

О ПОСТРОЕНИИ СОПРЯЖЕННЫХ ПРОФИЛЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧАХ

В работе [1] рассмотрен метод огибания при синтезе плоских механизмов. Ниже предлагается его обобщение на пространственные задачи.

1. Сведения из математики и механики

1.1. Поверхности

В трехмерном пространстве с декартовыми координатами x_k ($k=1, 2, 3$) поверхность можно задать уравнениями

$$x_3 = f_3(x_1, x_2), \text{ или } x_2 = f_2(x_1, x_3), \text{ или } x_1 = f_1(x_2, x_3), \text{ или } f(x_k) = 0,$$

но предпочтительнее параметрическое задание

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2) \equiv \mathbf{r}(q_\alpha) \tag{1.1}$$

с двумя координатами q_1, q_2 . Если $q_2 = const$ и меняется q_1 , получим координатную линию q_1 , а при $q_1 = const$ – линию q_2 . Каждая точка поверхности лежит на пересечении двух координатных линий. Например, на поверхности шара (рис.1) с угловыми координатами q_α , ($\alpha=1, 2$) имеем:

$$\mathbf{r} = r[\sin q_1(\mathbf{i}_1 \cos q_2 + \mathbf{i}_2 \sin q_2) + \mathbf{i}_3 \cos q_1].$$

Векторы производных $\partial_\alpha \mathbf{r} \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\alpha}$ направлены по касательным к координатным линиям. Орт нормали к поверхности

$$\mathbf{n} = (\partial_1 \mathbf{r} \times \partial_2 \mathbf{r}) / |\partial_1 \mathbf{r} \times \partial_2 \mathbf{r}|. \tag{1.2}$$

Скалярные произведения $a_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \mathbf{r} \cdot \partial_\beta \mathbf{r}$ называются ковариантными компонентами первого метрического тензора. Они определяют расстояния и углы на поверхности. Квадрат длины бесконечно малого отрезка

$$ds^2 = a_{\alpha\beta} dq_\alpha dq_\beta. \tag{1.3}$$

Кривизна поверхности определяется вторым метрическим тензором:

$$\mathbf{b} = -\nabla \mathbf{n}, \quad \nabla = \mathbf{r}^\alpha \partial_\alpha, \quad \mathbf{r}^\alpha : \mathbf{r}^\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta = \delta_\beta^\alpha = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta \\ 1, & \alpha = \beta. \end{cases}$$

Здесь \mathbf{b} - тензор в диадном представлении ($b_{\alpha\beta} \mathbf{r}^\alpha \mathbf{r}^\beta$), \mathbf{r}^α - векторы взаимного базиса. Кривизна поверхности зубчатого зацепления не рассматривается далее, хотя никаких трудностей это бы не составило. Рассмотрим две поверхности, встречающиеся в зубчатых зацеплениях

Гиперболоид вращения. Помимо декартовых координат введем еще цилиндрические координаты $\rho, \theta, z = x_3$ (рис. 2). Для радиус-вектора \mathbf{r} и ортов касательных к координатным линиям имеем

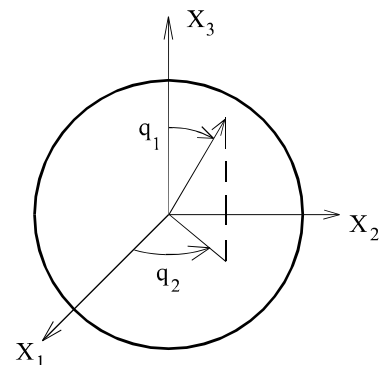


Рис. 1

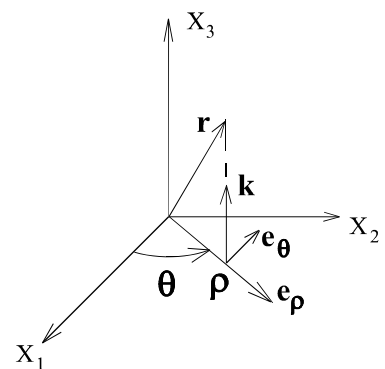


Рис. 2

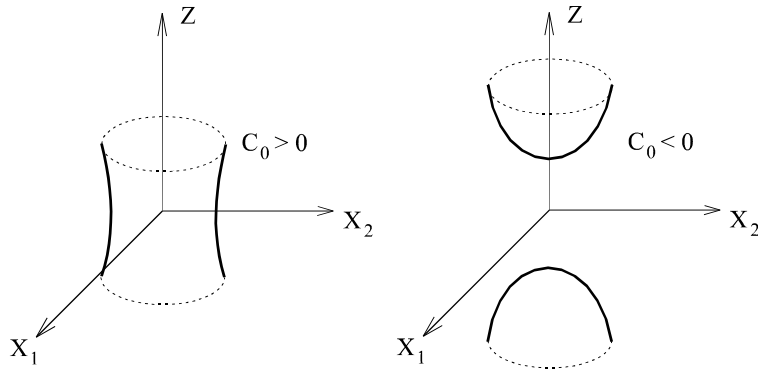


Рис. 3

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{e}_\rho(\theta) + z \mathbf{k}, \quad \mathbf{e}_\rho = \mathbf{i}_1 \cos \theta + \mathbf{i}_2 \sin \theta$$

$$\mathbf{e}_\theta = -\mathbf{i}_1 \sin \theta + \mathbf{i}_2 \cos \theta = \mathbf{e}_\rho'(\theta), \quad \mathbf{e}_z = \mathbf{k} = \mathbf{i}_3. \tag{1.4}$$

