УДК 531:621.01

А. Э. ПУШКАРЕВ

АНАЛОГИЯ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И СТРУКТУРНОГО СИНТЕЗА МЕХАНИЗМА

Часто появление новых технических решений порождается аналогиями, но не широко известными, а более тонкими, касающимися структуры рассматриваемой задачи. Одна из таких аналогий связана с поиском собственных значений линейного преобразования, к которому сводятся многие задачи математики, механики и физики. Эта аналогия нашла применение в синтезе простейшего пространственного механизма.

Первая задача – нахождение главных осей инерции твердого тела, или приведение симметричного тензора инерции I к диагональному виду. Отыскание системы координат, в которой I имеет диагональный вид, равносильно нахождению собственных значений матрицы тензора I, а направление координатных осей совпадает с направлением собственных векторов. Эта задача является частным случаем определения собственного вектора $\vec{r}$ линейного преобразования A [1], для которого существует λ такое, что

$$A\vec{r} = \lambda\vec{r}, \tag{1}$$

где λ – собственные значения линейного преобразования A, которые могут быть действительными, мнимыми или комплексными.

Все собственные значения матрицы тензора I являются действительными, а три действительных направления ее собственных векторов взаимно ортогональны. Матрица X, которая диагонализирует матрицу тензора I посредством подобного преобразования, является действительной ортогональной матрицей. Уравнения, определяющие k-е составляющие j-го собственного вектора, запишутся в виде

$$\sum_k I_{ik} x_{kj} = I_j x_{ij}. \tag{2}$$

Главные моменты инерции находятся из векового уравнения, определяющего собственные значения матрицы тензора I. В трехмерном пространстве уравнения (2) образуют систему трех однородных линейных уравнений относительно составляющих собственного вектора. Они будут иметь нетривиальное решение только в том случае, когда детерминант из их коэффициентов равен нулю:

$$\begin{vmatrix} I_x - I & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_y - I & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_z - I \end{vmatrix} = 0.$$

Корни этого характеристического многочлена – главные моменты инерции.

Аналогично, динамическое поведение линейной системы зависит от корней соответствующего характеристического уравнения. Как при переходе к главным осям инерции уничтожаются центробежные моменты инерции, так и аналогичное преобразование координат может существенно упростить исследование линейных систем. В теории дифференциальных уравнений можно отметить аналогию с уравнением Штурма – Лиувилля, так как уравнению в частных производных всегда соответствует некоторая матрица. Такое соответствие имеется в квантовой теории между матричной и волновой механикой [2].

Для системы с несколькими степенями свободы, совершающей малые колебания, однородные уравнения подобны вековому уравнению, определяющему собственные значения матрицы тензора I. Единственная разница состоит в том, что пространство здесь имеет уже не три измерения, а n. Собственные значения будут действительными и положительными; собственные векторы являются ортогональными. Оси новой системы координат являются главными осями, а процесс получения основных частот малых колебаний сводится к преобразованию главных осей.

Наиболее близкая к нашей задаче аналогия – отыскание оси результирующего поворота при нескольких последовательных поворотах твердого тела. Согласно теореме Эйлера, любое перемещение твердого тела, имеющего неподвижную точку, можно осуществить посредством вращения вокруг некоторой оси. Характерной чертой вращения является то, что при этой операции не изменяется одно из направлений, а именно направление оси вращения. Поэтому любой вектор, направленный вдоль оси вращения, должен в начальной и конечной системах координат, связанных с телом, иметь пропорциональные составляющие. Величины преобразуемых векторов при вращении также не изменяются. Поэтому, пользуясь матричной символикой, можно написать

$$\vec{r}\,' = A\vec{r} = \vec{r}.$$

Как и при нахождении главных осей инерции, это уравнение является частным случаем более общего уравнения (1). Значения λ, при которых уравнение (1) имеет отличные от нуля решения, – характеристические или собственные значения матрицы A. Векторы, удовлетворяющие этому уравнению, – собственные векторы матрицы A. Уравнение (1) можно записать в виде $(A-\lambda E)\vec{r}=0$, где E – единичная матрица, или

$$\begin{aligned}
&(a_{11}-\lambda)x + a_{12}y + a_{13}z = 0,\\
&a_{21}x + (a_{22}-\lambda)y + a_{23}z = 0,\\
&a_{31}x + a_{32}y + (a_{33}-\lambda)z = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Уравнения определяют составляющие x, y, z собственного вектора с точностью до их отношений; однозначно определенным является только направление собственного вектора. Нетривиальное решение уравнений (3) существует тогда, когда детерминант, составленный из их коэффициентов, равен нулю:

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Корни этого характеристического уравнения матрицы A – искомые собственные значения. Так как матрица A ортогональна, то модуль каждого собственного значения равен единице, а одно из ее собственных значений является действительным и может иметь только два значения: + 1 или – 1. Значение – 1 должно быть исключено, иначе преобразование изменяет знак каждой из составляющих вектора, то есть является инверсией и не соответствует никакому реальному физическому перемещению твердого тела. За исключением тривиальных случаев, любая ортогональная матрица имеет только одно действительное собственное значение, а для ее собственных векторов имеется только одно действительное направление (направление оси вращения), что и утверждает теорема Эйлера. В противоположность этому все собственные значения матрицы тензора I являются действительными, а три действительных направления ее собственных векторов взаимно ортогональны.

Направляющие косинусы оси вращения можно получить, полагая в уравнениях (3) λ = 1 и разрешая их относительно x, y, z. Угол поворота φ можно найти, рассмотрев поворот в системе координат, в которой ось z направлена вдоль оси вращения. Матрица, описывающая этот поворот,

$$A' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

След этой матрицы $1+2\cos\varphi$ должен быть равен следу матрицы A $a_{11}+a_{22}+a_{33}$, так как след матрицы инвариантен относительно подобных преобразований. Отсюда $\cos\varphi = 1/2[\mathrm{Tr}(A)-1]$.

Перейдем к решению задачи синтеза пространственного механизма, предназначенного для перевода звена из одного заданного положения в другое. В статье [3] указано на исчерпывание всех возможных комбинаций взаимного расположения звена и двух вращательных кинематических пар пятого класса для перемещения, в частности, складной поверхности летательных аппаратов (рис. 1). Случаи *а* и *б* на рис. 1 отличаются последовательностью поворотов, в случае *в* реализуется другое взаимное расположение поверхности и кинематических пар.

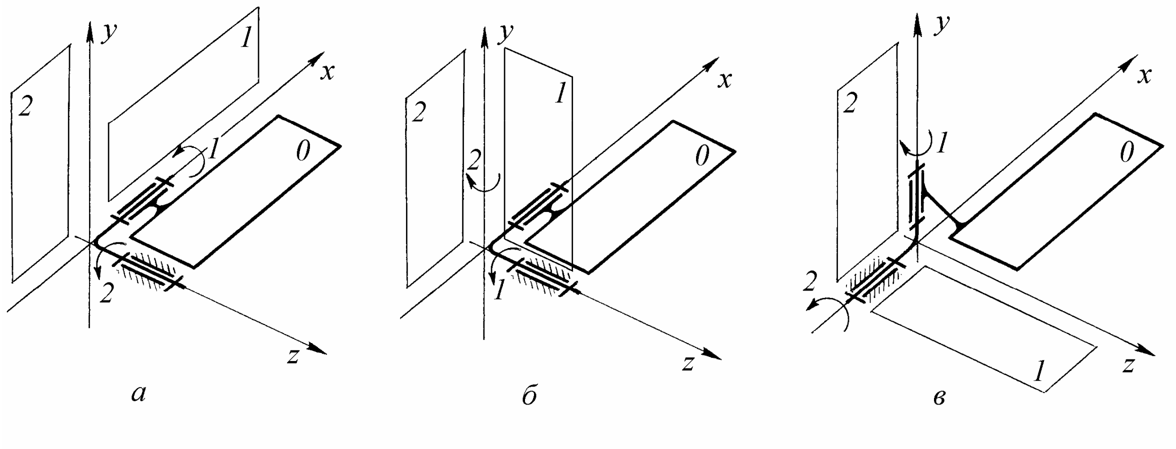

Рис. 1. Возможные варианты взаимного расположения звена и кинематических пар:

0 – начальное положение; 1 – первый поворот, промежуточное положение звена; 2 – второй поворот, конечное положение звена

В подобных конструкциях необходимы две вращательные кинематические пары, два двигателя раскрытия и удвоенное число фиксаторов начального и конечного положений, а потому механизмы обладают избыточным количеством деталей, повышенной массой и достаточно громоздки. С целью сокращения числа деталей в устройстве, уменьшения массы и объема структуры вращения желательно свести структуру двойного разворота к одной оси вращения, то есть две вращательные кинематические пары заменить одной.

