

ОСОБЕННОСТИ КИНЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА МЕХАНИЗМОВ С ВНУТРЕННИМИ ВХОДАМИ

В работе [3] рассматривался геометрический анализ плоских рычажных механизмов. *Прямая задача кинематического анализа* таких механизмов заключается в определении их *кинематических параметров* - скоростей и ускорений звеньев и отдельных точек по заданным входным координатам и их первым двум производным. *Обратная задача кинематического анализа* состоит в определении входных координат и их производных по заданным кинематическим параметрам.

Пусть выходные звенья механизма характеризуются функциями положения

$$x_s = \Pi_s(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (s = 1, 2, \dots, m).$$

Дифференцируя эти функции дважды по времени, получим

$$\dot{x}_s = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \Pi_s}{\partial q_k} \dot{q}_k \quad (s = 1, 2, \dots, m);$$

$$\ddot{x}_s = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \Pi_s}{\partial q_k} \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \frac{\partial^2 \Pi_s}{\partial q_k \partial q_r} \dot{q}_k \dot{q}_r.$$

Для механизма с одной степенью подвижности имеем

$$\dot{x}_s = \Pi'_s(q) \dot{q} \quad (s = 1, 2, \dots, m);$$

$$\ddot{x}_s = \Pi'_s(q) \ddot{q} + \Pi''_s(q) \dot{q}^2.$$

Если $\dot{q} = const$, то

$$\dot{x}_s = \Pi'_s(q) \dot{q} = x'_s(q) \dot{q} \quad (s = 1, 2, \dots, m);$$

$$\ddot{x}_s = \Pi''_s(q) \dot{q}^2 = x''_s(q) \dot{q}^2.$$

Из полученных выражений видно, что задача определения скоростей и ускорений звеньев и их точек сводится к определению первых и вторых частных производных от функций положения по входным координатам. Эти производные, зависящие только от геометрических параметров кинематической схемы механизма, называются *первыми и вторыми геометрическими передаточными функциями* механизма (в одноподвижных механизмах – *аналогами скоростей и ускорений*). Они определяются из уравнений геометрического анализа.

В данной статье приведены примеры, которые рассматриваются на практических занятиях и при выполнении курсовых работ по ТММ в СПбГПУ.

Пример 1. Произведем геометрический и кинематический анализ шарнирного четырехзвенника с внутренним входом q (рис.1). Определим геометрические и кинематические параметры механизма, если $q = 60^\circ$; $\dot{q} = 0,5 \text{ 1/c}$; $\ddot{q} = 0,5 \text{ 1/c}^2$; $l_2 = AB = 0,4 \text{ м}$; $l_3 = BC = 0,8 \text{ м}$; $l_4 = CD = 0,6 \text{ м}$; $x_D = AD = 0,2\sqrt{3} \text{ м}$; $y_D = 0$; $x_A = y_A = 0$.

Рассматриваемый механизм является одноподвижной трехзвенной структурной группой. Введем групповые координаты φ_2 и φ_3 , характеризующие положения звеньев 2 и 3 относительно стойки механизма. Групповые уравнения механизма запишем в виде

$$\left. \begin{aligned} l_3 \cos \varphi_3 - l_4 \cos(\varphi_3 + q) &= x_D - x_A - l_2 \cos \varphi_2, \\ l_3 \sin \varphi_3 - l_4 \sin(\varphi_3 + q) &= y_D - y_A - l_2 \sin \varphi_2. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

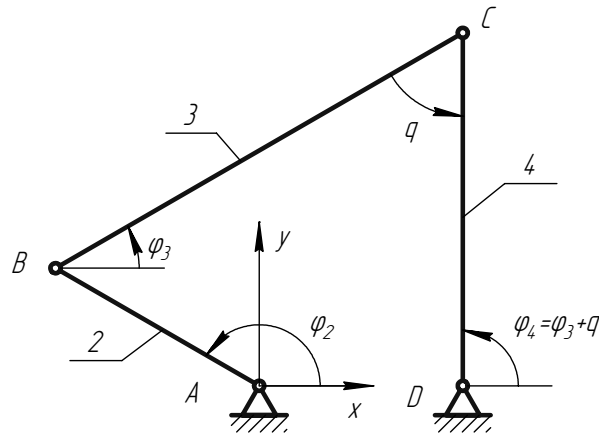


Рис. 1

Возведя обе части уравнений (1) в квадрат и складывая их, приходим к уравнению вида

$$a \cos \varphi_2 + b \sin \varphi_2 = c, \quad (2)$$

или

$$\cos(\varphi_2 - \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \sin(\varphi_2 - \alpha) = \pm \sqrt{1 - \cos^2(\varphi_2 - \alpha)},$$

где

$$a = 2l_2(x_D - x_C); \quad b = 2l_2(y_D - y_C); \quad c = l_2^2 - l_3^2 - l_4^2 + 2l_3l_4 \cos q + (x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2;$$

$$\cos \alpha = a / \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \sin \alpha = b / \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Для заданного $q = 60^\circ$ получаем: $\cos(\varphi_2 - \alpha) = -\sqrt{3}/2$; $\sin(\varphi_2 - \alpha) = \pm 0,5$; $\alpha = 0$.

Полагая φ_2 известным, определим из системы из системы уравнений (1):

$$\cos \varphi_3 = \frac{(\ell_3 - \ell_4 \cos q)(x_D - x_A - \ell_2 \cos \varphi_2) - \ell_4 \sin q (y_D - y_A - \ell_2 \sin \varphi_2)}{(\ell_3 - \ell_4 \cos q)^2 + (\ell_4 \sin q)^2} = \begin{cases} 0,866; \\ 0,466, \end{cases}$$

$$\sin \varphi_3 = \frac{(\ell_3 - \ell_4 \cos q)(y_D - y_A - \ell_2 \sin \varphi_2) + \ell_4 \sin q (x_D - x_A - \ell_2 \cos \varphi_2)}{(\ell_3 - \ell_4 \cos q)^2 + (\ell_4 \sin q)^2} = \begin{cases} 0,5; \\ 0,885. \end{cases}$$

Таким образом, групповые уравнения (1) имеют два решения, которым соответствуют две конфигурации механизма (рис.2): $ABCD$, при которой $\varphi_2^{(1)} = 150^\circ$; $\varphi_3^{(1)} = 30^\circ$; $\varphi_4^{(1)} = \varphi_3^{(1)} + q = 90^\circ$, и $AB'C'D$ (в этом случае $\varphi_2^{(2)} = 210^\circ$; $\varphi_3^{(2)} = 61,204^\circ$; $\varphi_4^{(2)} = 121,204^\circ$).