Равенство

$$\mathbf{r}(\theta, t) = r_0 \mathbf{e}_\rho(\theta) + t [v_\rho \mathbf{e}_\rho(\theta) + v_\theta \mathbf{e}_\theta(\theta) + v_z \mathbf{k}] \tag{1.5}$$

с постоянными $r_0, v_\rho, v_\theta, v_z$ определяет линейчатую поверхность, составленную из прямых координатных линий t . В проекциях на декартовы оси

$$x_1 = (r_0 + tv_\rho) \cos \theta - tv_\theta \sin \theta, \quad x_2 = (r_0 + tv_\rho) \sin \theta - tv_\theta \cos \theta, \quad z = tv_z,$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (r_0 + tv_\rho)^2 + t^2 v_\theta^2 = \frac{v_\rho^2 + v_\theta^2}{v_z^2} (z + z_0)^2 + c_0.$$

Получилось элементарное уравнение гиперboloида вращения с плоскостью симметрии $z = z_0$. При $c_0 > 0$ гиперboloид однополостный, при $c_0 < 0$ – двуполостный (чаши расположены вверху и внизу по оси z) (рис. 3). Гиперboloидами вращения являются аксоиды в зубчатой передаче со скрещивающимися осями.

Геликоид. Эта винтовая поверхность широко распространена в зубчатых зацеплениях (косозубые колеса, цилиндрические червяки). При $z = 0$ (рис. 4) имеем торцовый профиль с уравнением $\rho = \rho(\theta)$. Винтовое движение профиля вдоль z дает поверхность геликоида

$$\mathbf{r}(\theta, z) = \rho(\theta) \mathbf{e}_\rho(\theta + pz) + z \mathbf{k}. \tag{1.6}$$

Поступательное движение профиля с единичной скоростью складывается с вращением с угловой скоростью p (сдвигаясь на dz , сечение поворачивается на угол $p dz$). При $p = 0$ имеем цилиндр.

По касательным к координатным линиям направлены векторы производных

$$\partial_\theta \mathbf{r} \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \rho'(\theta) \mathbf{e}_\rho(\theta + pz) + \rho(\theta) \mathbf{e}_\theta(\theta + pz), \quad \partial_z \mathbf{r} = p \rho \mathbf{e}_\theta + \mathbf{k}.$$

Их векторное произведение определяет орт нормали \mathbf{n} :

$$\partial_\theta \mathbf{r} \times \partial_z \mathbf{r} = \rho \mathbf{e}_\theta - \rho' \mathbf{e}_\rho + \rho' p \rho \mathbf{k},$$

$$|\partial_\theta \mathbf{r} \times \partial_z \mathbf{r}| = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 + (\rho' p \rho)^2}, \quad \mathbf{n} = \partial_\theta \mathbf{r} \times \partial_z \mathbf{r} / |\partial_\theta \mathbf{r} \times \partial_z \mathbf{r}|.$$

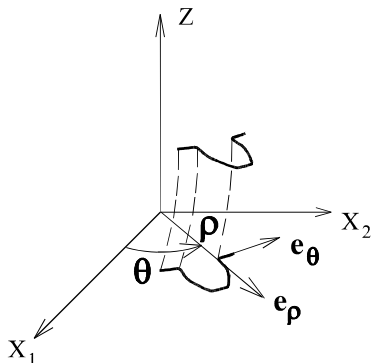


Рис. 4

Квадрат длины бесконечно малого элемента на геликоиде:

$$ds^2 = a_{11} d\theta^2 + 2a_{12} d\theta dz + a_{22} dz^2, \quad a_{11} = |\partial_\theta \mathbf{r}|^2 = \rho'^2 + \rho^2,$$

$$a_{12} = \partial_\theta \mathbf{r} \cdot \partial_z \mathbf{r} = \rho^2 p, \quad a_{22} = |\partial_z \mathbf{r}|^2 = \rho^2 p^2 + 1.$$

1.2. Огибающая семейства поверхностей

Семейство поверхностей задается уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, t), \quad (1.7)$$

где каждому значению t соответствует некоторая поверхность семейства. Огибающей называется поверхность, в каждой своей точке касающаяся какой-либо поверхности семейства. Касание с огибающей, т.е. совпадение нормалей, выражается уравнением

$$\partial_1 \mathbf{r} \times \partial_2 \mathbf{r} \cdot \partial_t \mathbf{r} = 0. \quad (1.8)$$

Уравнение (1.8) связывает q_1, q_2 и t , т.е. определяет зависимость $\hat{t}(q_\alpha)$. Параметрическое задание огибающей:

$$\mathbf{R}(q_\alpha) = \mathbf{r}[q_\alpha, \hat{t}(q_\alpha)]. \quad (1.9)$$

Отметим, что при каждом фиксированном $t = \hat{t}(q_\alpha)$ имеем связь q_1 с q_2 , и тогда при том же t уравнение (1.16) определит контактную линию.

