УДК 621. 833.6

А.Я. САДЫКОВА, В.В. ИВАНОВ

К ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕДАТОЧНОГО ОТНОШЕНИЯ МНОГОРЯДНЫХ ПЛАНЕТАРНЫХ МЕХАНИЗМОВ С ОДНОВЕНЦОВЫМИ САТЕЛЛИТАМИ

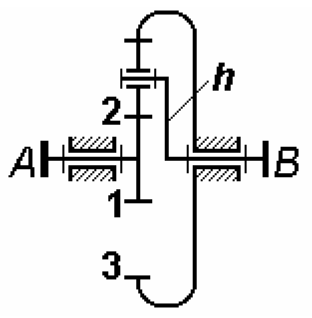
Многорядные планетарные механизмы имеют ряд преимуществ перед зубчатыми механизмами с неподвижными осями. На практике используются планетарные механизмы с одновенцовыми и многовенцовыми сателлитами. Многовенцовые сателлиты имеют сложную конструкцию, трудоемки в изготовлении и имеют высокую себестоимость. Неточность в относительном расположении венцов у разных сателлитов ведет к неравномерности распределения нагрузки между ними, к шуму и вибрациям при работе. Механизмы с одновенцовыми сателлитами позволяют реализовать множество разнообразных конструкций, удовлетворяющих различным требованиям конструктора. Поэтому применение планетарных механизмов с одновенцовыми сателлитами представляется более целесообразным.

Изучением многорядных планетарных механизмов занимались такие ученые, как М.А. Крейнес, М.С. Розовский, В.Н. Кудрявцев, Ю.Н. Кирдяшев и ряд других. В их работах [1–3] перечислены достоинства рассматриваемых механизмов, предложены методы синтеза, а также методы силового и кинематического анализа. Однако большинство исследований базируется на нескольких десятках известных схем механизмов, а предложенные методы расчетов, в частности кинематического, сложны и не позволяют их автоматизировать.

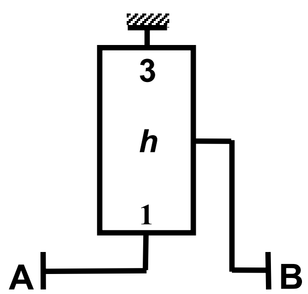
В данной статье предлагается новая методика определения передаточного отношения многорядных планетарных механизмов с одновенцовыми сателлитами. Методика основывается на системном подходе к решению задачи синтеза многорядных планетарных механизмов, который подробно изложен в статье [4]. Коротко напомним основные понятия и определения, принятые в этой статье.

1. Основные понятия и определения

Многорядные планетарные механизмы с одновенцовыми сателлитами состоят из нескольких однорядных механизмов Джемса, называемых базовыми. Для изображения планетарных механизмов используют кинематические и структурные схемы. Последние – более просты и наглядны. На структурной схеме базовые механизмы обозначают прямоугольниками и располагают так, чтобы структурная схема максимально приближалась к кинематической. На рисунке 1 показаны кинематическая схема однорядного механизма Джемса (рис.1,а) и его структурная схема (рис. 1,б).



а)



б)

Рис. 1 Однорядный механизм Джемса: а) кинематическая схема; б) структурная схема.

При рассмотрении многорядных механизмов вводят следующие обозначения:

- центральные колеса с внешними зубьями обозначаются 1, 4, 7…(3*i*-2);
- центральные колеса с внутренними зубьями – 3, 6, 9…(3*i*);
- водила – h_i – обозначаются буквами – $h_1 = e$, $h_2 = f$, $h_3 = g$ и т.д.

Здесь *i* – номер ряда. Обозначения, вводимые на схеме трехрядного механизма, показаны на рис. 2.

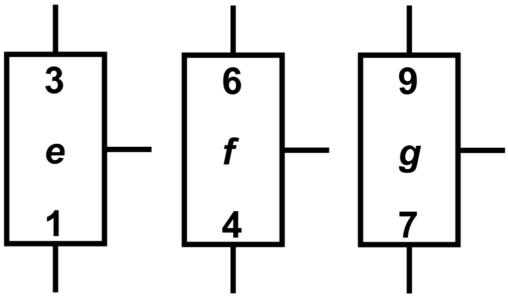


Рис. 2 Обозначения основных звеньев многорядного планетарного механизма

Внутренние связи. Исходные механизмы. Основные звенья базовых механизмов в составе многорядного могут быть жестко соединены между собой, образуя сложные звенья (двойные, тройные и т.д.). Такие связи условно называют внутренними. Совокупность базовых механизмов, соединенных внутренними связями, образует исходный механизм. Для описания структуры исходного механизма используют формулы строения. Например, для исходного механизма, схема которого показанного на рис. 3, формула строения записывается в следующем виде: $(14)(ef)(3)(6)$. (В скобках указаны основные звенья механизма; в данном случае звенья 1, 4 и *e, f* образуют двойные звенья).