В данном механизме возможен переход из положения $ABCD$ в положение $AB'C'D$ без его разборки. Для этого нужно сначала уменьшить угол q , опустить точку B ниже линии AC , а затем восстановить угол q . Переход от одного из возможных положений в другое сопровождается прохождением через особые положения механизма AB^*C^*D или $AB^{**}C^{**}D$ (см. рис.2). В механизме особым положением принято называть то положение, при котором функциональный определитель (якобиан)

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial F_1}{\partial \varphi_3} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial F_2}{\partial \varphi_3} \end{vmatrix} = l_2 [l_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2) - l_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2 + q)] \quad (3)$$

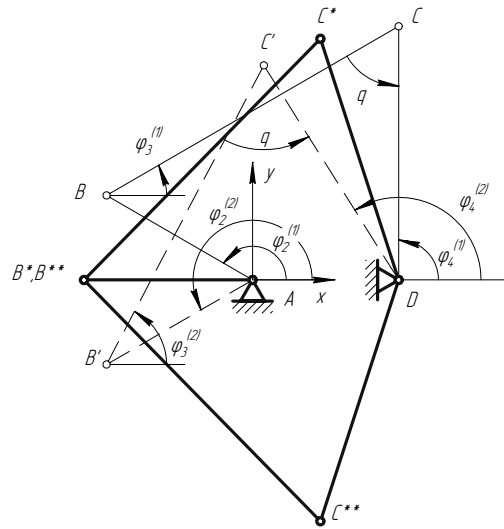


Рис. 2

обращается в нуль, где

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= l_2 \cos \varphi_2 + l_3 \cos \varphi_3 - l_4 \cos(\varphi_3 + q) - x_D - x_A = 0, \\ F_2 &= l_2 \sin \varphi_2 + l_3 \sin \varphi_3 - l_4 \sin(\varphi_3 + q) - y_D - y_A = 0. \end{aligned} \right\}$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках (3), имеет следующий геометрический смысл: оно представляет собой проекцию ломаной BCD на направление, перпендикулярное линии AB . Определитель (3) обращается в нуль в тех положениях, где проекция ломаной линии BCD равна нулю (в этот момент «пассивные» шарниры A, B и D располагаются на одной прямой).

Дифференцируя по q групповые уравнения (1), получим

$$\left. \begin{aligned} -l_2 \sin \varphi_2 \varphi_2' + [-l_3 \sin \varphi_3 + l_4 \sin(\varphi_3 + q)] \varphi_3' &= -l_4 \sin(\varphi_3 + q), \\ l_2 \cos \varphi_2 \varphi_2' + [l_3 \cos \varphi_3 - l_4 \cos(\varphi_3 + q)] \varphi_3' &= l_4 \cos(\varphi_3 + q), \end{aligned} \right\}$$

откуда по правилу Крамера для рассматриваемого положения найдем

$$\varphi_2' = \frac{J\varphi_2'}{J} = 6; \quad \varphi_3' = \frac{J\varphi_3'}{J} = 3,$$

где

$$J\varphi_2' = -l_3 l_4 \sin q; \quad J\varphi_3' = l_2 l_4 \sin(\varphi_3 - \varphi_2 + q) = l_2 l_4 \sin(\varphi_4 - \varphi_2).$$

Поскольку $\varphi_4 = \varphi_3 + q$, то $\varphi_4' = J\varphi_3' / J = \varphi_3' + 1 = 4$, где

$$J\varphi_4' = l_2 l_3 \sin(\varphi_4 - \varphi_2 - q) = l_2 l_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2).$$

Необходимое условие существования экстремума функции $\varphi_2^{(1)}(q)$:

$$J\varphi_2' = 0; \quad \sin q = 0; \quad q = k \cdot 180^\circ \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

выполняется, когда звенья 3 и 4 лежат на одной прямой (рис.3,а).

Экстремуму функции $\varphi_4^{(1)}(q)$ соответствует условие:

$$J\varphi_4' = 0; \quad \sin(\varphi_3 - \varphi_2) = 0; \quad \varphi_3 = \varphi_2 + k \cdot 180^\circ \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

при котором звенья 3 и 2 лежат на одной прямой (рис.3,б).

Аналогично для функции $\varphi_3^{(1)}(q)$ справедливо условие (рис.3,в):

$$J\varphi_3' = 0; \quad \sin(\varphi_4 - \varphi_2) = 0; \quad \varphi_4 = \varphi_2 + k \cdot 180^\circ \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Экстремумам функций соответствуют крайние положения звеньев.

Графики функций положения $\varphi_2^{(1)}(q), \varphi_3^{(1)}(q), \varphi_4^{(1)}(q)$, а также функций $\varphi_2^{(2)}(q), \varphi_3^{(2)}(q), \varphi_4^{(2)}(q)$ показаны на рис.4. В рассматриваемом механизме

$$-60^{\circ} \leq q < 62,527^{\circ}, \quad 30^{\circ} \leq \varphi_2^{(1)} < 180^{\circ}, \quad -115,66^{\circ} \leq \varphi_3^{(1)} < 45,648^{\circ}, \quad -140,37^{\circ} \leq \varphi_3^{(1)} < 107,875^{\circ}.$$