Далее для наглядности звено, совершающее поворот, представлено прямоугольной поверхностью, а стойка – цилиндрическим корпусом (рис. 2). Расположение поверхности определяется двумя углами α и β, в общем случае отличающимися от прямых углов. Угол α – это угол между вертикальной плоскостью и поверхностью в начальном положении, угол β – угол в этой же вертикальной плоскости между длинными сторонами поверхности в конечном и начальном положениях. Со сложенной поверхностью и с корпусом связаны оси x_0, y_0, z_0 начальной системы координат, с открытой поверхностью – оси x_1, y_1, z_1 конечной системы координат. Отвлекаясь от реальных конструктивных исполнений последовательных поворотов и расположения кинематических пар, переход из первоначального положения в конечное можно осуществить путем двух поворотов. Первый поворот – это поворот на угол α вокруг оси x_0, второй поворот – на угол β вокруг оси y_1 (рис. 2, *а*).

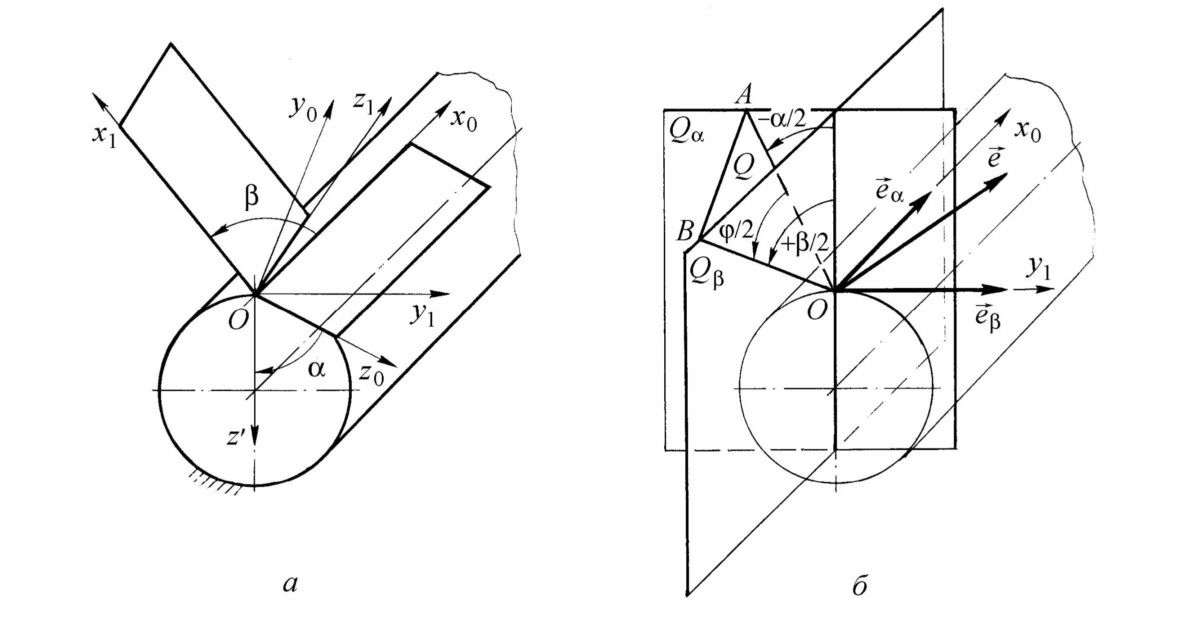

Рис. 2. Определение положения оси результирующего поворота:
а – начальная и конечная системы координат, б – решение по [4]