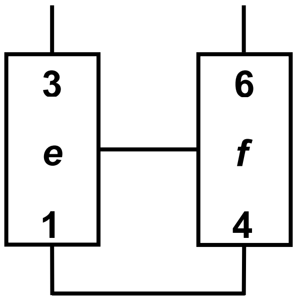


Рис. 3 Структурная схема исходного механизма

Примеры формул строения исходных двухрядных и трехрядных механизмов приведены в таблице 1.

Таблица 1

Примеры формул строения исходных механизмов

Двухрядные	Трехрядные
$(14)(3f)(e)(6)$	$(16g)(e7)(f9)(3)(4)$
$(e4)(1f)(3)(6)$	$(149)(e6g)(f7)(3)$
$(34)(ef)(1)(6)$	$(1f)(e7)(3g)(49)(6)$

Внешние связи. Реальный механизм. Звенья исходного механизма могут быть присоединены к муфтам входного и выходного валов. Кроме того, некоторые звенья могут быть застопорены (связаны со стойкой). Эти связи называют внешними. В комплект внешних связей входят следующие обозначения: А, В – муфты входного и выходного валов соответственно; 0 – неподвижное звено; Х – звено, свободное от внешних связей (свободное звено).

Количество символов в комплекте внешних связей должно быть таким же, как число основных звеньев исходного механизма. Примеры комплектов внешних связей показаны в таблице 2.

Таблица 2

Примеры комплектов внешних связей

Комплекты внешних связей	
из четырех элементов	из пяти элементов
АВ0Х	АВХХ0
0ХАВ	АВ0ХХ
ХАВ0	Х0ХАВ

Синтез реального механизма сводится к наложению на исходный механизм соответствующего комплекта внешних связей. Для описания структуры реального механизма (далее – механизма) также используется формула строения. Покажем на примере. Если на исходный механизм с формулой строения $(14)(ef)(3)(6)$ (рис.3) наложить комплект внешних связей вида АХ0В, то формула строения механизма запишется следующим образом: $(14A)(ef)(30)(6B)$ (символ «Х» в формуле строения не указывается). Структурная схема полученного механизма представлена на рис. 4.

Формулы строения представляют собой математическое описание структуры планетарных механизмов, что является основой автоматизации расчетов и решения оптимизационных задач. С помощью комбинаторных методов можно выявить множество теоретически существующих схем механизмов.

Методика синтеза многорядных планетарных механизмов не только позволяет выявить множество теоретически существующих схем механизмов, но и классифицировать их и синтезировать механизмы с заданным числом степеней свободы [4].

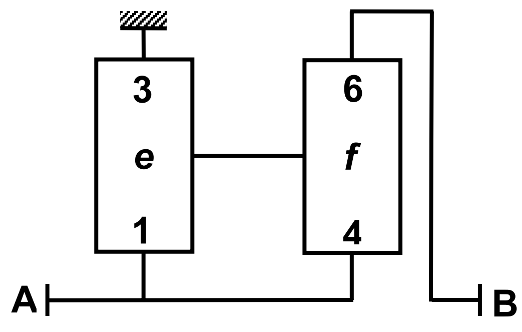


Рис. 4 Структурная схема механизма (14A)(e f)(30)(6B)

Число степеней подвижности. Для расчета числа степеней подвижности многорядных планетарных механизмов используется следующая формула:

$$W = n - k, \tag{1}$$

где n – число подвижных основных звеньев механизма (т.е. число пар скобок в формуле строения за вычетом тех, которые содержат ноль (стойку)); k – число базовых механизмов.

В данной статье рассматриваются планетарные механизмы с одной степенью подвижности. Такие механизмы могут применяться в качестве редукторов (или мультипликаторов). В статьях [5,6] показано, какие из двухрядных и трехрядных исходных механизмов рациональны для компоновки редукторов (мультипликаторов).

