

ДИНАМИКА МАШИННОГО АГРЕГАТА С УПРУГИМ ВАЛОМ И КВАДРАТИЧЕСКОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ ИСПОЛНИТЕЛЬНОГО МЕХАНИЗМА (часть II)¹

7. Дифференциальные уравнения движения на этапе совместного раскручивания

Движение частей агрегата при отсутствии скольжения во фрикционной муфте описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} J\ddot{\varphi}_2 &= a - b\dot{\varphi}_2^2 - c(\varphi_2 - \varphi_3), \\ J_3\ddot{\varphi}_3 &= c(\varphi_2 - \varphi_3) - c_{2np}\varphi_3^2, \end{aligned} \quad (47)$$

где $J = J_2 + J_3$.

Скольжение во фрикционной муфте появится при выполнении условия

$$|T_M - c(\varphi_2 - \varphi_3)| > T, \quad (48)$$

и движение агрегата будет описываться системой дифференциальных уравнений (3).

Система (47) преобразуется сложением и вычитанием с последующим умножением каждого уравнения на J_2 и J_3 , а также введением новых переменных θ и ψ :

$$\varphi_2 - \varphi_3 = \theta, \quad (49)$$

$$J\varphi_2 + J_3\varphi_3 = (J + J_3)\psi. \quad (50)$$

Таким образом, система записывается в виде

$$(J + J_3)\ddot{\psi} = a - b\dot{\varphi}_2 - c_{2np}\dot{\varphi}_3^2, \quad (51)$$

$$JJ_3\ddot{\theta} + c(J + J_3)\theta = J_3a - J_3b\dot{\varphi}_2 + Jc_{2np}\dot{\varphi}_3^2, \quad (52)$$

причем

$$\varphi_2 = \psi + \frac{J_3}{(J + J_3)}\theta, \quad \dot{\varphi}_2 = \dot{\psi} + \frac{J_3}{(J + J_3)}\dot{\theta}, \quad (53)$$

$$\varphi_3 = \psi - \frac{J}{(J + J_3)}\theta, \quad \dot{\varphi}_3 = \dot{\psi} - \frac{J}{(J + J_3)}\dot{\theta}. \quad (54)$$

Подставляем (53) и (54) в правые части уравнений (51) и (52) и после несложных преобразований находим

¹ Часть I была опубликована в выпуске журнала № 1(5) за 2005 г.

$$\begin{aligned} (J + J_3)\ddot{\psi} + c_{2np}\dot{\psi}^2 + b\dot{\psi} &= a - \mu(f_1\dot{\theta} + f_2\dot{\psi}\dot{\theta} + f_3\dot{\theta}^2), \\ \ddot{\theta} + k_2^2\theta &= \mu(d_0 + d_1\dot{\psi} + d_2\dot{\theta} + d_3\dot{\psi}^2 + d_4\dot{\psi}\dot{\theta} + d_5\dot{\theta}^2), \end{aligned} \quad (55)$$

причем $k_2^2 = \frac{c(J + J_3)}{JJ_3}$, μ -малый положительный параметр, для которого принято

$$\begin{aligned} \mu = c_{2np} \ll 1, \quad f_1 &= \frac{b}{c_{2np}} \frac{J_3}{J + J_3}, \quad f_2 = -\frac{2J}{J + J_3}, \quad f_3 = \frac{J^2}{(J + J_3)^2}, \quad d_0 = \frac{a}{Jc_{2np}}, \quad d_1 = -\frac{b}{Jc_{2np}}, \\ d_2 &= -\frac{b}{c_{2np}} \frac{J_3}{J(J + J_3)}, \quad d_3 = \frac{1}{J_3}, \quad d_4 = -\frac{2J}{J_3(J + J_3)}, \quad d_5 = \frac{J^2}{J_3(J + J_3)^2}. \end{aligned}$$

8. Определение закона движения на этапе совместного раскручивания

Аналитическое решение системы дифференциальных уравнений (3) было показано в части I, а решение системы (55) будем искать методами последовательного приближения, малого параметра и эквивалентной линеаризации.