Известны векторный и геометрический способ нахождения оси результирующего поворота [4]. Со звеном неразрывно связаны два единичных вектора $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OA_1}$ и $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OA_2}$, проходящие через неподвижную точку *O*. Эти векторы после поворота переходят в векторы $\vec{e}_1' = \overrightarrow{OA_1'}$ и $\vec{e}_2' = \overrightarrow{OA_2'}$ (при этом $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_1' \cdot \vec{e}_2'$). Задача равносильна задаче об определении центра конечного вращения сферического отрезка A_1A_2, переходящего в отрезок $A_1'A_2'$ на сфере единичного радиуса [5]. Единичный вектор оси, вокруг которой звено должно совершить конечный поворот,

$$\vec{e} = \frac{(\vec{e}_1' - \vec{e}_1) \times (\vec{e}_2' - \vec{e}_2)}{\sqrt{4(1 - \vec{e}_1' \cdot \vec{e}_1)(1 - \vec{e}_2' \cdot \vec{e}_2) - [(\vec{e}_1' - \vec{e}_1)(\vec{e}_2' - \vec{e}_2)]^2}}.$$

Направление оси результирующего поворота (эквивалентного двум поворотам на углы α и β) получается путем построения двух плоскостей Q_α и Q_β, перпендикулярных единичным векторам осей поворота $\vec{e}_\alpha$ и $\vec{e}_\beta$ (рис. 2, *б*). В первой плоскости проводится луч *OA*, образующий с ребром пересечения плоскостей угол $-\alpha/2$, во второй плоскости – луч *OB*, образующий с этим ребром угол $+\beta/2$. Лучи определяют плоскость *Q*. Ось результирующего поворота с единичным вектором $\vec{e}$ перпендикулярна к этой плоскости, угол поворота φ равен удвоенному углу между лучами *OA* и *OB* [4].

Другой, предлагаемый ниже, путь решения связан с поиском собственного вектора и аналогичен нахождению главных осей инерции и оси результирующего поворота по теореме Эйлера. Расположение такой оси вращения как раз и совпадает с собственным вектором матрицы поворота.

Прежде чем переходить к решению задачи, укажем на существование двух интерпретаций [1]. Матрицу преобразования *А* можно рассматривать как оператор, действующий на систему x_0, y_0, z_0 и преобразующий ее в систему x_1, y_1, z_1. При этом составляющие вектора $\vec{r}$ в системе x_0, y_0, z_0 переходят в составляющие этого вектора в системе x_1, y_1, z_1, но вектор $\vec{r}$ остается неизменным. С другой стороны, под A можно понимать также оператор, действующий на вектор $\vec{r}$ и преобразующий его в другой вектор $\vec{r} = A\vec{r}$, причем оба вектора рассматриваются в одной и той же системе координат. Составляющие нового вектора будут связаны с составляющими старого вектора теми же уравнениями, которые описывают преобразование системы координат. Уравнение $\vec{r} = A\vec{r}$ можно интерпретировать либо как операцию над координатной системой, либо как операцию над вектором, алгебра соответствующего преобразования не зависит от того, какой точки зрения придерживаться.

В данном случае рассматривается ортогональное преобразование, определяющее ориентацию твердого тела, поэтому более целесообразна интерпретация матрицы A как оператора, действующего на координатную систему. После первого поворота начальная система координат x_0, y_0, z_0 переходит в промежуточную систему x', y', z', а после второго поворота – в конечную систему x_1, y_1, z_1. Двум последовательным поворотам на угол α вокруг оси $x_0 = x'$ и на угол β вокруг оси $y' = y_1$ соответствуют матрицы

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \text{ и } A_\beta = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}.$$

После их перемножения получаем матрицу результирующего поворота.

$$A = A_\beta A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}.$$

Координаты собственного вектора матрицы поворота A, согласно характеристическому уравнению (4), определяются кубическим уравнением

$$\lambda^3 - J_1\lambda^2 + J_2\lambda - J_3 = 0,$$

где $J_1 = \mathrm{Tr}(A) = \cos\beta + \cos\alpha + \cos\alpha\cos\beta$, $J_2 = J_1$ (поскольку матрица A ортогональна), $J_3 = |A| = 1$.