Следует отметить, что на структуру планетарного механизма влияет расположение символов в комплекте внешних связей. В некоторых случаях эти символы располагаются так, что в механизме появляются, так называемые, «холостые» звенья. Под «холостыми» следует понимать звенья механизма, свободные от внутренних и внешних связей, эти звенья не участвуют в передаче мощности. На рис. 5 показана структурная схема двухрядного механизма, в котором звено *e* не нагружено, работает только один (правый) ряд. На рис. 6 представлена схема трехрядного механизма, в котором звенья *1* и *9* не нагружены и механизм работает как однорядный.

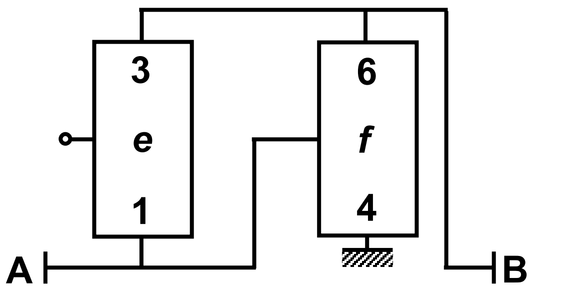


Рис. 5 Структурная схема механизма (1f A)(36B)(40)(e)

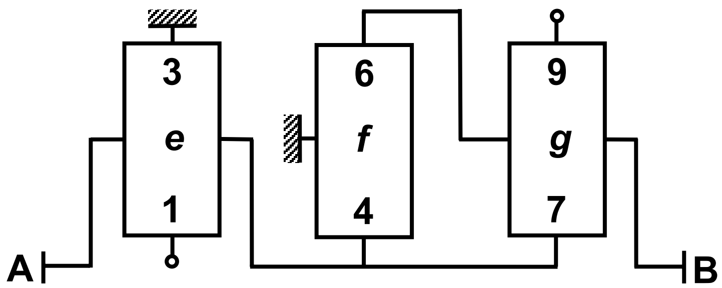


Рис. 6 Структурная схема трехрядного механизма (e47A)(3f 0)(6gB)(1)(9)

В статье [7] приведены рекомендации для оценки схем планетарных редукторов по конструктивным признакам. Редукторы, не удовлетворяющие этим рекомендациям, исключаются из рассмотрения. Механизмы с «холостыми» звеньями нерациональны для использования в качестве редукторов (мультипликаторов); они представляют интерес при проектировании коробок скоростей [5]. При определении передаточных отношений механизмов с ненагруженными звеньями необходимо учитывать ряд особенностей. Этот вопрос требует дальнейшего изучения и в данной статье не рассматривается.

2. Передаточное отношение планетарных механизмов

Важным кинематическим параметром зубчатых механизмов, в том числе и планетарных, является передаточное отношение. По определению передаточное отношение механизма – это отношение угловых скоростей (частот вращения) входного и выходного валов:

$$i_{AB} = \omega_A / \omega_B. \tag{2}$$

Для вывода формулы передаточного отношения многорядных планетарных механизмов необходимо для каждого их рядов записать формулу Виллиса. Для двухрядного механизма записывается система из двух кинематических уравнений:

$$\begin{cases} \omega_1 + (p-1)\omega_e - p\omega_3 = 0, \\ \omega_4 + (q-1)\omega_f - q\omega_6 = 0, \end{cases} \tag{3}$$

где $p = -z_3 / z_1$ – передаточное отношение обращенного механизма первого ряда; $q = -z_6 / z_4$ – передаточное отношение обращенного механизма второго ряда; z_1, z_4 – числа зубьев центральных колес внешнего зацепления; z_3, z_6 – числа зубьев центральных колес внутреннего зацепления.

Кроме того, для каждого механизма можно записать уравнения связи, т.е. кинематические соотношения – равенства угловых скоростей звеньев, соединенных между собой. Для механизма, схема которого показана на рис.4, можно записать следующие уравнения связи:

$$\omega_A = \omega_1 = \omega_4; \omega_e = \omega_f; \omega_3 = o; \omega_6 = \omega_B. \tag{4}$$

Систему уравнений (3) можно записать с учетом кинематических соотношений (4), тогда она примет вид:

$$\begin{cases} \omega_A + (p-1)\omega_e + 0 = 0, \\ \omega_A + (q-1)\omega_e - q\omega_B = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Решая систему уравнений (5) в общем виде относительно ω_A и ω_B, можно вывести формулу передаточного отношения механизма, которая для двухрядных механизмов представляет собой зависимость вида:

$$i_{AB} = f(p,q). \tag{6}$$

Для трехрядных механизмов передаточное отношение зависит от трех параметров:

$$i_{AB} = f(p,q,r). \tag{7}$$

(здесь $r = -z_9 / z_7$ – передаточное отношение обращенного механизма третьего ряда).