Зададим начальные условия движения:

при $t = 0$

$$\begin{aligned} \psi(0) &= \frac{J}{J + J_3} \varphi_2(t_s) + \frac{J_3}{J + J_3} \varphi_3(t_s), \quad \dot{\psi}(0) = \frac{J}{J + J_3} \dot{\varphi}_2(t_s) + \frac{J_3}{J + J_3} \dot{\varphi}_3(t_s), \\ \theta(0) &= \varphi_2(t_s) - \varphi_3(t_s), \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\varphi}_2(t_s) - \dot{\varphi}_3(t_s), \end{aligned} \quad (56)$$

где t_s - продолжительность предыдущего этапа раскручивания агрегата - этапа пробуксовки.

Решение первого уравнения системы (55) будем искать в виде ряда по степеням малого параметра, с точностью до членов, содержащих μ в первой степени:

$$\psi(t) = \psi_0(t) + \mu\psi_1(t), \quad (57)$$

откуда

$$\dot{\psi}(t) = \dot{\psi}_0(t) + \mu\dot{\psi}_1(t), \quad \ddot{\psi}(t) = \ddot{\psi}_0(t) + \mu\ddot{\psi}_1(t). \quad (58)$$

Подставляем (58) в первое уравнение (55), приравняем нулю члены уравнения, свободные от μ , а также коэффициент в скобке при μ и находим

$$(J + J_3)\ddot{\psi}_0 + c_{2np}\dot{\psi}_0^2 + b\dot{\psi}_0 = a, \quad (59)$$

$$(J + J_3)\dot{\psi}_1 + 2c_{2np}\dot{\psi}_0\dot{\psi}_1 + b\dot{\psi}_1 = -f_1\dot{\theta} - f_2\dot{\psi}_0\dot{\theta} - f_3\dot{\theta}^2. \quad (60)$$

Решение будем искать при начальных условиях (56), которые будут выполнены, если функции $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$ будут найдены так, что

$$\begin{aligned}\psi_0(0) = \psi(0) &= \frac{J}{J+J_3}\varphi_2(t_s) + \frac{J_3}{J+J_3}\varphi_3(t_s), \quad \psi_1(0) = 0, \\ \dot{\psi}_0(0) = \dot{\psi}(0) &= \frac{J}{J+J_3}\dot{\varphi}_2(t_s) + \frac{J_3}{J+J_3}\dot{\varphi}_3(t_s), \quad \dot{\psi}_1(0) = 0.\end{aligned}\tag{61}$$

Дифференциальное уравнение (59) приведем к виду

$$\ddot{\psi}_0 = C - B\dot{\psi}_0 - A\dot{\psi}_0^2,\tag{62}$$

причем $C = \frac{a}{J+J_3}$, $B = \frac{b}{J+J_3}$, $A = \frac{c_{2np}}{J+J_3}$.

Дифференциальное уравнение (62) решается в квадратурах, так как $\ddot{\psi}_0 = f(\dot{\psi}_0)$ и с учетом (61) находим

$$\dot{\psi}_0 = \frac{p-B}{2A},\tag{63}$$

$$\psi_0 = \psi(0) + \frac{1}{A} \ln \left[\frac{1}{2} \left(\frac{B+2A\dot{\psi}(0)}{p} + 1 \right) \right] + \frac{p-B}{2A} t.\tag{64}$$

Здесь мы пренебрегли членами, в которые входит e^{-pt} , где $p = \sqrt{B^2 + 4AC}$, так как $e^{-pt} \rightarrow 0$. Надо отметить, что $\dot{\psi}_0$ – это угловая скорость установившегося движения агрегата без учета упругости валов. Действительно, из условия $T_M = T_{Wnp}$, т.е. $a - b\omega_{ycr} = c_{2np}\omega_{ycr}^2$, находим

$$\omega_{ycr} = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ac_{2np}}}{2c_{2np}}.$$

Такой же результат может быть получен и в случае, если в выражение (63) подставить значения коэффициентов из (62), т.е.

$$\dot{\psi}_0(t) = \omega_{ycr}.\tag{65}$$

Чтобы решить второе дифференциальное уравнение в (55), подставляем в него (65), и оно принимает вид

$$\ddot{\theta} + k_2^2\theta = \mu(e_0 + e_1\dot{\theta} + e_2\dot{\theta}^2),\tag{66}$$

где $e_0 = \frac{1}{Jc_{2np}}(a - b\omega_{ycr}) + \frac{1}{J_3}\omega_{ycr}^2$, $e_1 = -\frac{1}{(J+J_3)}\left(\frac{b}{c_{2np}}\frac{J_3}{J} + 2\omega_{ycr}\frac{J}{J_3}\right)$, $e_2 = \frac{J^2}{J_3(J+J_3)^2}$.

