращать в плоскости вокруг закреплённого шарнира  $v_4$ .

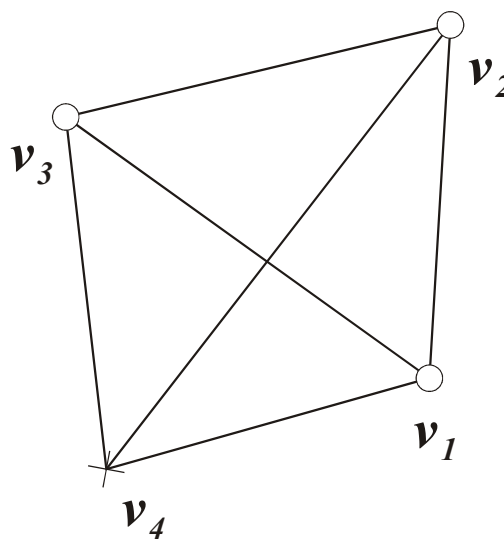


Рис. 5

Сформулируем критерий правильности ШСС на плоскости, выведенный в работе [1] на основе результатов работы [14]. Дополним граф  $G = G(V, E)$  ШСС до графа  $G' = G'(V, E')$ , добавив к нему  $t$  рёбер: все рёбра  $v_{m+1}v_{m+i}$  с  $2 \leq i \leq n$ , и все рёбра  $v_{m+2}v_{m+i}$  с  $3 \leq i \leq n$  при  $n \geq 3$ . Таким образом, число добавленных рёбер  $t = 0$ , если  $n = 1$ , и  $t = 2n - 3$ , если  $n > 1$ . Отметим также, что в графе  $G'$  вершины не разделяются на закреплённые и свободные, а все — одного типа. На рис. 6 изображена граф-схема (ШСС)  $G_1$  шарнирного четырёхзвенника и её дополненный граф  $G_1'$ , а также ШСС  $G_2$  восьмизвенной группы Ассур вместе с соответствующим дополненным графом  $G_2'$ .

**ТЕОРЕМА 1.** Шарнирная структурная схема правильна на плоскости тогда и только тогда, когда отвечающий ей дополненный граф  $G'$  обладает тем свойством, что для произвольной совокупности (пусть  $k > 0$ ) его рёбер число  $l$  инцидентных им вершин удовлетворяет неравенству  $k \leq 2l - 3$ .

Чтобы получить отсюда критерий изостатичности ШСС, достаточно добавить условие  $2m = r$ . Заметим, что критерий не выполняется для ШСС, приведённой на рис. 5. Действительно, для этой граф-схемы  $G(V, E)$  имеем  $|E| = 6 > 5 = 2 \times 4 - 3 = 2|V| - 3$ .

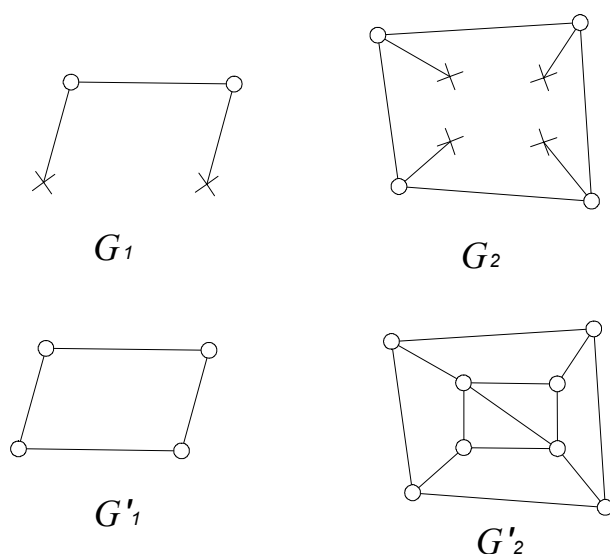


Рис. 6

Анализируя структурные группы, мы будем считать закреплёнными шарнирами те шарниры, которые в этом контексте называют обычно внешними.