Таким образом, передаточное отношение многорядных планетарных механизмов зависит от передаточных отношений обращенных рядов. Параметры p, q и r при компоновке редукторов рекомендуется выбирать в пределах -2…-7 [5]. Подставляя в формулу передаточного отношения определенные значения параметров p, q и r, можно рассчитать его величину. Кроме того, можно оценить диапазон изменения передаточного отношения механизма, определив его наибольшее и наименьшее значения.

Приведенный метод определения передаточного отношения достаточно сложен и требует значительных затрат времени. В данной статье предлагается методика определения передаточного отношения планетарных механизмов с помощью матриц. Рассмотрим ее подробнее.

3. Определение передаточного отношения механизмов с помощью матриц

Для планетарного механизма с количеством рядов, равным m, можно записать систему из m кинематических уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} b_{11}\omega_1 + b_{12}\omega_e + b_{13}\omega_3 = 0, \\ b_{21}\omega_4 + b_{22}\omega_f + b_{23}\omega_6 = 0, \\ \dots \\ b_{m1}\omega_{3m-2} + b_{m2}\omega_{h_m} + b_{m3}\omega_{3m} = 0, \end{cases} \tag{8}$$

где b_{11}=1; b_{12}= p–1; b_{13}= –p; b_{21}=1; b_{22}= q–1; b_{23}= –q; $b_{m1} = 1$; $b_{m2} = i_m - 1$; $b_{m3} = -i_m$ (i_m – передаточное отношение обращенного механизма m–го ряда).

Систему линейных уравнений (8) можно решить методом Крамера, который был положен в основу рассматриваемой методики. Для каждого механизма можно записать расширенную матрицу $\overline{A}$, которая имеет размерность $m \times j$:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где m– число строк матрицы, равное количеству рядов механизма; j– число столбцов матрицы, равное количеству скобок в формуле строения механизма, не содержащих 0. Элементы матрицы $\overline{A}$ можно определить по формуле строения механизма. Элементами первого столбца матрицы $\overline{A}$ являются коэффициенты, показывающие, какие звенья механизма присоединены к входному валу A. Элементы второго столбца показывают, какие звенья присоединены к выходному валу B. Третий и последующие столбцы составляют коэффициенты, показывающие те звенья механизма, на которые не накладываются внешние связи (как правило, это сложные звенья). Покажем определение элементов матрицы для двухрядного механизма (таблица3).

Таблица 3

Определение элементов расширенной матрицы $\overline{A}$

Обозначение звена	Характер внешней связи	Элементы матрицы $\overline{A}$		
		$a_{11}(a_{21})$	$a_{12}(a_{22})$	$a_{13}(a_{23})$
1 (4)	входное	$b_{11}(b_{21})$		
	выходное		$b_{11}(b_{21})$	
	свободное			$b_{11}(b_{21})$
e (f)	входное	$b_{12}(b_{22})$		
	выходное		$b_{12}(b_{22})$	
	свободное			$b_{12}(b_{22})$
3 (6)	входное	$b_{13}(b_{23})$		
	выходное		$b_{13}(b_{23})$	
	свободное			$b_{13}(b_{23})$

При определении элементов матрицы для механизма с числом рядов больше 2-х параметры $p(q)$ заменяются на соответствующие передаточные отношения обращенных рядов (например: для трехрядного механизма – на параметр r).

Основная матрица A имеет размерность $m \times l$, $l = j–1$, и имеет следующий вид:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{ml} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

В соответствии с формулой (1) при $W=1 \quad k=n-1=l$ систему уравнений (8) можно решить по правилу Крамера

$$\omega_A = \Delta_{\omega_A} / \Delta, \tag{11}$$

где Δ – определитель системы уравнений (8), Δ_{ω_A} - определитель матрицы, полученной из основной матрицы A путем замены первого столбца на j–ый столбец матрицы $\overline{A}$. Аналогично можно найти ω_B:

$$\omega_B = \Delta_{\omega_B} / \Delta, \tag{12}$$

где Δ_{ω_B} – определитель матрицы, полученной из основной путем замены второго столбца на j–ый столбец матрицы $\overline{A}$.

Тогда по формуле (2) передаточное отношение механизма можно найти из соотношения:

$$i_{AB} = \omega_A / \omega_B. \tag{13}$$

Система линейных уравнений имеет решение при $\Delta \neq 0$.