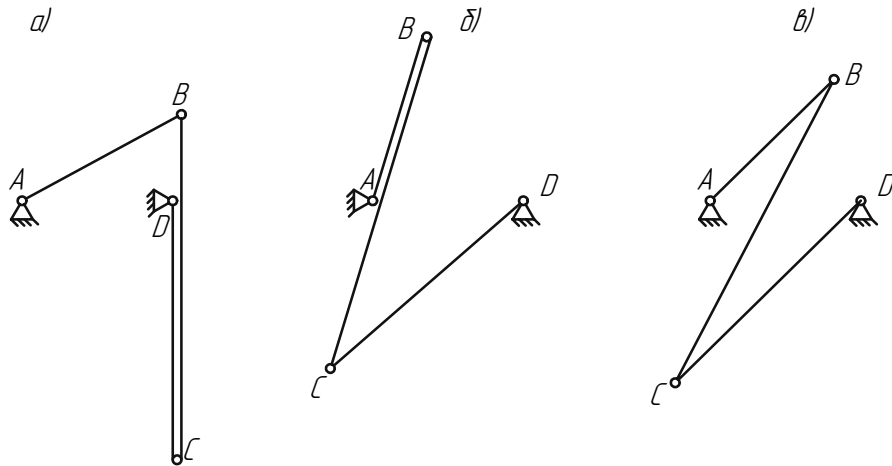


Рис. 3

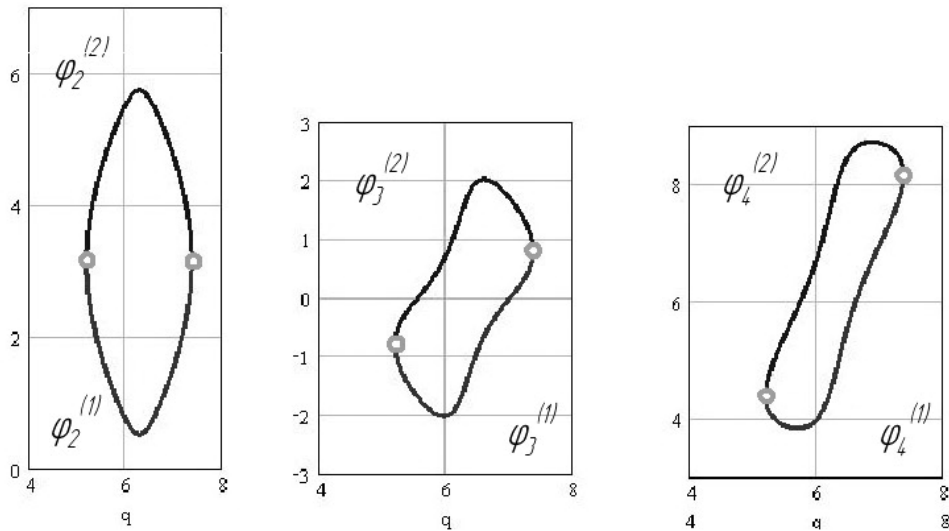


Рис. 4

Дифференцируя систему уравнений (4) по q , получим

$$\left. \begin{aligned} -l_2 \sin \varphi_2 \varphi_2'' + [-l_3 \sin \varphi_3 + l_4 \sin(\varphi_3 + q)] \varphi_3'' &= N_1, \\ l_2 \cos \varphi_2 \varphi_2'' + [l_3 \cos \varphi_3 - l_4 \cos(\varphi_3 + q)] \varphi_3'' &= N_2, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где

$$N_1 = l_2 \cos \varphi_2 (\varphi_2')^2 + l_3 \cos \varphi_3 (\varphi_3')^2 - l_4 \cos(\varphi_3 + q) (\varphi_3' + 1)^2,$$

$$N_2 = l_2 \sin \varphi_2 (\varphi_2')^2 + l_3 \sin \varphi_3 (\varphi_3')^2 - l_4 \sin(\varphi_3 + q) (\varphi_3' + 1)^2.$$

По правилу Крамера из системы линейных уравнений (5) определим для рассматриваемого положения

$$\varphi_2'' = \frac{J\varphi_2''}{J} = 65,818; \quad \varphi_3'' = \frac{J\varphi_3''}{J} = 34,641,$$

где

$$J\varphi_2'' = l_1 [l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - l_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_2 - q)] (\varphi_2')^2 + l_2 (l_2 - l_3 \cos q) (\varphi_3')^2 + (l_3 - l_2 \cos q) (\varphi_3' + 1)^2;$$

$$J\varphi_3'' = l_1 [-l_1 (\varphi_2')^2 - l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) (\varphi_3')^2 + l_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_2 - q)] (\varphi_3' + 1)^2.$$

Угловые скорости и угловые ускорения звеньев для рассматриваемого положения

$$\omega_2 = \varphi_2' \dot{q} = 3 \text{ 1/c}; \quad \omega_3 = \varphi_3' \dot{q} = 1,5 \text{ 1/c}; \quad \omega_4 = \varphi_4' \dot{q} = 2 \text{ 1/c}; \quad \varepsilon_2 = \varphi_2'' \dot{q}^2 + \varphi_2' \ddot{q} = 19,454 \text{ 1/c}^2;$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 10,16 \text{ 1/c}^2.$$

Пример 2. Определим геометрические параметры трехподвижной платформы (рис.5) и угловую скорость выходного звена 3, если $x_0 = y_0 = 0$; $x_E = 2,0 \text{ м}$; $y_E = 0$; $l_1 = OA = 1 \text{ м}$; $l_2 = AB = \sqrt{3} \text{ м}$; $l_3 = BC = 2 \text{ м}$; $l_4 = CD = 2 \text{ м}$; $l_5 = DE = 2 \text{ м}$; $q_1 = 150^\circ$; $q_2 = 150^\circ$; $q_3 = 30^\circ$; $\dot{q}_1 = 0,434 \text{ 1/c}$; $\dot{q}_2 = 0,434 \text{ 1/c}$; $\dot{q}_3 = 0,087 \text{ 1/c}$.