Решение уравнения (66) будем искать методом эквивалентной линеаризации (метод Крылова и Боголюбова) [1], так как движение машинного агрегата на этапе совместного

раскручивания можно считать близким к установившемуся движению. В соответствии с методом эквивалентной линеаризации ищем $\theta(t)$ и $\dot{\theta}(t)$ в виде

$$\theta = h \sin \delta, \quad \dot{\theta} = h \omega' \cos \delta, \quad (67)$$

где $\delta = \omega' t + \alpha$, $h = h(t)$ и $\omega' = [h(t)]$ – медленно меняющиеся функции времени, $\alpha = \text{const}$.

Подставив в правую часть уравнения (66) выражения (67), запишем

$$f(\dot{\theta}) = e_0 + e_1 h \omega' \cos \delta + e_2 h^2 \omega'^2 \cos^2 \delta.$$

Вычислим определенные интегралы

$$I_1 = \int_0^{2\pi} f(\dot{\theta}) \cos \delta d\delta = e_1 \pi h \omega',$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} f(\dot{\theta}) \sin \delta d\delta = 0.$$

Используя результаты для I_1 и I_2 , вычисляем n и ω' по формулам

$$n = -\frac{\mu}{2\pi h \omega'} I_1 = -\mu \frac{e_1}{2}, \quad \omega'^2 = k_2^2 - \frac{\mu}{\pi h} I_2 = k_2^2.$$

Решаем дифференциальные уравнения

$$\frac{d\delta}{dt} = \omega', \quad \frac{dh}{dt} = -nh.$$

Полученные результаты подставим в (67) и, учитывая начальные условия (56), находим

$$\dot{\theta} = e^{-nt} k_2 C_2 \cos(k_2 t + C_1), \quad (68)$$

$$\theta = e^{-nt} C_2 \sin(k_2 t + C_1), \quad (69)$$

где $C_1 = \text{arctg}\left(\frac{\theta(0)k_2}{\dot{\theta}(0)}\right)$, $C_2 = \sqrt{\theta^2(0) + \left(\frac{\dot{\theta}(0)}{k_2}\right)^2}$.

Подставляем (65), (68) в (60) и приводим полученное уравнение к каноническому виду

$$\ddot{\psi}_1 + \frac{2c_{2\text{пр}}\omega_{\text{уст}} + b}{J + J_3} \dot{\psi}_1 = -e^{-nt} g_1 \cos(kt) - e^{-2nt} g_2 \cos^2(kt), \quad (70)$$

где $g_1 = \frac{(bJ_3 - 2\omega_{\text{уст}}c_{2\text{пр}}J)\dot{\theta}(0)}{c_{2\text{пр}}(J + J_3)^2}$, $g_2 = \frac{J^2}{(J + J_3)^3} \dot{\theta}^2(0)$ и на первом этапе принято $\theta(0) \approx 0$.

Решение уравнения (70), соответствующее начальным условиям (61), может быть представлено в виде интеграла Дюамеля

$$\psi_1 = \int_0^t \Phi(t-\tau)q(\tau) d\tau, \quad (71)$$

где $q(\tau) = -e^{-n\tau}g_1 \cos(k_2\tau) - e^{-2n\tau}g_2 \cos^2(k_2\tau)$, а $\Phi(t)$ – решение соответствующего однородного уравнения с условиями: $\Phi(0) = 0$ и $\dot{\Phi}(0) = 1$, т.е.

$$\Phi(t) = -\frac{1}{\rho_2}(1 - e^{\rho_2 t}),$$

где $\rho_2 = -\frac{b^2 + 4ac_{2np}}{J + J_3}$.

