

МАТРИЧНЫЙ МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ ОСНОВНОЙ СТРУКТУРНОЙ СХЕМЫ МЕХАНИЗМА

Введение

При разработке механизмов и машин различного назначения проектировщики часто выполняют кинематические пары сложными, в которых сопряжения звеньев осуществляется более чем по двум элементам. Например, вал на двух опорах. С целью повышения жесткости и работоспособности силового узла механизмов конструкторы вводят дополнительные звенья, дублирующие работу звеньев, принятых в качестве основных. Примером этого служит дополнительный шатун механизма шарнирного параллелограмма или использование параллельно работающих сателлитных систем в планетарных зубчатых механизмах. При образовании сложных кинематических пар и использовании дополнительных кинематических цепей вносятся локальные избыточные связи. Выявление избыточных связей в механизмах проще всего может быть сделано при их кинематическом анализе. При этом перемещения и скорости ведомых звеньев могут быть определены без дополнительных звеньев, вносящих избыточные связи. Механизм, свободный от сложных кинематических пар и дублирующих звеньев, назовем основным.

1. Постановка задачи

Для таких механизмов, называемых также *нормальными* [1], разработаны общие закономерности структуры, связывающие число степеней свободы механизма с числом звеньев и числом и видом кинематических пар. Эти закономерности нашли отражение в формуле Малышева, распространяемой на пространственные механизмы и удобной для выполнения анализа структуры. Для синтеза механизма с оптимальной структурой воспользуемся формулой О.Г. Озола [2]:

$$q = W + 6k - (5p_5 + 4p_4 + 3p_3 + 2p_2 + p_1), \quad (1)$$

где q - число структурных избыточных связей; W - число основных степеней свободы механизма; k - число независимых контуров, отличающихся от других контуров, по крайней мере, одним звеном или одной кинематической парой; p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 , - числа одно-, двух-, трех-, четырех- и пятиподвижных пар.

Для механизма, свободного от дублирующих звеньев, при $q > 0$ система статически неопределима, что отражается на работоспособности кинематических пар; при $q < 0$ система приобретает местную подвижность; при $q = 0$ механизм статически определим и не содержит избыточных связей. Исходя из этого, за выходной параметр, характеризующий качество структуры, по которому судят об эффективности функционирования системы [3, 4], принимается число избыточных связей. Внешними параметрами механизма является число степеней свободы (W) входного звена, за которое принимаются обобщенные угловые координаты механизма. Число контуров k определяется составом звеньев и относится к неуправляемым внутренним параметрам системы, т.к. состав звеньев и их расположение установлены на первом уровне структурного синтеза. К внутренним управляемым параметрам относятся числа кинематических пар. Управляемые параметры предопределяют оптимальный вариант структуры механизма, т.к. путем варьирования ими достигается устранение структурных избыточных связей.

За целевую функцию принимается зависимость (1) с ограничениями $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, p_3 \geq 0, p_4 \geq 0, p_5 \geq 0$. Количество управляемых параметров в целевой функции равно числу

прямых ограничений, поэтому задача достижения $q = 0$ относится к алгебраической, целочисленной и многовариантной.

2. Метод решения

Для решения этой задачи представим механизм как множество звеньев X , элементы которого находятся в бинарном отношении A : "быть кинематической парой", т.е. $X_i A X_j$. Такое отношение является подмножеством декартового произведения $A \subset X \times X$ и выражается графом бинарного отношения смежности во множестве X [5]. Этот граф интерпретируется как аналитический образ геометрического представления структуры механизма [6], что указывает на целесообразность его использования при синтезе и анализе структур механизмов [7]. На основании этого представим математическую модель зубчатых планетарных передач в виде неориентированного графа $G(X, U)$, где $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ – множество вершин графа, принятых за звенья механизма; $|X| = n$ – число звеньев механизма; $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ – множество ребер графа, представляющих кинематические пары; $|U| = m$ – число кинематических пар [5, 8].

При автоматизированном проектировании удобно задавать граф в виде матрицы смежности. Матрица смежности неориентированного графа симметрична относительно диагонали, поэтому достаточно хранить в памяти компьютера только половину ее, количество единиц в этой половине определяет число ребер графа.

Количество независимых контуров механизма определяется по цикломатическому числу графа

$$\kappa = m - n + 1. \quad (2)$$

Заметим, что цикломатическое число определено только для неориентированного графа. Это число устанавливает количество удаляемых ребер, называемых хордами цикла, преобразующих граф в фундаментальное (покрывающее) дерево с корнем, соответствующим стойке механизма и с числом ребер, равным числу вершин. Все эти параметры механизма устанавливаются по выбранной схеме.