Условие (1.8) действительно выражает совпадение нормалей к поверхности и ее огибающей:

$$\partial_\alpha \mathbf{R} = \partial_\alpha \mathbf{r} + \partial_t \mathbf{r} \partial_\alpha \hat{t}, \quad (\partial_1 \mathbf{r} \times \partial_2 \mathbf{r}) \times (\partial_1 \mathbf{R} \times \partial_2 \mathbf{R}) = 0. \quad (1.8)$$

Пример. При движении шара (см. рис. 1) с единичной скоростью вдоль оси x_3 имеем семейство поверхностей

$$\mathbf{r}(q_\alpha, t) = a \sin q_1 (\mathbf{i}_1 \cos q_2 + \mathbf{i}_2 \sin q_2) + (a \cos q_1 + t) \mathbf{i}_3.$$

В (1.8) имеем

$$\partial_1 \mathbf{r} = a [\cos q_1 (\mathbf{i}_1 \cos q_2 + \mathbf{i}_2 \sin q_2) - \mathbf{i}_3 \sin q_1],$$

$$\partial_2 \mathbf{r} = a \sin q_1 (-\mathbf{i}_1 \sin q_2 + \mathbf{i}_2 \cos q_2),$$

$$\partial_t \mathbf{r} = \mathbf{i}_3; \quad \partial_1 \mathbf{r} \times \partial_2 \mathbf{r} \cdot \partial_t \mathbf{r} = \frac{1}{2} a^2 \sin 2q_1 = 0 \Rightarrow q_1 = \frac{\pi}{2},$$

$$\mathbf{R} = a(\mathbf{i}_1 \cos q_2 + \mathbf{i}_2 \sin q_2) + t \mathbf{i}_3.$$

Огибающая поверхность - это цилиндр радиусом a с осью x_3 , что было очевидно. В данном случае связь q_1, q_2 и t выразилась не в зависимости $\hat{t}(q_\alpha)$, а в $q_1 \equiv \pi/2$.

1.3. Кинематика твердого тела и относительное движение

Какую-либо точку тела примем за полюс C и свяжем с телом тройку декартовых осей x_k с ортами \mathbf{i}_k (рис. 5). Радиус-вектор любой точки тела $\mathbf{r} = \mathbf{r}_c + \mathbf{x}$, $\mathbf{x} = x_k \mathbf{i}_k$. Дифференцируя по времени, получим

$$\dot{\mathbf{i}}_k = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}_k, \quad \dot{\mathbf{r}} \equiv \mathbf{v} = \mathbf{v}_c + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x};$$

вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ от выбора полюса не зависит.

В каждый момент времени поле скоростей таково, как будто тело вращается вокруг некоторой оси (с ортом \mathbf{k} и скоростью ω) и скользит вдоль этой оси. Это следует из представлений

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_c &= v_{cz} \mathbf{k} + \mathbf{v}_{c\perp}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_c + \omega \mathbf{k} \times \mathbf{x}_\perp = \\ &= v_{cz} \mathbf{k} + \omega \mathbf{k} \times \boldsymbol{\xi}, \quad \boldsymbol{\xi} = \omega^{-1} \mathbf{v}_{c\perp} \times \mathbf{k} + \mathbf{x}_\perp. \end{aligned}$$

Волна означает составляющую вектора, перпендикулярную оси. Скорость скольжения равна v_{cz} . Ось про-

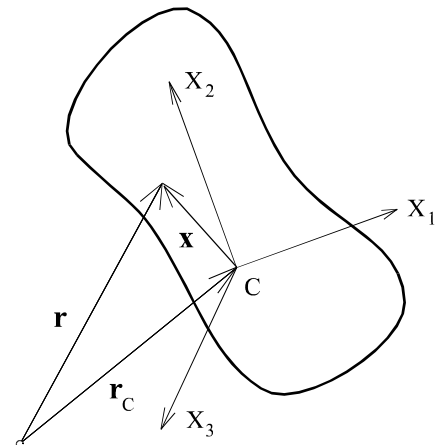


Рис. 5

ходит через точку, в которой $\xi = 0$. С течением времени мгновенная ось вращения-скольжения (т.е. винтового движения) перемещается, образуя в пространстве линейчатую поверхность – неподвижный аксоид.

Картина упрощается при плоском движении. В этом случае $\mathbf{k} = const$, $v_{cz} = 0$, равенство $\xi = 0$ определяет мгновенный центр скоростей; аксоид превращается в цилиндрическую поверхность, направляющая которой называется центроидой (неподвижной). Простейший пример: при качении колеса без скольжения по гладкой выпуклой кривой центроидой будет эта кривая.

При рассмотрении зацеплений необходимо использовать разные системы отсчета. Свяжем с телом *подвижного наблюдателя* (см. рис.5). Радиус-вектор точки для него $\mathbf{x} = x_k(t)\mathbf{i}_k$, причем изменения \mathbf{i}_k он не замечает. Для *неподвижного наблюдателя* радиус-вектор той же точки $\mathbf{r} = \rho_k(t)\mathbf{i}_{k0}$, $\mathbf{i}_{k0} = const$. Из равенства $\mathbf{r} = \mathbf{r}_c + \mathbf{x}$ следует закон скольжения скоростей

$$\mathbf{r}^\bullet \equiv \mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r, \quad \mathbf{v}_e \equiv \mathbf{r}^\bullet_c + \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{x}, \quad \mathbf{v}_r \equiv \dot{x}_k \mathbf{i}_k. \quad (1.10)$$

Переносная скорость \mathbf{v}_e – это местная скорость подвижной системы, $\boldsymbol{\omega}_e$ – ее угловая скорость. Относительная скорость \mathbf{v}_r может быть представлена и в виде

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{x}^\nabla \equiv \mathbf{x}^\bullet - \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{x}. \quad (1.11)$$

Угловые скорости твердого тела, регистрируемые неподвижным ($\boldsymbol{\omega}_a$) и подвижным ($\boldsymbol{\omega}_r$) наблюдателями, связаны известным законом

$$\boldsymbol{\omega}_a = \boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{\omega}_r.$$

Это может быть выведено из (1.19): если тело вращается вокруг точки С, то

$$\mathbf{v}_r = \boldsymbol{\omega}_r \times \mathbf{x}, \quad \mathbf{v}_e = \mathbf{r}^\bullet_c + \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{x}, \quad \mathbf{v}_a = \mathbf{r}^\bullet_c + \boldsymbol{\omega}_a \times \mathbf{x}.$$

Представления об аксоидах можно расширить. При произвольном движении тела для связанного с ним наблюдателя движется окружающее пространство - тоже как твердое тело и со своим аксоидом. Этот подвижный аксоид обкатывает (для неподвижного наблюдателя) без скольжения неподвижный аксоид (теорема Пуансо). При плоском движении имеем неподвижную и подвижную центроиды. В случае качения без скольжения колеса по прямой неподвижной центроидой является эта прямая, а подвижной – окружность колеса.