Раскрывая интеграл Дюамеля:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \int_0^t \Phi(t-\tau)q(\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{\rho_2}g_1 \int_0^t e^{-n\tau}(1 - e^{\rho_2(t-\tau)})\cos(k_2\tau)d\tau + \frac{1}{\rho_2}g_2 \int_0^t e^{-2n\tau}(1 - e^{\rho_2(t-\tau)})\cos^2(k_2\tau)d\tau = \\ &= K_0 - e^{\rho_2 t}K_1 + e^{-nt}(K_2 \sin k_2 t + K_3 \cos k_2 t) + e^{-2nt}(K_4 + K_5 \sin 2k_2 t + K_6 \cos 2k_2 t), \end{aligned} \quad (72)$$

получим

$$\dot{\psi}_1 = e^{\rho_2 t}M_1 + e^{-nt}(M_2 \sin k_2 t + M_3 \cos k_2 t) + e^{-2nt}(M_4 + M_5 \sin 2k_2 t + M_6 \cos 2k_2 t). \quad (73)$$

В выражениях (72) и (73) принято: $K_0 = \frac{1}{\rho_2} \left[g_1 \frac{n}{n^2 + k_2^2} + g_2 \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} + \frac{n}{n^2 + k_2^2} \right) \right]$,

$$K_1 = -\frac{1}{\rho_2} \left[g_1 \frac{\rho_2 + n}{(\rho_2 + n)^2 + k_2^2} + g_2 \frac{1}{2} \left(\frac{(\rho_2 + 2n)}{(\rho_2 + 2n)^2 + 4k_2^2} + \frac{1}{(\rho_2 + 2n)} \right) \right],$$

$$K_2 = \frac{1}{\rho_2} g_1 k_2 \left(\frac{1}{n^2 + k_2^2} - \frac{1}{(\rho_2 + n)^2 + k_2^2} \right), \quad K_3 = \frac{1}{\rho_2} g_1 \left(-\frac{n}{n^2 + k_2^2} + \frac{\rho_2 + n}{(\rho_2 + n)^2 + k_2^2} \right),$$

$$K_4 = \frac{1}{\rho_2} g_2 \left(-\frac{1}{4n} + \frac{1}{2(\rho_2 + 2n)} \right), \quad K_5 = \frac{1}{\rho_2} g_2 k_2 \left(\frac{1}{4n^2 + k_2^2} - \frac{1}{(\rho_2 + 2n)^2 + 4k_2^2} \right),$$

$$K_6 = \frac{1}{\rho_2} g_2 \left(-\frac{1}{4} \frac{n}{n^2 + k_2^2} + \frac{1}{2} \frac{\rho_2 + 2n}{(\rho_2 + 2n)^2 + 4k_2^2} \right), \quad M_1 = \rho_2 K_1, \quad M_2 = -k_2 K_3 - n K_2,$$

$$M_3 = k_2 K_2 - n K_3, \quad M_4 = -2n K_4, \quad M_5 = -2(k_2 K_6 + n K_5), \quad M_6 = 2(k_2 K_5 + n K_6).$$

Для определения искомых законов изменения угловых скоростей ω_2 и ω_3 используем полученные результаты (65), (68), (73) и, учитывая начальные условия (56), а также (53) и (54), получим

$$\omega_2 = \omega_{уст} + e^{-nt} \frac{J_3}{J + J_3} k C_2 \cos(k_2 t + C_1) + \mu \left[e^{\rho_2 t} M_1 + e^{-nt} (M_2 \sin k_2 t + M_3 \cos k_2 t) + e^{-2nt} (M_4 + M_5 \sin 2k_2 t + M_6 \cos 2k_2 t) \right], \quad (74)$$

$$\omega_3 = \omega_{уст} - e^{-nt} \frac{J}{J + J_3} k_2 C_2 \cos(k_2 t + C_1) + \mu \left[e^{\rho_2 t} M_1 + e^{-nt} (M_2 \sin k_2 t + M_3 \cos k_2 t) + e^{-2nt} (M_4 + M_5 \sin 2k_2 t + M_6 \cos 2k_2 t) \right]. \quad (75)$$

Анализ выражений (74) и (75) показывает, что ω_2 и ω_3 с увеличением времени t стремятся к $\omega_{уст}$.