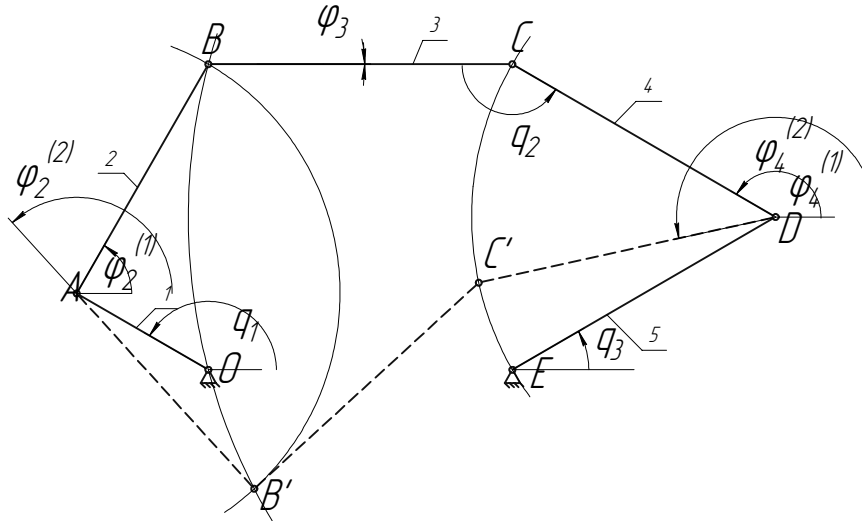


Рис. 5

Рассматриваемый механизм состоит из двух однозвенных одноподвижных структурных групп OA, DE и трехзвенной одноподвижной группы $ABCD$.

Геометрические уравнения для однозвенных групп

$$x_A = l_1 \cos q_1; \quad y_A = l_1 \sin q_1; \quad x_D = x_E + l_5 \cos q_3; \quad y_D = y_E + l_5 \sin q_3.$$

Групповые уравнения для трехзвенной группы

$$\left. \begin{aligned} l_2 \cos \varphi_2 + l_3 \cos \varphi_3 - l_4 \cos(\varphi_3 + q_2) &= x_D - x_A, \\ l_2 \sin \varphi_2 + l_3 \sin \varphi_3 - l_4 \sin(\varphi_3 + q_2) &= y_D - y_A \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

совпадают с уравнениями (1), если в них q заменить на q_2 .

Задание q_1 и q_3 однозначно определяет конфигурацию однозвенных групп, а значит, координаты точек A и D : $x_A = -0,866 \text{ м}$; $y_A = 0,5 \text{ м}$; $x_D = 3,732 \text{ м}$; $y_D = 1,0 \text{ м}$. Решения, приведенные в предыдущем примере, определяют два возможных положения звеньев 2, 3 и 4: $\varphi_2^{(1)} = 60^\circ$; $\varphi_2^{(2)} = 312,412^\circ$; $\varphi_3^{(1)} = 0^\circ$; $\varphi_3^{(2)} = 42,412^\circ$; $\varphi_4^{(1)} = 150^\circ$; $\varphi_4^{(2)} = 192,412^\circ$. Здесь также возможен переход из одного возможного положения в другое без разборки механизма (механизм работает в одной сборке).

Дифференцируя групповые уравнения (6) соответственно по q_1, q_2 и q_3 , получим

$$\left. \begin{aligned} -l_2 \sin \varphi_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_i} + [l_4 \sin(\varphi_3 + q_2) - l_3 \sin \varphi_3] \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_i} &= m_i, \\ l_2 \cos \varphi_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_i} + [-l_4 \cos(\varphi_3 + q_2) + l_3 \cos \varphi_3] \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_i} &= n_i, \end{aligned} \right\}$$

где

$$i = 1, 2, 3; \quad m_1 = l_1 \sin q_1; \quad n_1 = -l_1 \cos q_1; \quad m_2 = -l_4 \sin(\varphi_3 + q_2); \quad n_2 = l_4 \cos(\varphi_3 + q_2);$$

$m_3 = -\ell_5 \sin q_3$; $n_3 = \ell_5 \cos q_3$, откуда найдем

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_1} = \frac{J\varphi'_3 q_1}{J}; \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_2} = \frac{J\varphi'_3 q_2}{J}; \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_3} = \frac{J\varphi'_3 q_3}{J},$$

где

$$J = \ell_2[\ell_4 \sin(\varphi_3 + q_2 - \varphi_2) + \ell_3 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)], \quad J\varphi'_3 q_1 = \ell_1 \ell_2 \sin(q_1 - \varphi_2),$$

$$J\varphi'_3 q_2 = \ell_4 \ell_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3 - q_2), \quad J\varphi'_3 q_3 = \ell_5 \ell_2 \sin(\varphi_2 - q_3),$$

отсюда

$$\dot{\varphi}_3 = \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_3} \dot{q}_3 = -0,209 \text{ 1/c}.$$

Пример 3. Найдем геометрические и кинематические параметры экскаватора с обратной лопатой (рис.6), если $x_A = 0$; $y_A = 0$; $x_D = -0,75\sqrt{3} \text{ м}$; $y_D = 0,75 \text{ м}$; $AB_1 = B_2C = q_1 = 0,5\sqrt{3} \text{ м}$; $DC = 3,0 \text{ м}$; $\alpha_3 = 30^0$; $DE = 1,5\sqrt{3} \text{ м}$; $CH = 1,5\sqrt{3} \text{ м}$; $\beta_3 = 30^0$; $EF_4 = F_5G = q_2 = 0,5\sqrt{7} \text{ м}$; $HG = 1,5 \text{ м}$; $\alpha_6 = 30^0$; $GI = 0,75\sqrt{3} \text{ м}$; $HL = 3,0 \text{ м}$; $\beta_6 = 0$; $IJ_7 = J_8K = q_3 = 9(\sqrt{6} - \sqrt{2})/8 \text{ м}$; $LK = [27(\sqrt{3} - 1)^2 + 6\sqrt{3}]/16 \text{ м}$; $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = \dot{q}_3 = 0$; $\ddot{q}_1 = -0,267 \text{ м/с}^2$; $\ddot{q}_2 = -0,408 \text{ м/с}^2$; $\ddot{q}_3 = -0,359 \text{ м/с}^2$.

Механизм экскаватора состоит трех одноподвижных трехзвенных групп. Для геометрического и кинематического анализа введем групповые координаты, характеризующие положения звеньев 1(2), 3, 4(5), 6, 7(8) и 9.