Рассмотрим ещё один пример. Пусть  $v_a v_b$  — ведущее звено плоского шарнирного механизма с одной степенью свободы,  $v_a$  — закреплённый шарнир, и  $v_a v_b$  — единственный рычаг, инцидентный в ШСС шарниру  $v_a$ . Отбрасывая от ШСС  $G$  этого механизма ребро  $v_a v_b$  вместе с вершиной  $v_a$  и заменяя свободный шарнир  $v_b$  на закреплённый, получаем изостатическую ШСС  $G_b$ . Пусть у  $G_b$  имеется изостатическая граф-подсхема  $G'_b$ , содержащая закреплённый шарнир  $v_b$ , никакая собственная часть которой, также содержащая  $v_b$ , не является изостатической. Тогда схему  $G'_b$  мы назовём *структурной группой относительно шарнира  $v_b$* . Возникает естественный вопрос: может ли структурная группа относительно одного из закреплённых шарниров не являться таковой относительно другого закреплённого шарнира? Положительный ответ на этот вопрос даёт схема рис. 7. Шарнир  $v_3$  в этой схеме получен закреплением шарнира ведущего звена механизма с одной степенью свободы. Относительно закреплённого шарнира  $v_3$  эта граф-схема является структурной группой, поскольку не содержит меньших изостатических подсхем, включающих  $v_3$ . Относительно же закреплённого шарнира  $v_4$  она не является структурной группой, ибо имеется её изостатическая подсхема, содержащая шарниры  $v_2, v_4, v_5$  и рычаги  $v_2 v_4, v_2 v_5$ .

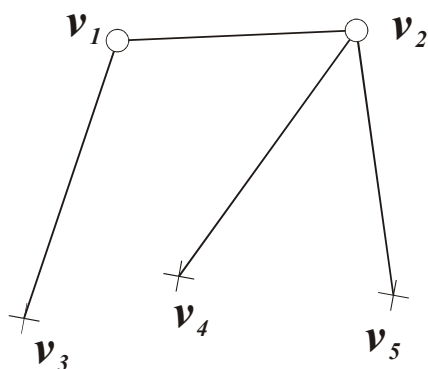


Рис. 7

Рассмотренный пример указывает на то, что в определении группы Ассура неразумно считать, что она не должна содержать только изостатических подсхем, включающих закреплённый (внешний) шарнир, выбранный на ведущем звене. То есть *группой Ассура* мы называем *изостатическую ШСС, не обладающую меньшими изостатическими подсхемами, содержащими закреплённые шарниры (возможно, не все её закреплённые шарниры)*. Из теоремы 1 вытекает следующий критерий группы Ассура.

**ТЕОРЕМА 2.** Шарнирная структурная схема с графом  $G$  является группой Ассур на плоскости тогда и только тогда, когда для нее выполнено равенство  $r = 2t$ , отвечающий ей дополненный граф  $G'$  удовлетворяет условию теоремы 1, и для произвольного собственного подграфа  $G^*$  графа  $G$ , содержащего  $t^*$  свободных шарниров и  $r^* > 1$  ребер, выполнено неравенство  $r^* < 2t^*$ .

*Доказательство.* Первые два условия являются необходимыми и достаточными условиями изостатичности граф-схемы  $G$ . Выполнение последнего условия необходимо и достаточно для отсутствия собственных изостатических граф-подсхем в случае правильности граф-схемы  $G$ . (В этом случае все условия, налагаемые рычагами на координаты шарниров, независимы между собой.) Правильность же граф-схемы  $G$  вытекает из её изостатичности.

В качестве примера приведём схему на рис. 8 с четырьмя свободными  $v_1, v_2, v_3, v_4$  (подграф, порождённый ими, является полным) и двумя закреплёнными  $v_5, v_6$  шарнирами и восемью рычагами. Для этой схемы не выполнено лишь второе условие теоремы, и она является схемой шарнирного механизма с пассивной связью. В качестве таковой можно считать, например, связь, налагаемую рычагом  $v_3v_4$ .

Руди Пенне [15] исследовал незакреплённые минимальные (то есть без собственных изостатических подграфов) изостатические графы на плоскости и установил, в частности, что они могут иметь любое число вершин, отличное от 4, 5 и 7. Граф-схема группы Ассур, в отличие от минимальных изостатических графов, может содержать изостатические подграфы. Например, граф-схема на рис. 9 содержит изостатический подграф:  $v_1, v_2, v_3, v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1$ . Опираясь на этот результат Пене, несложно получить следующую теорему.