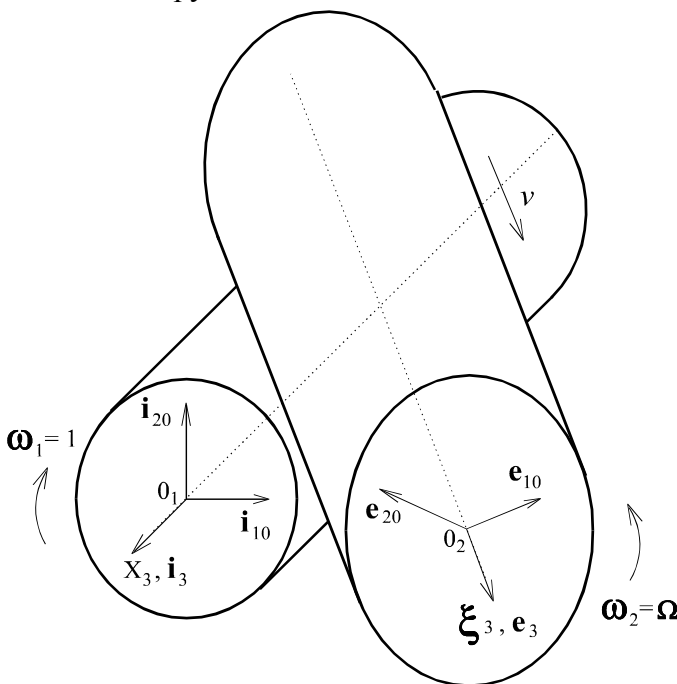


Рис. 6

2. Пространственное зацепление

2.1 . Исходные данные

Допустим что, ведущее колесо проектируемой передачи имеет зубчатую поверхность в форме геликоида с эвольвентным торцовым профилем. Оси ведущего и ведомого колес скрещиваются. При вращении ведущего колеса вокруг своей неподвижной оси со скоростью ω_1 ведомое должно вращаться вокруг своей оси со скоростью $\omega_2 = \Omega \omega_1$ и скользить вдоль оси со скоростью $v \omega_1$ (вращательное движение преобразуется в винтовое (рис. 6)). С ведущим колесом жестко связаны де-

картовы оси x_k с ортами $\mathbf{i}_k(t)$. В начальный момент имеем $\mathbf{i}_k(0) = \mathbf{i}_{k0}$. Ось вращения x_3 неподвижна, $\mathbf{i}_3 = const$; орты \mathbf{i}_k повернуты на угол t , $\dot{\mathbf{i}}_k = -\mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_k$.

Из двух скрещивающихся прямых вторую можно всегда получить из первой трансляцией (поступательным перемещением) в некотором перпендикулярном направлении и последующим поворотом вокруг этого направления. Ось ведомого колеса ξ_3 получается из x_3 трансляцией $A\mathbf{i}_{10}$ и поворотом на угол α вокруг \mathbf{i}_{10} . При этом (рис. 7)

$$\mathbf{e}_{10} = \mathbf{i}_{10}, \mathbf{e}_{20} = \mathbf{i}_{20} \cos \alpha + \mathbf{i}_3 \sin \alpha, \mathbf{e}_3 = -\mathbf{i}_{20} \sin \alpha + \mathbf{i}_3 \cos \alpha. \quad (2.1)$$

Начало координат O_2 движется со скоростью $v\mathbf{e}_3$, так что $\mathbf{O}_1\mathbf{O}_2 = A\mathbf{i}_{10} + v\mathbf{e}_3 t$. Оси ξ_k с ортами $\mathbf{e}_k(t)$ вращаются с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_2 = \Omega\mathbf{e}_3$ (см. рис. 6), $\dot{\mathbf{e}}_k = \Omega\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_k$. По заданному ведущему профилю следует найти сопряженный ведомый профиль.

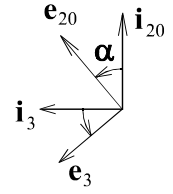


Рис. 7

2.2 Построение сопряженного профиля

Заданный ведущий профиль определяется уравнением $\mathbf{x} = x_k(q_\alpha)\mathbf{i}_k$. На ведомом профиле

$$\xi = \mathbf{x} - \mathbf{O}_1\mathbf{O}_2, \partial_1 \xi \times \partial_2 \xi \cdot \xi^\nabla = 0, \quad (2.2)$$

в соответствии с (1.8) разыскиваем огибающую семейства $\xi \cdot \mathbf{e}_s = \xi_s(q_\alpha, t)$. Напомним: $\xi^\nabla = \dot{\xi}_s \mathbf{e}_s = \dot{\xi} - \boldsymbol{\omega}_2 \times \xi$. В (2.2) имеем

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \xi &= \partial_\alpha \mathbf{x}, \xi^\nabla = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{x} - v\mathbf{e}_3 - \boldsymbol{\omega}_2 \times (\mathbf{x} - A\mathbf{e}_{10} - v\mathbf{e}_3 t), \\ \partial_1 \mathbf{x} \times \partial_2 \mathbf{x} \cdot [-(\mathbf{i}_3 + \Omega\mathbf{e}_3) \times \mathbf{x} - v\mathbf{e}_3 + \Omega A\mathbf{e}_{20}] &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Из (2.3) находим $t = \hat{t}(q_\alpha)$, после чего $\xi_s[q_\alpha, \hat{t}(q_\alpha)]$ дадут ведомый профиль. Столь простой метод если и не нов, то малоизвестен.