Составим групповые уравнения для указанных групп:

$$\left. \begin{aligned} (AB_1 + q_1 + B_2C) \cos \varphi_1 - DC \cos \varphi_3 &= x_D - x_A, \\ (AB_1 + q_1 + B_2C) \sin \varphi_1 - DC \sin \varphi_3 &= y_D - y_A, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} (EF_4 + q_2 + F_5G) \cos \varphi_4 - HG \cos \varphi_6 &= x_H - x_E, \\ (EF_4 + q_2 + F_5G) \sin \varphi_4 - HG \sin \varphi_6 &= y_H - y_E, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} (IJ_7 + q_3 + J_8K) \cos \varphi_7 - LK \cos \varphi_9 &= x_L - x_I, \\ (IJ_7 + q_3 + J_8K) \sin \varphi_7 - LK \sin \varphi_9 &= y_L - y_I, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где

$$\left. \begin{aligned} x_H &= x_C + CH \cos(\varphi_3 - \beta_3), & x_E &= x_D + DE \cos(\alpha_3 + \varphi_3), \\ y_H &= y_C + CH \sin(\varphi_3 - \beta_3), & y_E &= y_D + DE \sin(\alpha_3 + \varphi_3), \\ x_L &= x_H - HL \cos(\varphi_6 + \beta_6), & x_I &= x_G - GI \cos(\varphi_6 + \alpha_6), \\ y_L &= y_H - HL \sin(\varphi_6 + \beta_6), & y_I &= y_G - GI \sin(\varphi_6 + \alpha_6). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Если обе части уравнений (7) возвести в квадрат и сложить их, то можно определить

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_3) = \frac{(AB_1 + q_1 + B_2C)^2 + DC^2 - (x_D - x_A)^2 - (y_D - y_A)^2}{2(AB_1 + q_1 + B_2C) \cdot DC} = 0,866;$$

$$\sin(\varphi_1 - \varphi_3) = \sqrt{1 - \cos^2(\varphi_1 - \varphi_3)} = 0,5, \quad \text{т.е. } \varphi_{13} = \varphi_1 - \varphi_3 = 30^0.$$

Найденный относительный угол φ_{13} позволяет из системы линейных уравнений

$$\left. \begin{aligned} (AB_1 + q_1 + B_2C - DC \cos \varphi_{13}) \cos \varphi_1 - DC \sin \varphi_{13} \sin \varphi_1 &= x_D - x_A, \\ DC \sin \varphi_{13} \cos \varphi_1 + (AB_1 + q_1 + B_2C - DC \cos \varphi_{13}) \sin \varphi_1 &= y_D - y_A \end{aligned} \right\}$$

определить

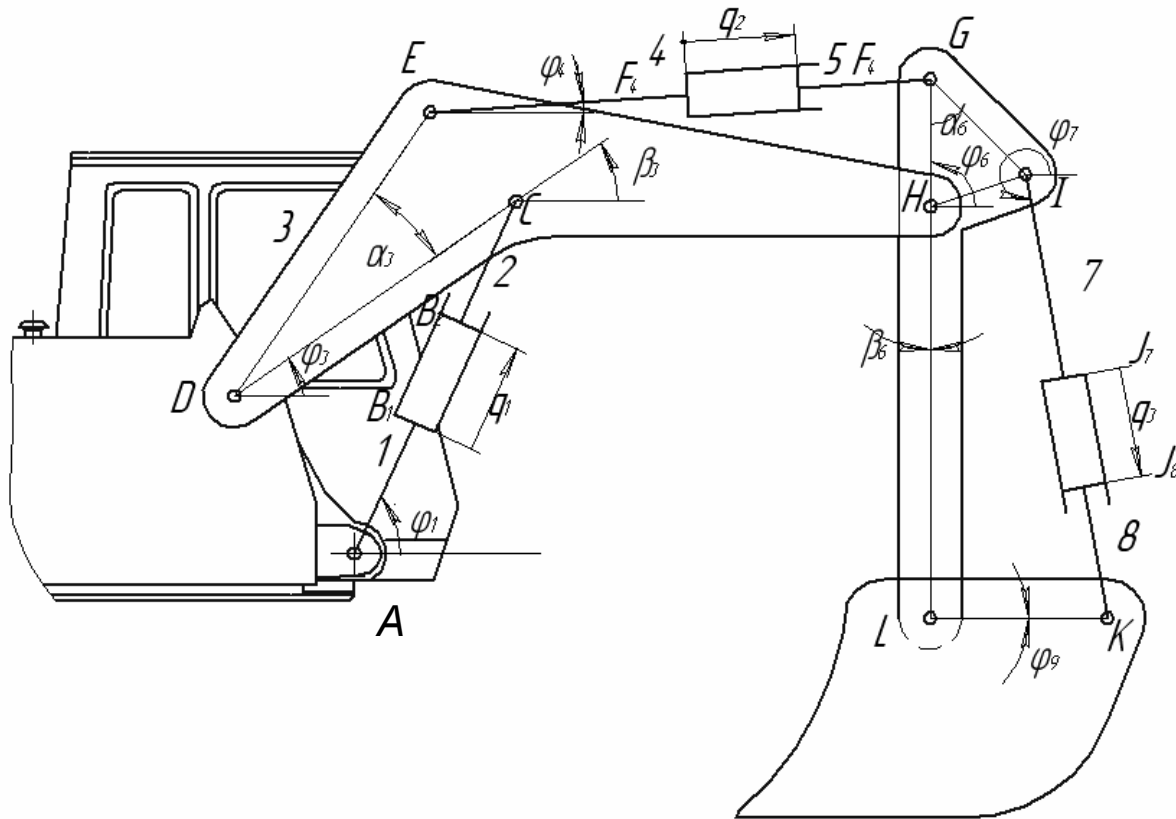


Рис. 6

$$\cos \varphi_1 = \frac{(x_D - x_A)(AB_1 + q_1 + B_2C - DC \cos \varphi_{13}) + (y_D - y_A)DC \sin \varphi_{13}}{(AB_1 + q_1 + B_2C - DC \cos \varphi_{13})^2 + (DC \sin \varphi_{13})^2} = 0,5;$$

$$\sin \varphi_1 = \frac{(y_D - y_A)(AB_1 + q_1 + B_2C - DC \cos \varphi_{13}) - (x_D - x_A)DC \sin \varphi_{13}}{(AB_1 + q_1 + B_2C - DC \cos \varphi_{13})^2 + (DC \sin \varphi_{13})^2} = 0,866,$$

т.е. $\varphi_1 = 60^\circ$. Тогда $\varphi_3 = \varphi_1 - \varphi_{13} = 30^\circ$, $x_E = 0$; $y_E = 3,0$ м; $x_H = 2,25\sqrt{3}$ м; $y_H = 2,25$ м;
 $x_C = x_A + (AB_1 + q_1 + B_2C) \cos \varphi_1 = 0,75\sqrt{3}$ м; $y_C = y_A + (AB_1 + q_1 + B_2C) \sin \varphi_1 = 2,25$ м.