**ТЕОРЕМА 3.** На плоскости существуют группы Ассур с любым числом шарниров, отличным от 1, 2, 4 и 5.

*Доказательство.* Рассматривая шарнирные схемы с числом шарниров, равным 1, 2, 4 и 5, среди которых имеется хотя бы один свободный, легко установить, что среди них нет групп Ассур на плоскости. Группа Ассур с семью шарнирами изображена на рис. 1. Для любого из остальных натуральных чисел  $N$  вследствие теоремы Пене имеется минимальный изостатический незакреплённый граф  $G(N)$  с числом вершин, равным  $N$ . Выбрасывая из графа  $G(N)$  какое-либо ребро  $v_i v_j$  и считая вершины  $v_i, v_j$  отвечающими закреплённым шарнирам, а все остальные его вершины — отвечающими свободным шарнирам, мы получим граф  $\tilde{G}(N)$  с вершинами двух сортов. Этот граф, содержащий  $N$  шарниров, является изостатической закреплённой шарнирной схемой, не содержащей изостатических подсхем, следовательно, является группой Ассур в плоскости. Теорема доказана.

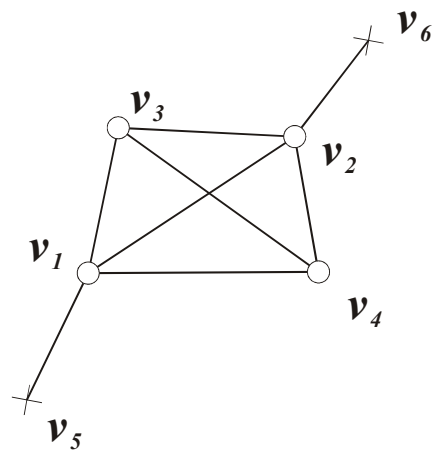


Рис. 8

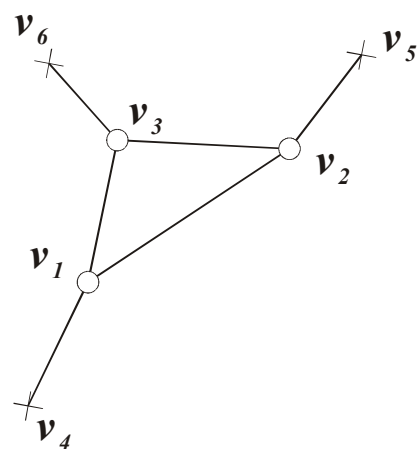


Рис. 9

Пространственный случай

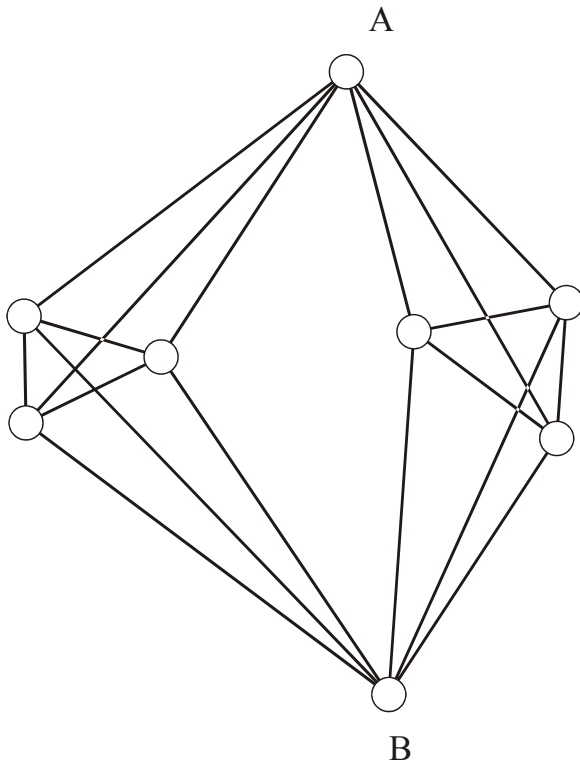


Рис. 10

Для шарнирных граф-схем в трёхмерном пространстве в настоящее время не известно ни критерия правильности, ни критерия изостатичности. В случае незакреплённых граф-схем разыскание этих критериев в терминах характеристик графа представляет собой центральную задачу комбинаторной теории жёсткости [16]. Отметим только, что двумерный критерий не обобщается естественным образом на трёхмерный случай. В трёхмерном случае роль неравенства  $k \leq 2l - 3$  играет неравенство  $k \leq 3l - 6$ , и необходимое условие изостатичности незакреплённой ШСС выглядит так:  $k = 3l - 6$ . Примером, указывающим на его недостаточность, является шарнирный механизм на рис. 10, так называемый двойной банан. Для произвольной совокупности из  $k > 2$  его рёбер число  $l$  инцидентных им вершин удовлетворяет неравенству  $k \leq 2l - 6$ . Число его шарниров равно 8, а рычагов — 18; и  $18 = 3 \times 8 - 6$ . Однако, он не изостатичен, поскольку не является фермой, две его жёстких половины можно вращать относительно друг друга вокруг оси  $AB$ .