На ведущем профиле (геликоиде с эвольвентой) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= x_k \mathbf{i}_k = x_{k0} \mathbf{i}_{k0}, \quad x_1 = r[\cos(q + pz) + q \sin(q + pz)], \\ x_2 &= r[\sin(q + pz) - q \cos(q + pz)], \\ x_{10} &= r[\cos(q + pz - t) + q \sin(q + pz - t)], \\ x_{20} &= r[\sin(q + pz - t) - q \cos(q + pz - t)], \quad x_3 \equiv x_{30} = z. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Найдем частные производные:

$$\partial_1 x_1 \equiv \frac{\partial x_1}{\partial q} = r q \cos(q + pz), \quad \partial_1 x_2 = r q \cos(q + pz), \quad \partial_1 x_3 = 0,$$

$$\partial_2 x_1 \equiv \frac{\partial x_1}{\partial z} = p r [-\sin(q + pz) + q \cos(q + pz)],$$

$$\partial_2 x_2 = p r [\cos(q + pz) + q \sin(q + pz)], \quad \partial_2 x_3 = 1.$$

Орт внешней нормали \mathbf{n} выражается через векторное произведение

$$\begin{aligned} \partial_1 \mathbf{x} \times \partial_2 \mathbf{x} &= r q [\mathbf{i}_{10} \sin(q + pz - t) - \mathbf{i}_{20} \cos(q + pz - t)] + p r^2 q \mathbf{i}_3, \\ \mathbf{n} &= \partial_1 \mathbf{x} \times \partial_2 \mathbf{x} / |\partial_1 \mathbf{x} \times \partial_2 \mathbf{x}|, \quad |\partial_1 \mathbf{x} \times \partial_2 \mathbf{x}| = r q \sqrt{1 + p^2 r^2}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Перепишем уравнение (2.3) в базисе \mathbf{i}_{k0} :

$$\begin{aligned} a \cos \gamma - b \sin \gamma &= c, \quad \gamma \equiv q + pz - t, \\ a &\equiv \Omega A \cos \alpha + (p r^2 \Omega + v) \sin \alpha, \quad b \equiv (z - p r^2 q) \Omega \sin \alpha, \\ c &= r [1 + (\Omega - p v) \cos \alpha + p \Omega A \sin \alpha]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Сразу отметим, что уравнение (2.6) разрешимо лишь при условии

$$a^2 + b^2 \geq c^2 \Rightarrow [(z - pr^2q)\Omega \sin \alpha]^2 \geq c^2 - a^2. \quad (2.7)$$

В случае $|c| > |a|$ получается ограничение $|z - pr^2q| \geq \sqrt{(c^2 - a^2)/\Omega^2 \sin^2 \alpha}$, т.е. в плоскости параметров q, z возможно зацепление лишь вне определенной полосы (заштрихована на рис. 8).

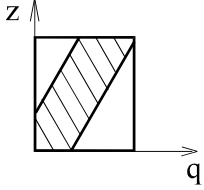


Рис. 8

Проще ограничиться случаем

$$|c| \leq |a|. \quad (2.8)$$

Проверим уравнение (2.6) на плоском зацеплении. При этом $\alpha = p = v = 0$, $\Omega A = R_1(1 + \Omega)$, $R_1 \cos(q - t) = r$ - так и было в (1).

Элементарное решение (2.6):

$$\begin{aligned} m \cos(\gamma + \chi) &= c, \quad m \equiv \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \chi: m \cos \chi = a, \quad m \sin \chi = b, \\ \chi &= \arcsin \frac{b}{m}, \quad \gamma = -\chi + \arccos \frac{c}{m}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Предполагается, что перед \arccos можно поставить знак плюс, как и при плоском зацеплении.

Заметим, что

$$\begin{aligned} \sin \gamma &= \sin(\gamma + \chi) \cos \chi - \cos(\gamma + \chi) \sin \chi = (a\sqrt{m^2 - c^2} - bc)/m^2, \\ \cos \gamma &= (ac + b\sqrt{m^2 - c^2})/m^2, \quad \gamma = \arcsin[(a\sqrt{m^2 - c^2} - bc)/m^2]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Поскольку (из-за b) γ может менять знак, нельзя определить ее как $\arccos(\cos \gamma)$. Величина γ зависит от q и z (опять-таки из-за b); при параллельных осях ($\alpha = 0$) $\gamma = const$; достаточно определить γ на прямых $z - pr^2q = const$.

Выразив время контакта

$$t = \hat{t}(q, z) = q + pz - \gamma(q, z), \quad (2.11)$$

можно найти координаты ведомого профиля:

$$\begin{aligned} \xi_s &= (\mathbf{x} - A\mathbf{e}_{10} - v\mathbf{e}_3 t) \cdot \mathbf{e}_s, \\ \xi_1 &= (x_{k0} \mathbf{i}_{ko} - A\mathbf{e}_{10} - v\mathbf{e}_3 t) \cdot (\mathbf{e}_{10} \cos \Omega t + \mathbf{e}_{20} \sin \Omega t) = \\ &= (x_{10} - A) \cos \Omega t + (x_{20} \cos \alpha + x_3 \sin \alpha) \sin \Omega t, \\ \xi_2 &= -(x_{10} - A) \sin \Omega t + (x_{20} \cos \alpha + x_3 \sin \alpha) \cos \Omega t, \\ \xi_3 &= -x_{20} \sin \alpha + x_3 \cos \alpha - vt, \\ (x_{10} &= r(\cos \gamma + q \sin \gamma), \quad x_{20} = r(\sin \gamma - q \cos \gamma), \quad x_3 = z). \end{aligned} \quad (2.12)$$

2.3 Контактная линия

В любой заданный момент времени контакта имеем $\hat{t}(q, z) = t = const$. Параметры q и z связаны, в плоскости q, z определяется линия, ей соответствует линия контакта в пространстве с вектором \mathbf{x} .