Для выполнения оптимизации структуры введем в формулу (1) суммарные подвижности низших пар (f_n) и высших пар (f_6):

$$f_n = 3p_3 + 2p_2 + p_1, \quad f_6 = 5p_5 + 4p_4.$$

Если принять за число высших пар m_6 , то число низших пар в механизме найдется

$$m_n = m - m_6, \quad (3)$$

а суммарное число подвижностей низших пар, при условии отсутствия структурных избыточных связей, следует из уравнения (1)

$$f_n = W + 6\kappa - f_6. \quad (4)$$

Высшие пары в виде зубчатых зацеплений пространственного механизма могут быть четырехподвижные, с линейчатым контактом зубьев, и пятиподвижные, с точечным контактом зубьев. Сочетание этих пар определяет число вариантов механизма по подвижностям высших пар. Количество вариантов, содержащих четырех- и пятиподвижные пары, устанавливается матрицей вариантов подвижностей $R = [r_{ij}]$, где i – номер варианта, j – номер высшей пары. Элементы матрицы вариантов подвижности высших пар определяются посредством логического ограничения, следующим образом:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если высшая пара пятиподвижная;} \\ 0, & \text{если высшая пара четырехподвижная.} \end{cases}$$

Структура матрицы примет вид

$$R = \begin{array}{c|cccccc|c} & \text{№ высшей пары} \rightarrow & & & & & & \\ & 1 & 2 & 3 & - & - & j-1 & j & \\ \hline & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & 0 & 2 \\ & 1 & 1 & 1 & - & - & 0 & 0 & 3 \\ & - & - & - & - & - & - & - & - \\ & - & - & - & - & - & - & - & - \\ & 1 & 1 & 0 & - & - & 0 & 0 & i = j - 1 \\ & 1 & 0 & 0 & - & - & 0 & 0 & i = j \\ & 0 & 0 & 0 & - & - & 0 & 0 & i = j + 1 \\ \hline & & & & & & & & \text{№ варианта} \\ & & & & & & & & \leftarrow \end{array}$$

Для каждого варианта высших пар, вводимого в компьютер по строкам этой матрицы, разрабатывается матрица вариантов подвижностей низших пар, содержащихся в синтезируемой структуре механизма. С этой целью для каждого варианта высших пар формируется матрица $D = [d_{ij}]$, элементы которой численно равны подвижностям низших пар. Число строк матрицы равно числу генерируемых вариантов с низшими парами $i \in [1: \nu]$, а число столбцов соответствует количеству низших пар в механизме $j \in [1: m_n]$. Элементы этой матрицы принимают значения 1, 2 или 3, т.е. содержат только одно-, двух- или трехподвижные пары, сумма их подвижностей, как следует из выражения (4), должна быть неизменной для всех вариантов низших пар, входящих в состав выделенного варианта высших пар.

Состав низших пар первой строки матрицы D определяется из анализа отношения, выражающего число подвижностей, приходящихся на низшую пару

$$f_n/m_n = b + a/m_n, \tag{5}$$

где m_n - определяется по формуле (3).

Преобразуем это выражение к виду

$$f_n = bm_n + a + ba - ba,$$

отсюда следует

$$f_n = a(b + 1) + b(m_n - a).$$

Это значит, что для баланса суммарной подвижности низших пар первой строки матрицы D количество элементов со значением $(b + 1)$ должно быть равно числителю дробной части отношения (5), а остальные элементы равны целой части этого отношения. Таким образом, первая строка матрицы вариантов подвижностей низших пар D представляет множество $M = \{1, 2, \dots, m_n\}$ (см. табл. №1), в состав которого входят подмножество $A = \{1, 2, \dots, a\}$ с элементами $d_{1q} = b + 1, q \in [1: a]$ и подмножество $B = \{(a+1): m_n\}$, с элементами $d_{1g} = b, g \in [(a+1): m_n]$. Эти множества образуют объединение $M = A \cup B$ и являются соприкасающимися, т.к. $A \cap B = \emptyset$, где \emptyset – пустое множество.

Таблица 1

Строка матрицы вариантов подвижностей низших пар механизма

$A =$	1	2	---	a			
$M =$	1	2	---	a	$a + 1$	---	m_n
$B =$					$a + 1$	---	m_n

Последующие варианты подвижностей низших пар генерируются из первой строки матрицы D посредством увеличения одного элемента подмножества A на единицу и уменьшения элемента подмножества B соответственно на единицу. В этом случае сохраняется суммарная подвижность элементов множества M .