По аналогичному алгоритму найдем

$$\cos(\varphi_4 - \varphi_6) = \sqrt{7}/14; \sin(\varphi_4 - \varphi_6) = -\sqrt{1 - \cos^2(\varphi_4 - \varphi_6)} = -0,9820; \varphi_{46} = \varphi_4 - \varphi_6 = 280,89^\circ;$$

$$\cos \varphi_4 = 0,9819; \sin \varphi_4 = 0,1889; \varphi_4 = 10,9^\circ; \varphi_6 = \varphi_4 - \varphi_{46} = 90^\circ; x_L = 2,25\sqrt{3} \text{ м};$$

$$y_L = -0,75 \text{ м}; x_I = 21\sqrt{3}/8 \text{ м}; y_I = 21/8 \text{ м}; x_G = x_E + (EF_4 + q_2 + F_5G) \cos \varphi_4 = 2,25\sqrt{3} \text{ м};$$

$$y_G = y_E + (EF_4 + q_2 + F_5G) \sin \varphi_4 = 3,75 \text{ м}.$$

Аналогично определим

$$\cos(\varphi_7 - \varphi_9) = 0,2588; \sin(\varphi_7 - \varphi_9) = -\sqrt{1 - \cos^2(\varphi_7 - \varphi_9)} = -0,9659; \varphi_{79} = \varphi_7 - \varphi_9 = 285^\circ;$$

$$x_K = x_I + (IJ_7 + q_3 + J_8K) \cos \varphi_7 = 5,451 \text{ м}; y_K = y_I + (IJ_7 + q_3 + J_8K) \sin \varphi_7 = -0,75 \text{ м}.$$

Продифференцируем по времени групповые уравнения (7):

$$\left. \begin{aligned} (AB_1 + q_1 + B_2C) \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1 - DC \sin \varphi_3 \dot{\varphi}_3 &= \dot{q}_1 \cos \varphi_1, \\ (AB_1 + q_1 + B_2C) \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1 + DC \cos \varphi_3 \dot{\varphi}_3 &= \dot{q}_1 \sin \varphi_1, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

откуда определим

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{\dot{q}_1}{(AB_1 + q_1 + B_2C) \operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi_3)} = 0; \quad \dot{\varphi}_3 = \frac{\dot{q}_1}{DC \sin(\varphi_1 - \varphi_3)} = 0.$$

Из полученных формул следует, что функция положения $\varphi_3(q_1)$ является монотонной; функция положения $\varphi_1(q_1)$ имеет экстремум, когда звенья 1 и 2 перпендикулярны звену 3. Структурная группа звеньев 1,2,3 попадет в особое положение, если шарниры D, C и A будут лежать на одной прямой ($\sin(\varphi_1 - \varphi_3) = 0$).

Дифференцируя систему уравнений (11) по времени, получим систему линейных уравнений

$$\left. \begin{aligned} (AB_1 + q_1 + B_2C) \sin \varphi_1 \ddot{\varphi}_1 - DC \sin \varphi_3 \ddot{\varphi}_3 &= M_1, \\ -(AB_1 + q_1 + B_2C) \cos \varphi_1 \ddot{\varphi}_1 + DC \cos \varphi_3 \ddot{\varphi}_3 &= M_2, \end{aligned} \right\}$$

где

$$M_1 = -2\dot{q}_1\dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 - (AB_1 + q_1 + B_2C) \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1^2 + DC \cos \varphi_3 \dot{\varphi}_3^2 + \ddot{q}_1 \cos \varphi_1,$$

$$M_2 = 2\dot{q}_1\dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 - (AB_1 + q_1 + B_2C) \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1^2 + DC \cos \varphi_3 \dot{\varphi}_3^2 + \ddot{q}_1 \sin \varphi_1,$$

откуда найдем

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{M_1 \cos \varphi_3 + M_2 \sin \varphi_3}{(AB_1 + q_1 + B_2C) \sin(\varphi_1 - \varphi_3)} = -0,1781/c^2;$$

$$\ddot{\varphi}_3 = \frac{M_2 \sin \varphi_1 + M_1 \sin \varphi_3}{DC \sin(\varphi_1 - \varphi_3)} = -0,1781/c^2.$$

Дифференцируя уравнения (8) по времени, получим с учетом (10) линейную систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} (EF_4 + q_2 + F_5G) \sin \varphi_4 \dot{\varphi}_4 - HG \sin \varphi_6 \dot{\varphi}_6 &= K_1, \\ -(EF_4 + q_2 + F_5G) \cos \varphi_4 \dot{\varphi}_4 + HG \sin \varphi_6 \dot{\varphi}_6 &= K_2, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

из которой найдем

$$\dot{\varphi}_4 = \frac{K_1 \cos \varphi_6 + K_2 \sin \varphi_6}{(EF_4 + q_2 + F_5G) \sin(\varphi_4 - \varphi_6)} = 0; \quad \dot{\varphi}_6 = \frac{K_2 \sin \varphi_4 + K_1 \sin \varphi_6}{HG \sin(\varphi_4 - \varphi_6)} = 0,$$

где

$$K_1 = -\dot{q}_1 \cos \varphi_1 + \dot{\varphi}_1 (AB_1 + q_1 + B_2C) \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_3 [CH \sin(\varphi_3 - \beta_3) - DE \sin(\alpha_3 + \varphi_3)] + \dot{q}_2 \cos \varphi_4,$$

$$K_2 = -\dot{q}_1 \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_1 (AB_1 + q_1 + B_2C) \cos \varphi_1 + \dot{\varphi}_3 [CH \cos(\varphi_3 - \beta_3) - DE \cos(\alpha_3 + \varphi_3)] + \dot{q}_2 \sin \varphi_4.$$

Далее дифференцируя по времени уравнения (12), найдем $\ddot{\varphi}_4 = -0,1581/c^2$; $\ddot{\varphi}_6 = 0,0991/c^2$. Аналогично определим $\dot{\varphi}_7 = \dot{\varphi}_9 = 0$; $\ddot{\varphi}_7 = 0,1261/c^2$; $\ddot{\varphi}_9 = 0,3381/c^2$.