В случае $\alpha \neq 0$ линию контакта можно определить системой

$$q + pz - \gamma = t, \quad z - pr^2q = (a \cos \gamma - c)/\Omega \sin \alpha \cdot \sin \gamma. \quad (2.13)$$

Отсюда находим $q(\gamma, t)$ и $z(\gamma, t)$ - параметрическое (с параметром γ) задание линии в плоскости q, z для каждого t .

Если же $\alpha = 0$, то $\gamma = const$, и линии контакта в плоскости q, z будут прямыми (и в пространстве тоже).

Определим производную $\frac{dz}{dq}$ на линии контакта. Дифференцируя (2.6) и (2.11), получаем

$$-a \sin \gamma \cdot \gamma'(b) - \sin \gamma - b \cos \gamma \cdot \gamma'(b) = 0 \Rightarrow \gamma' = -1/a + b \operatorname{ctg} \gamma;$$

$$1 + p \frac{dz}{dq} - \gamma'(b) \Omega \sin \alpha \cdot \left(\frac{dz}{dq} - pr^2 \right) = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dq} = \frac{1 + \gamma' pr^2 \Omega \sin \alpha}{-p + \gamma \Omega \sin \alpha}. \quad (2.14)$$

Для элемента длины ds на линии контакта имеем

$$ds^2 = a_{\alpha\beta} dq_\alpha dq_\beta, \quad a_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \mathbf{x} \cdot \partial_\beta \mathbf{x}, \quad a_{11} = |\partial_1 \mathbf{x}|^2 = r^2 q^2,$$

$$a_{22} = 1 + p^2 r^2 (1 + q^2), \quad a_{12} = pr^2 q^2, \quad ds = dq(a_{11} + 2a_{12} \frac{dz}{dq} + a_{22} (\frac{dz}{dq})^2)^{1/2}. \quad (2.15)$$

Это выражение понадобится при интегрировании по линии контакта.

Найдем скорости на линии контакта:

$$\mathbf{v}_1 = -\mathbf{i}_3 \times \mathbf{x}, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{U}, \quad \mathbf{U} = v \mathbf{e}_3 + (\mathbf{i}_3 + \Omega \mathbf{e}_3) \times \mathbf{x} - \Omega A \mathbf{e}_{20} = U_{k0} \mathbf{i}_{k0} = U \boldsymbol{\tau},$$

$$U \equiv |\mathbf{U}|; \quad U_{10} = -\Omega \sin \alpha \cdot x_3 - (1 + \Omega \cos \alpha) x_{20},$$

$$U_{20} = -v \sin \alpha + (1 + \Omega \cos \alpha) x_{10} - \Omega A \cos \alpha,$$

$$U_3 = v \cos \alpha + \Omega \sin \alpha \cdot x_{10} - \Omega A \sin \alpha, \quad (2.16)$$

$$U^2 = U_{\alpha 0} U_{\alpha 0} + U_3^2 = \Omega^2 A^2 - 2\Omega A x_{10} (\Omega + \cos \alpha) + (1 + \Omega \cos \alpha)^2 r^2 (1 + q^2) + v^2 - 2v \sin \alpha \cdot x_{10} \Omega^2 \sin^2 \alpha (z^2 + x_{10}^2) + 2\Omega \sin \alpha (1 + \Omega \cos \alpha) z x_{20}.$$

Относительная скорость \mathbf{U} важна для силового и энергетического анализа зацепления.

Угол поворота ведущего колеса в течение контакта определяется с использованием информации о контактной линии. В заданной прямоугольной области $q_{\min} \leq q \leq q_{\max}, z_{\min} \leq z \leq z_{\max}$ необходимо найти экстремальное значение функции $\hat{t}(q, z)$ (2.11). Это будут t_{\min} и t_{\max} (начало и конец контакта). Время контакта $\Delta t = t_{\max} - t_{\min}$. Число зубьев далее находится по формуле

$$Z_1 = [2\pi / \Delta t] + 1 \quad (2.17)$$

– ближайшее целое число, большее $2\pi / \Delta t$.

2.5. Параллельные оси

При $\alpha = 0$ в (2.6) имеем

$$a = \Omega A, \quad b = 0, \quad c = r(1 + \Omega - pv), \quad \gamma = \arccos \frac{c}{a} = \operatorname{const}, \quad (2.18)$$

причем должно быть $|c| \leq a$.

Контактная линия:

$$q + pz - \gamma = t = \operatorname{const} \quad (2.19)$$

- есть прямая в плоскости q, z . В неподвижном пространстве этому соответствует

$$x_{10} = r(\cos \gamma + q \sin \gamma), \quad x_{20} = r(\sin \gamma + q \cos \gamma), \quad x_3 = p^{-1}(t + \gamma - q) \quad (2.20)$$

также прямая, с параметром q и направляющим вектором

$$r(\mathbf{i}_{10} \sin \gamma - \mathbf{i}_{20} \cos \gamma) - p^{-1} \mathbf{i}_3$$

(не орт). При плоском зацеплении $p \rightarrow 0$, контактная линия параллельна оси x_3 .