На примере двухрядных механизмов покажем, что это условие выполняется. Для двухрядных механизмов основная матрица A имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Определителем системы является следующее выражение:

$$\Delta = a_{11}\cdot a_{22} - a_{21}\cdot a_{12}.$$

Найдем, при каких значениях коэффициентов $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ определитель системы Δ =0. Рассмотрим и проанализируем каждый вариант:

1) a_{11}=0, a_{21}=0 – в этом случае основная матрица A имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Такие значения элементов матрицы показывают, что к входному валу А не присоединено ни одно звено механизма;

2) a_{12}=0, a_{22}=0 – основная матрица имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица показывает, что к выходному валу В не присоединено ни одно звено механизма;

3) a_{11}=0, a_{12}=0 – в этом случае основная матрица примет вид:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Такая матрица показывает, что к входному и выходному валам присоединены одинарные звенья второй ступени;

4) a_{21}=0, a_{22}=0 – основная матрица запишется следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В этом случае к входному и выходному валам присоединены одинарные звенья первой ступени;

5) $a_{11} \cdot a_{22} = a_{12} \cdot a_{21}$ – такое равенство выполняется, если все коэффициенты равны 1; это значит, что зубчатые колеса z_1 и z_4 присоединены к входному валу, и те же самые колеса соединяются с выходным валом (см. таблицу 3); такой случай не реален.

Варианты 1 и 2 исключаются, так как в любом механизме есть звенья, присоединенные к входному валу. Есть также звенья, которые соединяются с выходным валом (согласно методике синтеза планетарных механизмов в любом комплекте внешних связей есть символы «А» и «В», обозначающие входной и выходной валы).

В вариантах 3 и 4 входной и выходной валы присоединены к одинарным звеньям одного и того же ряда. Согласно рекомендациям [7] такие механизмы, с точки зрения конструкции, нецелесообразны или вовсе непригодны для использования.

Таким образом, можно заключить, что схемы, для которых определитель основной матрицы Δ будет равен 0 либо не существуют либо нецелесообразны и исключаются из рассмотрения.

Данная методика позволяет вывести формулу передаточного отношения для механизмов с любым числом рядов (рациональных с точки зрения конструкции). Поскольку на практике широкое применение получили двухрядные и трехрядные механизмы, покажем вывод формулы передаточного отношения на примере указанных механизмов.

Пример 1. Выведем формулу передаточного отношения для двухрядного механизма, формула строения которого записывается следующим образом:

$$(14A)(3f)(e0)(6B).$$

Схема механизма показана на рис. 7.

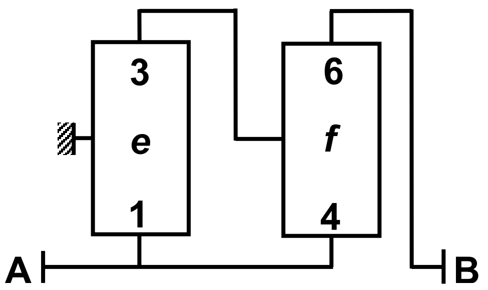


Рис. 7 Структурная схема механизма (14A)(3f)(e0)(6B)

Формула строения данного механизма показывает, что в его составе есть четыре основных звена (двойные звенья 14 и 3*f*, одинарные *e* и 6); водило первого ряда *e* неподвижно.

Расширенная матрица (9) для данного механизма имеет размерность 2×3 и записывается следующим образом (значения элементов матрицы смотри в таблице 3):

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -p \\ 1 & -q & q-1 \end{pmatrix}.$$

Основная матрица A имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -q \end{pmatrix}.$$

Для того чтобы найти определитель Δ_{ω_A}, нужно первый столбец основной матрицы заменить на последний столбец матрицы $\overline{A}$. После замены получим:

$$\Delta_{\omega_A} = \begin{vmatrix} -p & 0 \\ q-1 & -q \end{vmatrix} = pq .$$

Для определения Δ_{ω_B} необходимо второй столбец основной матрицы заменить последним столбцом расширенной матрицы:

$$\Delta_{\omega_B} = \begin{vmatrix} 1 & -p \\ 1 & q-1 \end{vmatrix} = q - 1 + p .$$

Подставляя полученные определители в формулу (13), получим формулу передаточного механизма следующего вида:

$$i_{AB} = \frac{pq}{q + p - 1}.$$

Пример 2. Покажем вывод формулы передаточного отношения для трехрядного механизма $(1fA)(e60)(39)(47)(gB)$, схема которого приведена на рис. 8.