Крутящий момент T_t , действующий на упругий вал, определяется выражением

$$T_t = c(\varphi_2 - \varphi_3) = c\theta = e^{-nt} c C_2 \sin(k_2 t + C_1). \quad (76)$$

9. Пример

Полученные результаты проиллюстрированы численным примером с использованием технической характеристики пресс-автомата МРА-1РМ из первой части представленного исследования.

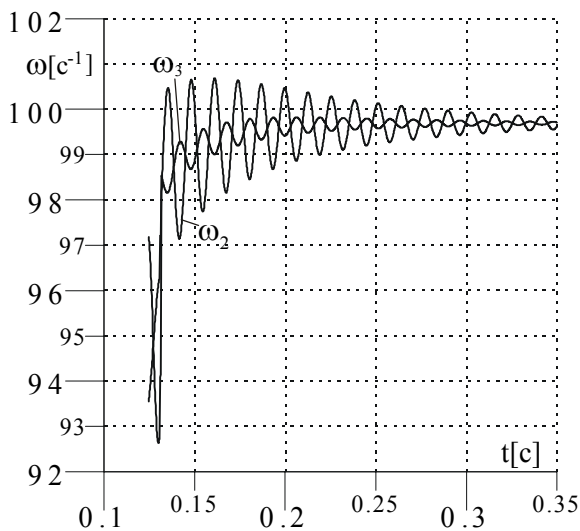


Рис. 5. Изменение угловых скоростей

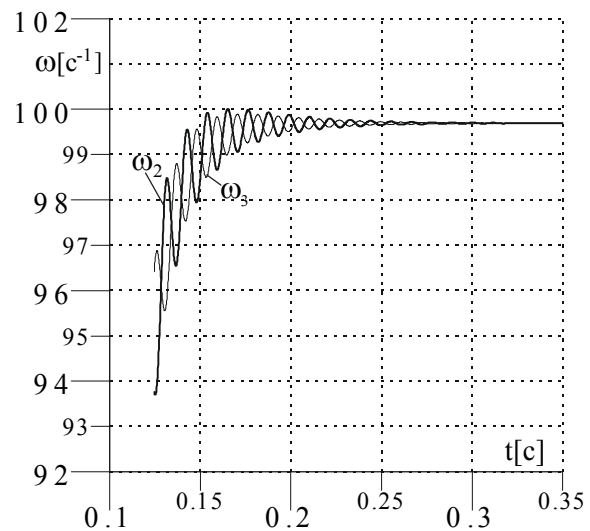


Рис. 6. Изменение угловых скоростей

Изменения угловых скоростей ω_2 , ω_3 на этапе совместного раскручивания, определенные при одинаковых начальных условиях представленным в работе методом и численным интегрированием с помощью многошагового метода Хеминга четвертого порядка, по-

казаны на рис. 5 и на рис. 6. На рис. 7 даны угловые скорости машинного агрегата на всем интервале разбега, а на рис. 8 приведены графики нагрузки T_t зубчатой передачи, определенной приближенным аналитическим методом и численным решением.

Как видно из представленных рисунков, сходимость приближенных и точных решений хорошо видна, но отличается от предыдущего этапа. Это объясняется использованием только первого приближения на этапе интегрирования системы дифференциальных уравнений движения динамической модели машинного агрегата.