Координаты ведомого профиля определяются формулами (2.12):

$$\begin{aligned}\xi_1 &= [r(\cos \gamma + q \sin \gamma) - A] \cos \Omega t + r(\sin \gamma - q \cos \gamma) \sin \Omega t = \\ &= r[\cos(\gamma - \Omega t) + q \sin(\gamma - \Omega t)] - A \cos(\gamma - \Omega t - \gamma) = \\ &= (r - A \cos \gamma) \cos(\gamma - \Omega t) + (rq - A \sin \gamma) \sin(\gamma - \Omega t), \\ \xi_2 &= (r - A \cos \gamma) \sin(\gamma - \Omega t) - (rq - A \cos \gamma) \cos(\gamma - \Omega t), \quad \xi_3 = z - vt.\end{aligned}\tag{2.21}$$

Выразим z и t :

$$\begin{cases} pz - t = \gamma - q \\ z - vt = \xi_3 \end{cases} \Rightarrow z = \frac{\xi_3 + v(q - \gamma)}{1 - pv}, \quad t = \frac{q + p\xi_3 - \gamma}{1 - pv}.\tag{2.22}$$

Подставив это в (2.21), получим

$$\begin{aligned}\xi_1 &= R[\cos(Q + P\xi_3 + \Gamma) + Q \sin(Q + P\xi_3 + \Gamma)], \\ \xi_2 &= R[\sin(Q + P\xi_3 + \Gamma) - Q \cos(Q + P\xi_3 + \Gamma)]\end{aligned}\tag{2.23}$$

уравнения эвольвентного геликоида с параметрами

$$\begin{aligned}R &= A \cos \gamma - r, \quad Q = (A \sin \gamma - rq)/R = \Omega \frac{q - Ar^{-1} \sin \gamma}{-1 + pv}, \\ P &= \frac{p\Omega}{-1 + pv}, \quad \Gamma = \Omega \frac{Ar^{-1} \sin \gamma - \gamma}{-1 + pv} + \gamma + \pi.\end{aligned}\tag{2.24}$$

Это согласуется с результатами для плоского зацепления [1]. То, что при параллельных осях сопряженными поверхностями являются эвольвентные геликоиды – известно [2].

Поворот ведущего колеса в течение контакта

$$\Delta t = \Delta q + p\Delta z = q_{\max} - q_{\min} + p(z_{\max} - z_{\min}).$$

Контакт начинается в момент времени $t_{\min} = q_{\min} + pz_{\min} - \gamma$ и кончается при $t_{\max} = q_{\max} + pz_{\max} - \gamma$. Угол Δt больше, чем при плоском зацеплении. Соответственно уменьшается число зубцов.

2.6. Перпендикулярные оси

При $\alpha = \pi/2$ коэффициенты тригонометрического уравнения (2.6) следующие

$$a = pr^2\Omega + v, \quad b = \Omega(z - pr^2q), \quad c = r(1 + p\Omega A).\tag{2.25}$$

Разрешимость (3.6) при любых z и q обеспечена в случае (2.8), т.е.

$$pr\Omega(A - r) < v - r.\tag{2.26}$$

Каких-либо существенных упрощений при решении (2.6) не обнаруживаем.

Координаты ведомого профиля:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= (x_{10} - A) \cos \Omega t + x_3 \sin \Omega t, \quad \xi_2 = -(x_{10} - A) \sin \Omega t + x_3 \cos \Omega t, \\ \xi_3 &= -x_{20} - vt, \quad t \equiv \hat{t}(q, z).\end{aligned}\tag{2.27}$$

Проще в базисе \mathbf{e}_{k0} :

$$\xi_{10} = x_{10} - A, \quad \xi_{20} = x_3, \quad \xi_{30} \equiv \xi_3,\tag{2.28}$$

но форма профиля все-таки определяется ξ_k .

Итак, при перпендикулярных осях численный алгоритм построения сопряженного профиля представляется единственно возможным.

2.7 О форме ведомого колеса и интерференции зубьев

Построив сопряженный профиль на ведомом колесе, необходимо выбрать тело колеса, на котором размещается профиль. В случае плоского зацепления имеем цен-

троиды - касающиеся друг друга окружности (начальные окружности), вблизи которых и располагаются профили.

При пространственном зацеплении со скрещивающимися осями вместо центроид имеем аксоиды - гиперболоиды вращения. Было бы естественно зубчатые профили располагать вблизи аксоидов - но это не нашло распространения на практике.

При размещении ведомых профилей на круговом цилиндре на значительной части профиля может не быть контакта. Неработающая часть не обязана быть сопряженной поверхностью (для ведущего профиля). Но форма колес должна исключать интерференцию, т.е. взаимное проникновение тел. Добиться этого можно, по-видимому, лишь с помощью компьютерного моделирования, рассматривая сечение обоих колес (при движении) соответствующими плоскостями.

Самым информативным представляется вариант сечения неподвижной плоскостью $\xi_3 = const$. Ведомый профиль известен в виде $\xi_k = \xi_k(q, z)$. Тогда в момент времени t :

$$\xi_{10} = \xi_1 \cos \Omega t - \xi_2 \sin \Omega t, \quad \xi_{20} = \xi_1 \sin \Omega t + \xi_2 \cos \Omega t, \quad \xi_{30} = \xi_3. \quad (2.29)$$

Полагая $\xi_3 = const$, получим связь q и z ; тогда ξ_{10} и ξ_{20} дадут линию - сечение ведомого профиля (такая процедура есть в пакете MATLAB).