Можно попытаться распространить полученный для плоскости критерий группы Ассура на трёхмерный случай. А именно, поставить вопрос о справедливости следующего предложения. Дополним граф  $G = G(V, E)$  ШСС до графа  $G' = G'(V, E)$ , добавив к нему  $t$

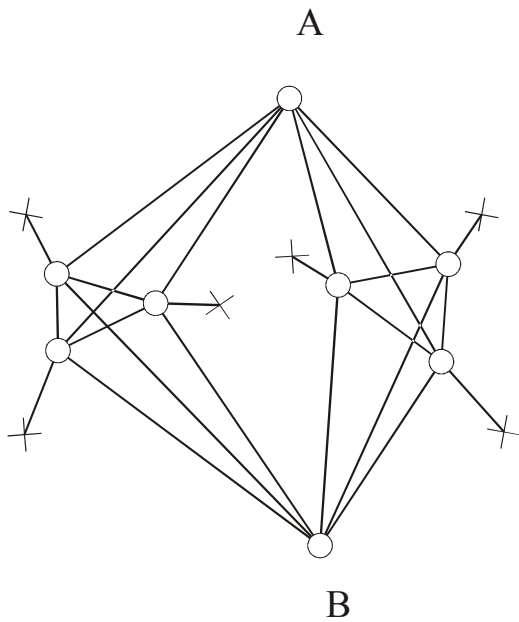


Рис. 11

штук рёбер: все рёбра  $v_{m+1}v_{m+i}$  с  $2 \leq i \leq n$ , все рёбра  $v_{m+2}v_{m+i}$  с  $3 \leq i \leq n$  при  $n \geq 3$ , и все рёбра  $v_{m+3}v_{m+i}$  с  $4 \leq i \leq n$  при  $n \geq 4$ .

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ.** Шарнирная структурная схема  $G$  является группой Ассура в  $R^3$  тогда и только тогда, когда  $r = 3t$ , отвечающий ей граф  $G'$  обладает тем свойством, что для произвольной совокупности  $k > 2$  его рёбер число  $l$  инцидентных им вершин удовлетворяет неравенству  $k \leq 3l - 6$ , а для произвольного собственного подграфа  $G^*$  графа  $G$  с  $r^*$  ребрами и  $t^*$  вершинами выполнено строгое неравенство  $r^* < 3t^*$ .

Однако это предложение неверно, что показывает пример на рис. 11. Граф-схема на этом рисунке получается закреплением двойного банана: каждый его шарнир, исключая шарниры  $A$  и

$B$ , прикрепляется рычагом к стойке. Полученная граф-схема удовлетворяет условиям нашего предложения. Однако шарнирное устройство общего положения с такой граф-схемой является, как нетрудно проверить, механизмом с одной степенью свободы, а, следовательно, не является группой Ассура.

### Заключение

Основной результат статьи содержится в теореме 2 и предшествующем ей определении структурной группы Ассура на языке шарнирных структурных схем (ШСС). Критерий того, что плоская шарнирная структурная схема является группой Ассура, содержащийся в теореме 2, предполагает проверку всевозможных собственных подграфов графа  $G$  ШСС и дополненного графа  $G'$  на выполнение простых условий относительно чисел их вершин и рёбер. Эта проверка легко может быть механизирована и проводится на компьютере.