3. Пример использования

Использование предлагаемой методики оптимизации основной структурной схемы механизма рассмотрим на примере планетарного редуктора, выполненного по схеме $2K-V$ (согласно классификации В.Н. Кудрявцева [9]) с внецентроидным внутренним цевочным зацеплением во второй ступени [10], основная структурная схема которого представлена на рис 1.

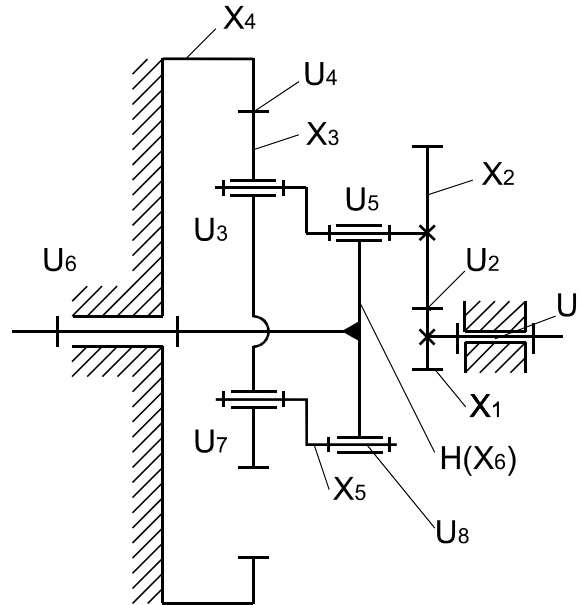
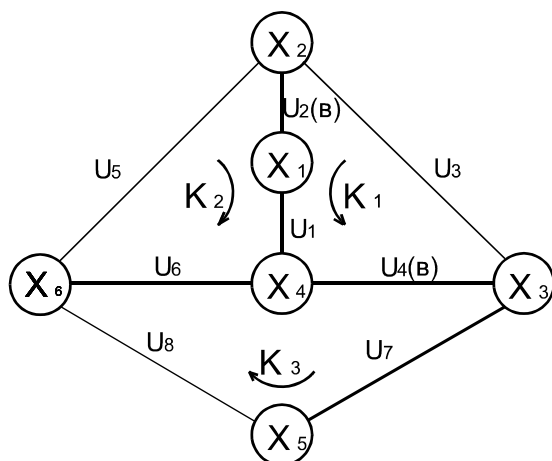


Рис. 1. Структурная схема механизма $2K-V$ с внецентроидным внутренним цевочным зацеплением.

Эти механизмы в последнее время получили достаточно широкое распространение в приводах различных технологических, транспортных и энергетических машин с повышенными эксплуатационными показателями в связи с их высокими техническими характеристиками (высокий КПД, большие передаточные отношения, низкая виброактивность, бесшумность и высокая кинематическая точность). Однако данный механизм весьма чувствителен к точности изготовления и сборки в связи с многопарностью зацепления в его цевочной ступени, а потому задача получения оптимальной структурной схемы для него приобретает особую актуальность.

Результаты расчета вариантов основного механизма передачи $2K-V$ по рассмотренной методике представлены на рис. 2. По схеме рис. 1 составлен граф (математическая модель) механизма передачи $2K-V$ с множеством вершин (звеньев) $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ и множеством ребер (кинематических пар) $U=\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8\}$. Математическая запись графа представлена матрицей смежности S . Количество контуров определено по формуле (2) и равно трем. Фундаментальное дерево графа выделено жирными линиями, хорды – тонкими, обход контуров обозначен круговыми стрелками. Число высших и низших пар соответственно равно $m_{\text{в}}=2$, $m_{\text{н}}=6$. По матрице вариантов подвижностей высших пар R установлена суммарная их подвижность $f_{\alpha 1}=10$, $f_{\alpha 2}=9$, $f_{\alpha 3}=8$. По ранее разработанному алгоритму составлены три матрицы вариантов подвижностей низших пар D_1, D_2, D_3 .