На ведущем колесе при этом имеем $\mathbf{x} = x_k(\sigma_1, \sigma_2)\mathbf{i}_k$; для тех же точек вектор ξ имеет следующие компоненты $\xi_{k0}(\sigma_1, \sigma_2, t)$:

$$\begin{aligned} \xi_{10} &= x_1 \cos t + x_2 \sin t - A, \quad \xi_{20} = x_{20} \cos \alpha + x_3 \sin \alpha, \\ \xi_{20} &\equiv -x_1 \sin t + x_2 \cos t, \quad \xi_3 = -x_{20} \sin \alpha + x_3 \cos \alpha - vt. \end{aligned} \quad (2.30)$$

При $\xi_3 = const$ получим сечение ведущего колеса (для кругового цилиндра, например, это будет эллипс). В отсутствии интерференции вне сопряженных поверхностей можно убедиться визуальным наблюдением сечений.

Форма ведомого колеса находится следующим образом. Зубчатые профили ведущего колеса размещены на некоторой поверхности вращения Σ_1 (пусть это круговой цилиндр). Очевидно, *профили ведомого колеса располагаются на сопряженной с Σ_1 поверхности Σ_2* . Построение Σ_2 по Σ_1 при заданных A, α, Ω и v производится так же, как зубчатых профилей - см. п. 2.2.

На ведущем цилиндре Σ_1 имеем

$$\mathbf{x} = x_k(\sigma, z)\mathbf{i}_k = a(\mathbf{i}_1 \cos \sigma + \mathbf{i}_2 \sin \sigma) + \mathbf{i}_3 z, \quad (2.31)$$

где a - радиус ведущего цилиндра, σ - угловая координата. Далее:

$$\partial_\sigma \mathbf{x} \times \partial_z \mathbf{x} = a\mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{i}_1 \cos \sigma + \mathbf{i}_2 \sin \sigma = \mathbf{i}_{10} \cos(\sigma - t) + \mathbf{i}_{20} \sin(\sigma - t),$$

и уравнение (2.3) примет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot [(a\mathbf{n} + z\mathbf{i}_3) \times (\mathbf{i}_3 + \Omega \mathbf{e}_3) - v\mathbf{e}_3 + \Omega A \mathbf{e}_{20}] &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \Omega z \sin \alpha \cdot \cos(\sigma - t) + (v \sin \alpha + \Omega A \cos \alpha) \sin(\sigma - t) &= 0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Это соотношение определяет связь величин σ, z и t .

Для координат ξ_{k0} поверхности Σ_2 согласно (3.12) имеем

$$\begin{aligned} \xi_{10} &= x_{10} - A = a \cos(\sigma - t) - A, \\ \xi_{20} &= x_{20} \cos \alpha + x_3 \sin \alpha = a \sin(\sigma - t) \cdot \cos \alpha + z \sin \alpha, \\ \xi_3 &= -x_{20} \sin \alpha + x_3 \cos \alpha - vt = -a \sin(\sigma - t) \cdot \sin \alpha + z \cos \alpha - vt, \\ \xi_1 &= \xi_{10} \cos \Omega t + \xi_{20} \sin \Omega t, \quad \xi_2 = -\xi_{10} \sin \Omega t + \xi_{20} \cos \Omega t. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Решаем (2.32):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\sigma - t) &= -\lambda z, \quad \lambda \equiv \frac{\Omega \sin \alpha}{v \sin \alpha + \Omega A \cos \alpha}, \\ \cos(\sigma - t) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2 z^2}}, \quad \sin(\sigma - t) = \frac{-\lambda z}{\sqrt{1 + \lambda^2 z^2}} \Rightarrow \xi_{10} = \frac{a}{\sqrt{1 + \lambda^2 z^2}} - A, \\ \xi_{20} &= z \left(-\frac{a \lambda \cos \alpha}{\sqrt{1 + \lambda^2 z^2}} + \sin \alpha \right), \quad \xi_3 = z \left(\frac{a \lambda \sin \alpha}{\sqrt{1 + \lambda^2 z^2}} \cos \alpha \right) - vt. \end{aligned} \quad (2.34)$$

(2.35)

Подставив в (2.33), находим

$$\begin{aligned} \xi_1 &= B(z) \cos(\psi - \Omega t), \quad \xi_2 = B(z) \sin(\psi - \Omega t), \quad B \equiv \sqrt{\xi_{10}^2 + \xi_{20}^2}, \\ \psi : \cos \psi &= \xi_{10} / B, \quad \sin \psi = \xi_{20} / B. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Получили $\xi_k(t, z)$ – параметрическое задание искомой поверхности Σ_2 ведомого колеса. При $z = \text{const}$ имеем координатные линии t – винтовые линии с шагом $2\pi a / \Omega$ и радиусом проекции B . Поверхность Σ_2 как бы набрана из таких винтовых линий (соответствующих возможным значениям z). Вблизи поверхности Σ_2 и должны располагаться ведомые зубчатые профили, сопряженные эвольвентным геликоидам.

При параллельных осях ($\alpha = 0$) имеем $\lambda = 0$, $B = A - a$, Σ_2 является цилиндром – очевидный результат. При перпендикулярных осях нет упрощений по сравнению с общим случаем $\alpha \neq 0$.

Тело ведущего колеса располагается под поверхностью Σ_1 . Столь же кратко и ясно нельзя сказать про ведомое колесо.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Елисеев В.В., Евграфов А.Н., Семёнов Ю.А. О методе огибания в теории зацепления // Теория Механизмов и машин. – 2004. №1. С. 42-50.
2. Litvin F.L. Gear Geometry and Applied Theory, Prentice Hall, 1994, 832 p.

Поступила в редакцию 27.02.2004
После доработки 21.06.2004