Проиллюстрируем непосредственное применение критерия на примере десятизвенной структурной схемы, указанной автору Э.Е. Пейсахом и изображённой на рисунке 11 слева. Отбрасывая от этой схемы звенья с номерами 1, 2, 3, 4, получим шестизвенную схему. Добавляя к последней схеме два ребра, соединяющие противоположные вершины четырёхшарнирных звеньев, мы получим собственный подграф  $G^*$  шарнирной структурной схемы, отвечавшей исходной структурной схеме. На рис. 12 он изображён справа. Число  $m^*$  свободных вершин (кружочков) графа  $G^*$  равно 9, а число  $r^*$  его рёбер равно 18. Таким образом,  $r^* = 2m^*$ , и критерий теоремы 2 не выполнен. Следовательно, исходная структурная схема не является группой Ассура в плоскости.

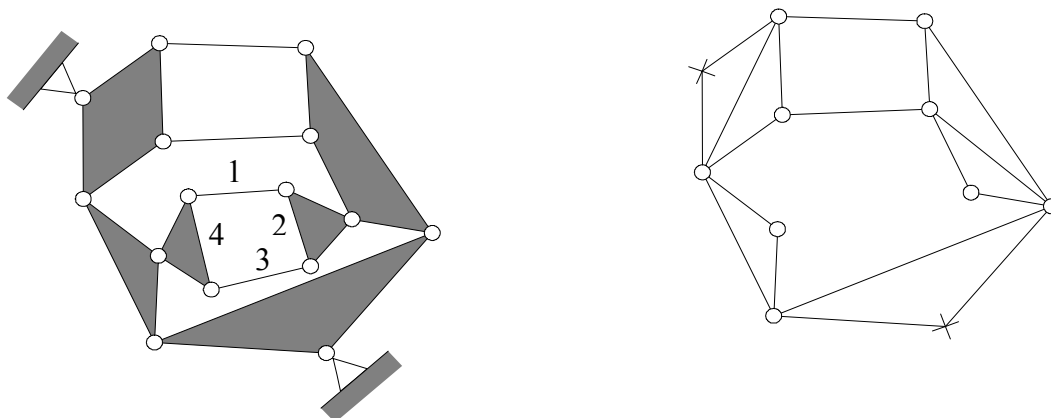


Рис. 12

В заключение хочу поблагодарить моего сына Фёдора за изготовление рисунков к статье.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ковалев М.Д. Геометрическая теория шарнирных устройств. // Известия РАН. Серия математическая. 1994. т.58. № 1. С.45-70.
2. Ковалев М.Д. Вопросы геометрии шарнирных устройств и схем. // Вестник МГТУ. Серия Машиностроение 2001. № 4. С. 33-51.



3. **Ассур Л.В.** Исследование плоских стержневых механизмов с низшими параметрами с точки зрения их структуры и классификации. – М.: Изд-во АН СССР, 1952.-529 с.
4. **Артоболевский И.И.** Структура кинематика и кинетостатика многозвенных плоских механизмов. М.- Л., ОНТИ, 1939 г.
5. **Артоболевский И.И.** Теория механизмов. – М.: Наука, 1965.-776 с.
6. **Добровольский В.В., Артоболевский И.И.** Структура и классификация механизмов. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1939.
7. **Кожевников С.Н.** Основания структурного синтеза механизмов. – Киев: Наукова думка, 1979.-232 с.
8. **Пейсах Э.Е.** Структура и кинематика пространственных рычажных механизмов. – Изд-во СПГТУТД, 2004.- 215 с.
9. **Hunt К.Н.** Kinematic geometry of mechanisms. N.Y.: Clarendon Press, 1978.
10. **Hartenberg R.S., Denavit J.** Kinematic synthesis of linkages. 1964.
11. **Angeles J.** Rational Kinematics. / Springer Tracts in Natural Philosophy, v.34, 1988.
12. **Dijksman E.A.** Motion Geometry of Mechanisms. Cambridge, 1976.
13. **Карловский Д.А., Вишнеvский С.В., Семёнова Н.С.** Программа структурного анализа механизмов // Теория механизмов и машин. 2005. т. 3. №1. С.67-69.
14. **Asimov L., Roth B.** The rigidity of Graphs. II. // Journal of Math. analysis and appl, 1979, v.68, № 1, p. 171-190.
15. **Penne R.** Isostatic bar and joint frameworks in the plane with irreducible pure conditions. // Discrete applied Mathematics. 1994. v.55. p.37-57.
16. **Graver J., Servatius B., Servatius H.** Combinatorial Rigidity. American Mathematical Society, Providence, 1993.

*Поступила в редакцию 16.11.2005  
После доработки 30.01.2006*