Из трех корней уравнения физический смысл имеет один, $\lambda = 1$ (собственное вращение). Зная λ, в соответствии с уравнениями (3), можно получить координаты собственного вектора:

$$\begin{aligned} &(\cos\beta - 1)\ x_0 + \sin\alpha\sin\beta\ y_0 - \cos\alpha\sin\beta\ z_0 = 0, \\ &(\cos\alpha - 1) y_0 + \sin\alpha\ z_0 = 0, \\ &\sin\beta\, x_0 - \sin\alpha\cos\beta\, y_0 + (\cos\alpha\cos\beta - 1)\ z_0 = 0. \end{aligned}$$

После решения системы уравнений получаем отношения между составляющими собственного вектора в начальной системе координат x_0, y_0, z_0:

$$\frac{z_0}{y_0} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}, \quad \frac{z_0}{x_0} = \frac{1-\cos\beta}{\sin\beta} = \mathrm{tg}\frac{\beta}{2}. \tag{5}$$

Таким образом, найдено положение оси вращательной кинематической пары, заменяющей две вращательные кинематические пары. Только в простейшем случае ($\alpha = \beta = 90^\circ$) эта ось пройдет по диагонали куба, во всех остальных случаях, когда углы

α и β отличны от прямых, необходимо воспользоваться формулами (5). Полный угол поворота

$$\varphi = \arccos\{1/2[\mathrm{Tr}(A)-1]\} = \arccos[1/2(\cos\beta + \cos\alpha + \cos\alpha\cos\beta - 1)].$$

Направление оси вращения кинематической пары показано на рис. 3. Ее положение, согласно (5), можно определить двумя углами. Проекция найденной оси на плоскость x_0Oz_0, совпадающую с начальным положением поверхности, образует с длинной стороной поверхности в начальном положении угол $\beta/2$. Проекция этой же оси на вертикальную плоскость x_1Oz_1, совпадающую с конечным положением поверхности, образует с короткой стороной поверхности в начальном положении угол $90^\circ + \alpha/2$.

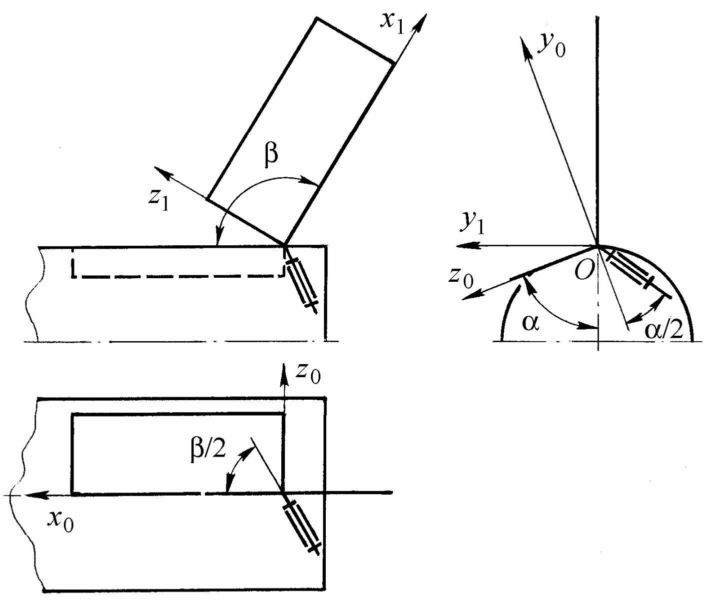

Рис. 3. Расположение вращательной кинематической пары, заменяющей две пары

Полученное решение позволяет построить уравнения движения звена (складной поверхности), выяснить кинематику и некоторые вопросы изготовления поверхности [3]. Синтезированный механизм обладает значительно меньшими объемом и массой структуры вращения.

Найденное техническое решение не ограничивается заменой двух поворотов одним (их может быть несколько) и может найти применение в задачах конструирования, технологии и управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Голдстейн Г.** Классическая механика. – М.: Наука, 1975. – 415 с.
2. **Халфман Р.** Динамика. – М.: Наука, 1972. – 568 с.
3. **Гринберг В. Н., Пушкарев А. Э.** Синтез механизма для раскрытия складных поверхностей летательных и космических аппаратов // Проблемы машиностроения и надежности машин, 1998, № 2. – С. 30 – 35.
4. **Диментберг Ф. М.** Метод винтов в прикладной механике. – М.: Машиностроение, 1971. – 264 с.
5. **Лурье А. И.** Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.

Поступила в редакцию 20.11.2003