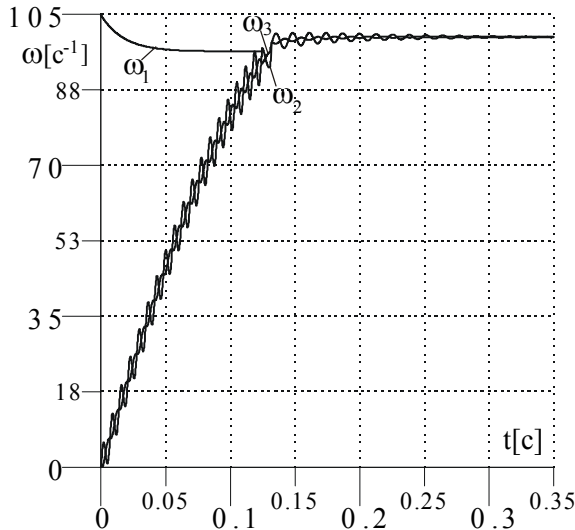


Рис. 7. Изменение угловых скоростей

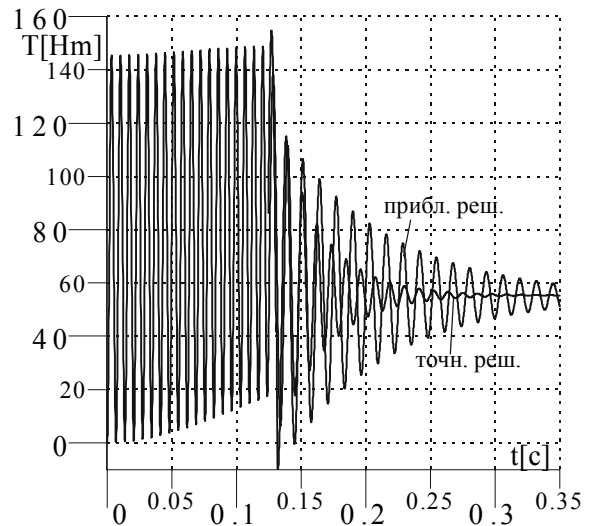


Рис. 8. Изменение крутящего момента

10. Выводы

Получены приближенные аналитические решения дифференциальных уравнений движения машинного агрегата. Показана сходимость аналитических и численных решений. Аналитические результаты позволяют анализировать влияние упруго-инерционных характеристик агрегата на динамику переходных процессов.

Для крутящего момента упругого вала T_t использована формула

$$T_t = c(\varphi_2 - \varphi_3) = c\theta.$$

В этом выражении жесткость вала c является функцией механических характеристик, аксиальных и радиальных размеров вала.

Относительный угол закручивания вала θ на этапе пробуксовки муфты с довольно высокой точностью (рис.9) можно выразить его первым приближением (25)

$$\theta = a + b \cos k_1 t + \sum_{m=1}^n c_m \cos(2mk \omega t).$$

Подставляя выражения для a, b, c_m из формулы (26) в (25), для относительного угла θ получаем:

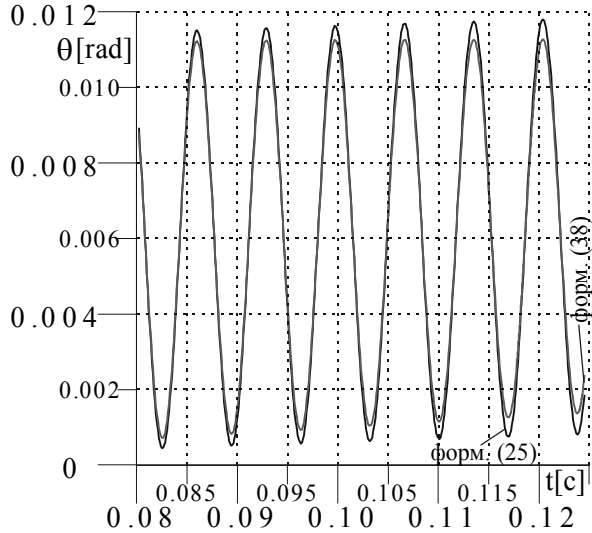


Рис. 9. Изменение относительного угла θ на этапе пробуксовки

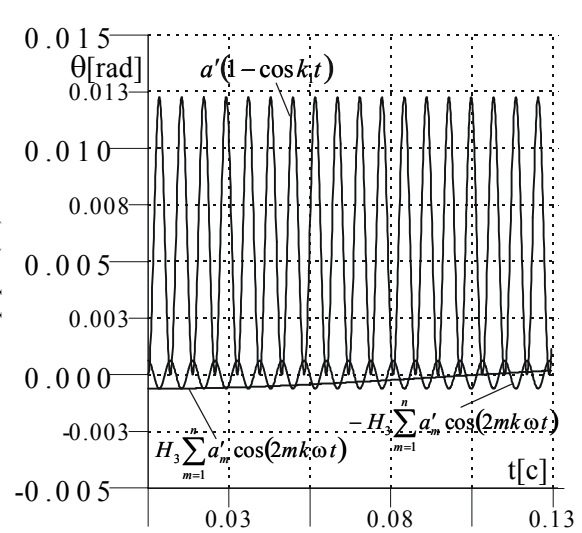


Рис. 10. Изменение относительного угла θ на этапе совместного раскручивания

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{T}{c} \underbrace{\left(\frac{J_3}{J_2 + J_3} + \frac{a_0}{2} \frac{J_2}{J_2 + J_3} \right)}_{a'} \left(1 - \cos \sqrt{\frac{c(J_2 + J_3)}{J_2 J_3}} t \right) + \\ &+ \frac{T}{J_3} \sum_{m=1}^n \frac{a_m}{\underbrace{\frac{c(J_2 + J_3)}{J_2 J_3} - \frac{4m^2 T c_{2np}}{(J_2 + J_3)^2}}_{a'_m}} \cos \left(2m \frac{c_{2np}}{J_2 + J_3} \sqrt{\frac{T}{c_{2np}}} t \right) - \\ &- \frac{T}{J_3} \sum_{m=1}^n \frac{a_m}{\underbrace{\frac{c(J_2 + J_3)}{J_2 J_3} - \frac{4m^2 T c_{2np}}{(J_2 + J_3)^2}}_{a'_m}} \cos \sqrt{\frac{c(J_2 + J_3)}{J_2 J_3}} t = \\ &= a'(1 - \cos k_1 t) + H_3 \sum_{m=1}^n a'_m \cos(2mk \omega t) - H_3 \sum_{m=1}^n a'_m \cos(k_1 t). \end{aligned}$$

Из последней записи видно, что амплитуда θ главным образом зависит от первого слагаемого a' , а частота k_1 , которая связана с сопротивлением усталости вала и зубчатой передачи, является функцией c, J_2, J_3 .

На втором этапе движения, как видно из (69), максимальная амплитуда относительно-го угла θ зависит от начальных условий $\theta(0), \dot{\theta}(0)$ и частоты $k_2 = \sqrt{\frac{c(J + J_3)}{JJ_3}}$.

11. Заключение

В представленном исследовании аналитическим путем изучена динамика разбега машинного агрегата с управляемой фрикционной муфтой между двигателем и исполнительным механизмом. Асинхронный электродвигатель с короткозамкнутым ротором раскручен до своей синхронной угловой скорости, а исполнительный механизм имеет квадратическую механическую характеристику и приводится в движение из состояния покоя. С помощью методов последовательных приближений, малого параметра, эквивалентной линеаризации определены законы движения машины на двух этапах его разбега: этапа пробуксовки (скольжение во фрикционной муфте) и этапа совместного раскручивания. Представлена методика вычислений. Найден динамический крутящий момент, действующий на трансмиссионный вал на обоих этапах. Теоретические результаты проиллюстрированы численным моделированием конкретного технического примера, для этого создана программа на языке Fortran. Полученные аналитические результаты сопоставлены с результатами численного интегрирования системы дифференциальных уравнений движения агрегата многошаговым методом Хеминга четвертого порядка.

Предлагаемый подход и полученные результаты могут быть использованы при динамическом анализе и синтезе машинных агрегатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. - М.: Физматгиз, 1963.- 463с.
2. **Бъчваров Ст.Н., Златанов В.Д., Делчева-Атанасова С.Г., Янчев И.Г.** Динамика машинного агрегата с упругим валом и линейной характеристикой исполнительного механизма. // Теория механизмов и машин. 2004. т. 2. №1. С. 62-74.
3. **Градштейн И.С., Рыжик И.М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - М.: Наука, 1971.-1108 с.
4. **Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.** Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям (приложение в механике, точные решения). - М.: Наука, 1993.- 462 с.
5. **Корн Г., Т.Корн.** Справочник по математике для научных работников и инженеров. - М.: Наука, 1973.-832 с.
6. **Лойцянский Л.Г., Лурье А.И.** Курс теоретической механики, часть II. - М.: ОГИЗ, 1948.- 580 с.

*Поступила в редакцию 23. 08. 2004
После доработки 31.08.2005*