Распределение подвижностей кинематических пар в механизме, выполненное согласно первым строкам матриц R и D_1 , а также число избыточных связей в кинематических цепях, образованных последовательным формированием контуров дано в таблице 2.



$$C = \begin{matrix} & \begin{matrix} X1 & X2 & X3 & X4 & X5 & X6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} X1 \\ X2 \\ X3 \\ X4 \\ X5 \\ X6 \end{matrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \end{matrix}$$

$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} U2 & U4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{vmatrix} 1 & f_{B1} = 10 \\ 2 & f_{B2} = 9 \\ 3 & f_{B3} = 8 \end{vmatrix} \end{matrix}$$

$$D1 = \begin{vmatrix} U1 & U3 & U5 & U6 & U7 & U8 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad D1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad D1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Рис. 2. Граф и матрицы подвижностей основного механизма передачи 2K-V

Таблица 2

Распределение подвижностей кинематических пар в основном механизме 2K-V

Кинематические цепи	Подвижность кинематических пар и число избыточных связей								
	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	q
K_1	2	5	2	5	-	-	-	-	-7
$K_1 + K_2$	2	5	2	5	2	1	-	-	-5
$K_1 + K_2 + K_3$	2	5	2	5	2	1	1	1	0

Столь значительное число подвижностей у кинематических цепей K_1 и $K_1 + K_2$ свидетельствуют о наличии в системах местных подвижностей. Порядок расположения нижних кинематических пар может быть изменен, что не повлияет на число степеней свободы механизма и не внесет избыточных связей, т.к. суммарная их подвижность при этом не изменится.

4. Обсуждение результатов

Полученные варианты оптимальной структуры механизма представляют собой формальное описание объекта, отвечающего требованиям целевой функции (1) и прямым ограничением на управляемые параметры системы. Чтобы обосновать выбор предпочтительного варианта и принять решение, необходимо разработать критерий оценки вариантов. Очевидно, что этот критерий должен быть сориентирован на свойства управляемых параметров системы, т.е. кинематические пары. Высшие пары, входящие в состав механизма, следует рассматривать как простые, т.к. зацепление зубчатых передач до приработки имеют зазоры, необходимые для проникновения в контакт

смазки и компенсации тепловой деформации. Часть низших пар выполняются в конструкции сложными. Например, валы в планетарных передачах устанавливают на две опоры, поэтому шейки вала образуют с опорными элементами корпуса сложную пару, которая на структурной схеме представлена одним подвижным соединением. Приемы устранения локальных избыточных связей в сложных парах рассмотрены в [11] и выполняются путем подбора соответствующих подшипников (плавающий вал, плавающая опора, опоры со сферическими подшипниками).

Таким образом, за критерии оценки варианта и выбора компромиссной структуры принимается простота конструктивной разработки сложной кинематической пары, отличающейся необходимой относительной подвижностью, устанавливаемой процедурой оптимизации структуры. Сведения об обобщенных координатах сложных кинематических пар (подвижностях) выдвигают перед проектировщиком задачу реализации необходимых подвижностей в двухэлементных парах, с учетом технологических возможностей производства и обеспечения его стандартными изделиями. На уровне принятия решения процедура оптимизации синтеза планетарных передач переходит из автоматизированного режима в диалоговый и нуждается в уточнении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Семёнов Ю.А., Семёнова Н.С. Структурный анализ механизмов. – Теория механизмов и машин, 2003, №2, с.3-14.
2. Озол О.Г. Новая структурная формула механизмов и ее теоретическое и практическое значение // Тр. Латв. с-х. акад. - 1962. - Вып.11.- С. 113-129.
3. Норенков И.П. Введение в автоматизированное проектирование технических устройств и систем:[Учеб. пособие для втузов].-2-е изд., перераб. и доп. - М.: Высшая школа, 1986.- 302 с.
4. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. - М.: Высшая школа, 1985.- 271 с.
5. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. - Киев: Техника, 1975.- 766 с.
6. Пейсах Э.Е., Нестеров В.А. Система проектирования плоских рычажных механизмов Машиностроение, 1988.- 232 с.
7. Сушков Ю.А. Графы зубчатых механизмов. - Л.: Машиностроение. Ленингр. отд., 1983.- 215 с.
8. Кристофидис Н. Теория графов. Алгоритмический подход. - М.: Мир, 1978.- 432 с.
9. Кудрявцев В.Н. Планетарные передачи. - Л.: Машиностроение, 1966.-307с.
10. Киреев С.О., Ковалев В.Н. Структура, кинематика и геометрия планетарных передач с внецентроидным цевочным зацеплением / Новочерк. гос. техн. ун-т. - Новочеркасск: НГТУ, 1995.- 98 с.
11. Теория механизмов и машин: Учеб. для втузов / К.В. Фролов, С.А. Попов, А.К. Мусатов и др.; Под ред. К.В. Фролова. - М.: Высш. шк., 1987.- 496 с.

Поступила в редакцию 02.11.2003

После доработки 23.06.2004