Пример 4. Определим аналоги скоростей и ускорений для механизма, изображенного на рис. 1, графоаналитическим методом (*методом планов*).

Для нахождения искомым аналогов произведем структурное преобразование механизма [1]. Пусть входной координатой будет угол поворота φ_2 . С каждым звеном механизма жестко свяжем правые тройки единичных векторов $\overline{i_s}, \overline{j_s}, \overline{k_s}$ ($s = 2, 3, 4$) так, чтобы вектор $\overline{i_s}$ совпадал с осевой линией звена, а вектор $\overline{k_s}$ был перпендикулярен плоскости движения (рис. 7,а). Каждому звену сопоставим вектор $\overline{\ell_s} = \ell_s \overline{i_s}$. Для выполнения теорем о сложении скоростей и ускорений векторы $\overline{\ell_3}$ и $\overline{\ell_4}$ направим навстречу внутренней кинематической паре C группы Ассуря BCD . Представим замкнутый контур $ABCD$ как сумму векторов

$$\overline{\ell_2} + \overline{\ell_3} = \overline{AD} + \overline{\ell_4} \quad (13)$$

или

$$\ell_2 \overline{i_2} + \ell_3 \overline{i_3} = \overline{AD} + \ell_4 \overline{i_4}.$$

Для определения скоростей механизма продифференцируем компоненты последнего уравнения по времени

$$l_2 \dot{\phi}_2 \bar{j}_2 + l_3 \dot{\phi}_3 \bar{j}_3 = l_4 \dot{\phi}_4 \bar{j}_4. \quad (14)$$

Полученное векторное уравнение относительно $\dot{\phi}_3$ и $\dot{\phi}_4$ соответствует формуле распределения скоростей при плоскопараллельном движении

$$\bar{v}_B + \bar{v}_{CB} = \bar{v}_C,$$

где $\bar{v}_B = l_2 \dot{\phi}_2 \bar{j}_2$ - переносная скорость, определяемая движением точки B ; $\bar{v}_{CB} = l_3 \dot{\phi}_3 \bar{j}_3$ - скорость точки C во вращательном движении шатуна BC относительно точки B ; $\bar{v}_C = l_4 \dot{\phi}_4 \bar{j}_4$ - абсолютная скорость точки C во вращательном движении коромысла относительно опоры D .

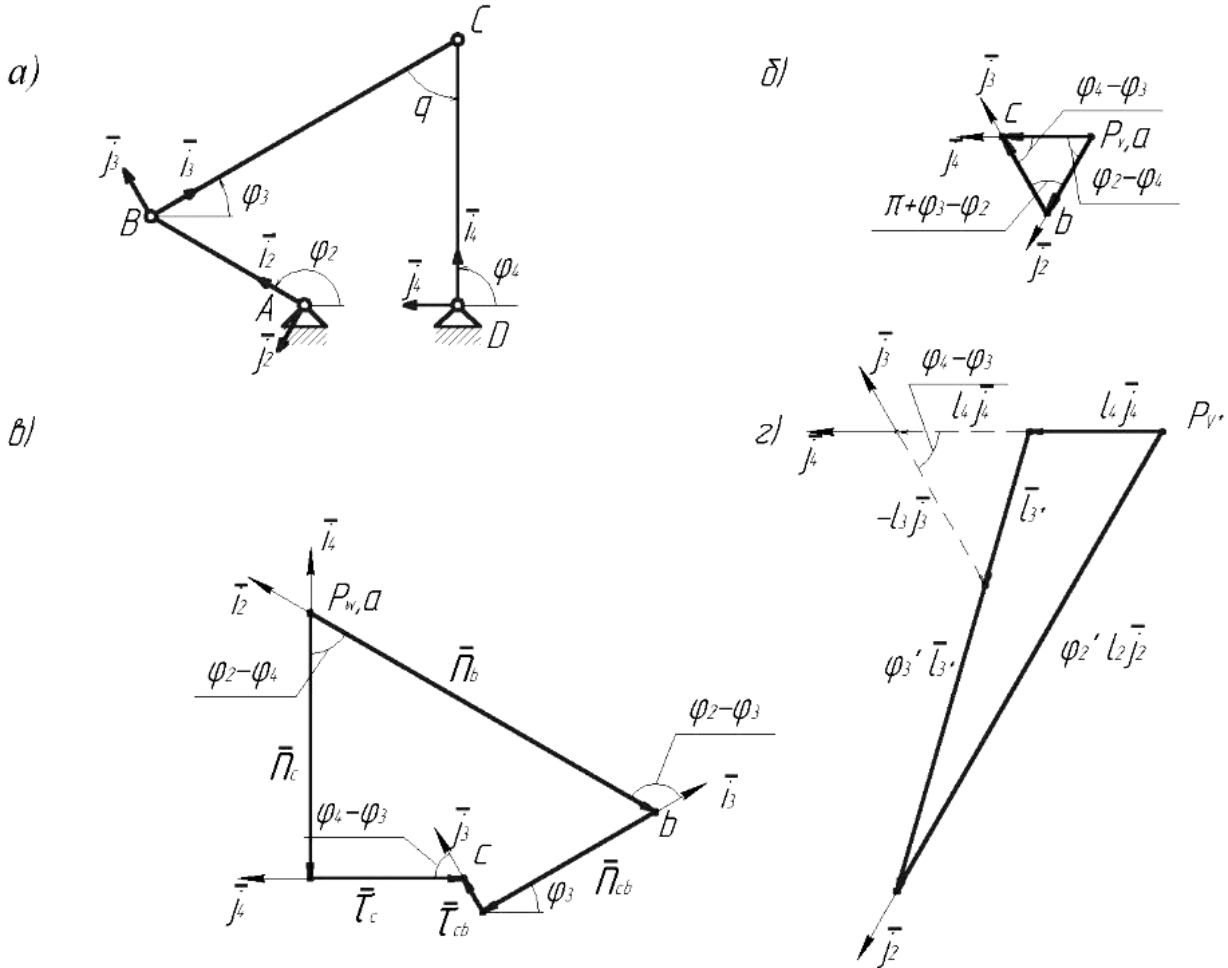


Рис. 7

Из произвольной точки p_v , называемой *полюсом плана скоростей*, отложим вектор $\overline{p_v b}$ (рис.7,б), совпадающий по направлению с единичным вектором \bar{j}_2 и изображающий в масштабе $k_v = l_2 \dot{\phi}_2 / |\overline{p_v b}|$ скорость точки B .