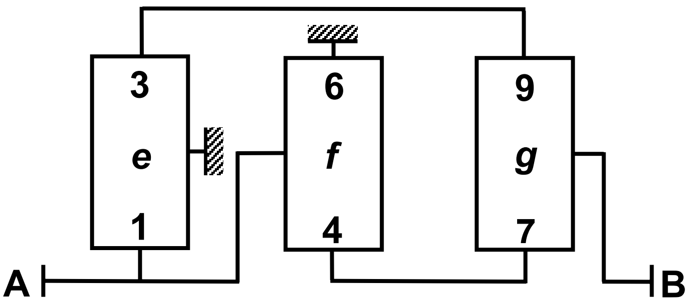


Рис. 8 Структурная схема механизма (1f A)(e60)(39)(47)(gB)

Данный механизм содержит пять основных звеньев: четыре двойных– $1f$, $e6$, 39, 47 и одно одинарное – g. Сложное звено $e6$ неподвижно.

Расширенная матрица $\overline{A}$ (9) имеет размерность 3×4, для ее формирования используется таблица 3, при этом для звеньев третьего ряда параметр $p(q)$ заменяется на передаточное отношение обращенного третьего ряда, т.е. r. Матрица $\overline{A}$ имеет следующий вид:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -p & 0 \\ q-1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & r-1 & -r & 1 \end{pmatrix}.$$

Основная матрица A для данного механизма имеет размерность 3×3 и записывается следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -p \\ q-1 & 0 & 0 \\ 0 & r-1 & -r \end{pmatrix}.$$

Для определения угловой скорости входного вала A необходимо записать определитель Δ_{ω_A} матрицы, полученной из основной путем замены элементов первого столбца на элементы последнего столбца расширенной матрицы $\overline{A}$:

$$\Delta_{\omega_A} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -p \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & r-1 & -r \end{vmatrix} = -p(r-1).$$

Для определителя Δ_{ω_B} необходимо записать матрицу, заменив второй столбец основной матрицы на последний столбец матрицы $\overline{A}$:

$$\Delta_{\omega_B} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -p \\ q-1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -r \end{vmatrix} = -r - p(q-1).$$

После подстановки полученных определителей в формулу (13) и преобразования получим формулу передаточного отношения:

$$i_{AB} = \frac{p(r-1)}{r + p(q-1)}.$$

Следует отметить, что перестановка местами последних столбцов (показывающих сложные звенья, свободные от внешних связей) не влияет на вид формулы передаточного отношения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кирдяшев Ю.Н.** Многопоточные передачи дифференциального типа.– Л.: Машиностроение, Ленингр. отд–ние, 1982.– 223 с., с ил.
2. **Крейнес М.А., Розовский М.С.** Зубчатые механизмы. Математические основы выбора оптимальных схем.– М.: изд–во МГУ, 1965.–334 с.
3. Планетарные передачи. Справочник./ Под ред. **В.Н. Кудрявцева, Ю.Н. Кирдяшева**.–Л.: Машиностроение, Ленингр. отд–ние, 1977.– 536 с., с ил.
4. **Болотовский И.А., Васильева О.Ф., Гурьев Б.И., Жукова Т.В., Русак Л.Л.** К вопросу о синтезе сложных планетарных механизмов // Вестник машиностроения.– 1997.– №8.– С. 6–11.
5. **Болотовский И.А., Атрощенко Л.А., Васильева О.Ф., Гурьев Б.И., Жукова Т.В., Русак Л.Л.** Двухрядные планетарные зубчатые механизмы с одновенцовыми сателлитами // Вестник машиностроения.– 1999.–№6.– С. 3–10.
6. **Болотовский И.А., Атрощенко Л.А., Васильева О.Ф., Жукова Т.В., Русак Л.Л.** Трехрядные планетарные механизмы с одновенцовыми сателлитами (выбор типа механизма для редукторов) // Вестник машиностроения.– 2000.– №6.– С. 3–6.
7. **Болотовский И.А., Атрощенко Л.А., Васильева О.Ф., Жукова Т.В., Русак Л.Л.** Трехрядные планетарные механизмы с одновенцовыми сателлитами (выбор схемы редуктора) // Вестник машиностроения.– 2001.–№1.– с. 3–10.

Поступила в редакцию 25.11.2003
После доработки 28.06.2004