В соответствии с векторным уравнением (14) через конец вектора $\overline{p_v b}$ проведем прямую, параллельную вектору \bar{j}_3 , а через полюс p_v - прямую, параллельную вектору \bar{j}_4 . Пересечение этих прямых определит на плане точку c , а значит, векторы $\overline{p_v c}$ и \overline{bc} , изображающие в масштабе k_v соответственно $\bar{v}_C = l_4 \dot{\phi}_4 \bar{j}_4 = \overline{p_v c} \cdot k_v$ и $\bar{v}_{CB} = l_3 \dot{\phi}_3 \bar{j}_3 = \overline{bc} \cdot k_v$.

С помощью плана скоростей определим

$$\frac{d\varphi_2}{dq} = \frac{d\varphi_2}{d(\varphi_4 - \varphi_3)} = \frac{\dot{\varphi}_2}{\dot{\varphi}_4 - \dot{\varphi}_3} = \frac{|\overline{p_v b}| \cos(\overline{p_v b}, \overline{j_2}) / \ell_2}{\left[|\overline{p_v c}| \cos(\overline{p_v c}, \overline{j_4}) / \ell_4 \right] - \left[|\overline{bc}| \cos(\overline{bc}, \overline{j_3}) / \ell_3 \right]} = 6;$$

$$\frac{d\varphi_4}{dq} = \frac{\dot{\varphi}_4}{\dot{\varphi}_4 - \dot{\varphi}_3} = \left[1 - \frac{\ell_4 |\overline{bc}| \cos(\overline{bc}, \overline{j_3})}{\ell_3 |\overline{p_v c}| \cos(\overline{p_v c}, \overline{j_4})} \right]^{-1} = 4; \quad \frac{d\varphi_3}{dq} = \frac{d\varphi_4}{dq} - 1 = 3.$$

Продифференцировав по времени векторное уравнение (13), получим

$$-\ell_2 \varphi_2^2 \overline{i_2} - \ell_3 \dot{\varphi}_3^2 \overline{i_3} + \ell_3 \ddot{\varphi}_3 \overline{j_3} = -\ell_4 \dot{\varphi}_4^2 \overline{i_4} + \ell_4 \ddot{\varphi}_4 \overline{j_4}.$$

Этому соотношению соответствует известное векторное равенство

$$\overline{w_B} + \overline{w_{CB}^n} + \overline{w_{CB}^t} = \overline{w_C^n} + \overline{w_C^t}.$$

Построив план ускорений при $\dot{\varphi}_2 = const$ (рис.7,в), найдем из

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{d^2 \varphi_2}{dq^2} \dot{q}^2 + \frac{d\varphi_2}{dq} \ddot{q} = 0$$

аналоги ускорений

$$\frac{d^2 \varphi_2}{dq^2} = -\frac{d\varphi_2}{dq} \cdot \frac{\ddot{q}}{\dot{q}^2} = -\frac{d\varphi_2}{dq} \cdot \frac{\ddot{\varphi}_4}{(\dot{\varphi}_4 - \dot{\varphi}_3)^2} = 38\sqrt{3};$$

$$\frac{d^2 \varphi_3}{dq^2} = \frac{d^2 \varphi_4}{dq^2} = \frac{d^2 \varphi_4}{d\varphi_2^2} \left(\frac{d\varphi_2}{dq} \right)^2 + \frac{d\varphi_4}{d\varphi_2} \frac{d^2 \varphi_2}{dq^2} = 20\sqrt{3},$$

где

$$\frac{d\varphi_4}{d\varphi_2} = \frac{\ell_2 |\overline{p_v c}| \cos(\overline{p_v c}, \overline{j_4})}{\ell_4 |\overline{p_v b}| \cos(\overline{p_v b}, \overline{j_2})} = \frac{2}{3}, \quad \frac{d^2 \varphi_4}{d\varphi_2^2} = \frac{\ddot{\varphi}_4}{\dot{\varphi}_2^2} = \frac{\ell_2^2 |\overline{\tau_C}| \cos(\overline{\tau_C}, \overline{j_4})}{\ell_4 |\overline{p_v b}|^2} \frac{k_w}{k_v^2} = -\frac{4\sqrt{3}}{27}.$$

Если уравнение (13) продифференцировать по q , то аналоги скоростей можно также получить из векторного уравнения

$$\ell_2 \varphi_2' \overline{j_2} + \ell_3 \varphi_3' \overline{j_3} = \ell_4 \varphi_4' \overline{j_4} = \ell_4 \varphi_3' \overline{j_4} + \ell_4 \overline{j_4}$$

или

$$\varphi_2' \ell_2 \overline{j_2} = \ell_4 \overline{j_4} + \varphi_3' (\ell_4 \overline{j_4} - \ell_4 \overline{j_3}),$$

построив иной геометрический треугольник (рис.7,г).

В данной статье, являющейся продолжением работ [2,3], были рассмотрены примеры механизмов с внутренними входами. Несмотря на широкое использование таких механизмов, их геометрический и кинематический анализ практически не представлен на страницах учебных изданий по ТММ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Kolovsky M.Z., Evgrafov A.N., Semenov Yu.A., Slousch A.V.** Advanced Theory of Mechanisms and Machines. Springer – Verlag Berlin Heidelberg New York, 2000, 394 p.
2. **Семенов Ю.А., Семенова Н.С.** Структурный анализ механизма // Теория механизмов и машин. – 2003. №2(2). с.3-14.
3. **Семенов Ю.А., Семенова Н.С.** Геометрический анализ плоских рычажных механизмов // Теория механизмов и машин. – 2004. №1(3) с. 26-41.

Поступила в редакцию 18.01.2004