

О ДВУХ ПОДХОДАХ К РАСЧЕТУ КИНЕМАТИКИ МЕХАНИЗМОВ

Рассмотрим следующую, достаточно типичную задачу определения кинематики механизма. Пусть задан механизм с n обобщенными координатами q_1, q_2, \dots, q_n [1] и k характерными точками, декартовы координаты которых будем обозначать, как x_v, y_v, z_v ($v = 1, 2, 3 \dots k$). В качестве характерных точек обычно выбирают центры шарниров, соединяющих звенья механизмов, геометрические центры или центры масс этих звеньев. Имеются $3k$ независимых соотношений, связывающих декартовы и обобщенные координаты:

$$F_j(q_1, q_2, \dots, q_n, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_k, y_k, z_k) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 3k. \quad (1)$$

Предполагается, что при некотором заданном наборе $q_{11}, q_{21}, \dots, q_{n1}$ обобщенных координат известны декартовы координаты x_{v1}, y_{v1}, z_{v1} , ($v = 1, 2, 3, \dots, k$) характерных точек. Ставится задача, найти декартовы координаты x_{v2}, y_{v2}, z_{v2} , $v = 1, 2, 3, \dots, k$ при другом заданном наборе $q_{12}, q_{22}, \dots, q_{n2}$.

Известный пошаговый подход к решению подобных задач сводится к следующей процедуре [2, 3]: каким-либо способом, специфичным для каждого конкретного случая, выбирают конечную последовательность наборов:

$$q_1^i, q_2^i, \dots, q_n^i, \quad i = 0, 1, 2 \dots m, \quad (2)$$

так что $q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0$ совпадает с $q_{11}, q_{21}, \dots, q_{n1}$, а $q_1^m, q_2^m, \dots, q_n^m$ - с $q_{12}, q_{22}, \dots, q_{n2}$. Используя (1), вычисляют производные декартовых координат по обобщенным координатам:

$$x_{vq_p} = x_{vq_p}(q_1, q_2, \dots, q_n, x_1, y_1, z_1, \dots, x_k, y_k, z_k), \quad y_{vq_p} = y_{vq_p}(q_1, q_2, \dots, q_n, x_1, y_1, z_1, \dots, x_k, y_k, z_k), \\ z_{vq_p} = z_{vq_p}(q_1, q_2, \dots, q_n, x_1, y_1, z_1, \dots, x_k, y_k, z_k), \quad v = 1, 2, 3 \dots k, \quad p = 1, 2, 3 \dots n.$$

Полученные производные дают возможность при переходе от набора $q_1^{i-1}, q_2^{i-1}, \dots, q_n^{i-1}$ к набору $q_1^i, q_2^i, \dots, q_n^i$, $i = 1, 2 \dots m$, заменять соответствующие приращения декартовых координат их дифференциалами. В итоге имеют следующие зависимости:

$$x_v^i = x_v^i(q_1^{i-1}, q_2^{i-1}, \dots, q_n^{i-1}, q_1^i, q_2^i, \dots, q_n^i, x_1^{i-1}, y_1^{i-1}, z_1^{i-1}, \dots, x_k^{i-1}, y_k^{i-1}, z_k^{i-1}), \\ y_v^i = y_v^i(q_1^{i-1}, q_2^{i-1}, \dots, q_n^{i-1}, q_1^i, q_2^i, \dots, q_n^i, x_1^{i-1}, y_1^{i-1}, z_1^{i-1}, \dots, x_k^{i-1}, y_k^{i-1}, z_k^{i-1}), \\ z_v^i = z_v^i(q_1^{i-1}, q_2^{i-1}, \dots, q_n^{i-1}, q_1^i, q_2^i, \dots, q_n^i, x_1^{i-1}, y_1^{i-1}, z_1^{i-1}, \dots, x_k^{i-1}, y_k^{i-1}, z_k^{i-1}), \quad (3)$$

где x_v^0, y_v^0, z_v^0 совпадают с известными координатами x_{v1}, y_{v1}, z_{v1} , а x_v^m, y_v^m, z_v^m - с искомыми координатами x_{v2}, y_{v2}, z_{v2} .

Следует сделать ряд замечаний, касающихся выбора последовательности наборов (2). Во-первых, соседние наборы $q_1^{i-1}, q_2^{i-1}, \dots, q_n^{i-1}$ и $q_1^i, q_2^i, \dots, q_n^i$ не должны быть слишком близкими. Это требует характер представления чисел в компьютере и точность его вычислений. Во-вторых, они не должны быть слишком далекими. Такое требование накладывает способ получения зависимостей (3). В-третьих, число наборов $m + 1$ не должно быть слишком большим. Это требование обусловлено тем, что вычисление координат x_v^i, y_v^i, z_v^i производится с некоторой погрешностью. Как следует из (3), с каждым шагом эта погрешность накапливается и при большом m может стать недопустимой. Понятия «близкий», «далекий», «допустимая погрешность» определяются спецификой рассматриваемого механизма и точностью, предъявляемой к расчету его

кинематики. Из сказанного вытекает, что в каждом конкретном случае стоит вопрос выбора подходящей последовательности (2) и выбора критериев оценки точности расчёта, показывающих приемлемость этой последовательности.

Поставленная выше в общем виде задача расчета кинематики механизма рассматривалась в [4 – 6], где в качестве механизмов выступали механизмы подвесок колес и рулевых приводов легковых автомобилей. Там в соотношения (1), кроме всего прочего, входят системы трех уравнений с тремя неизвестными x, y, z двух видов:

$$\begin{cases} (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2 = d_1, \\ (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + (z - c_2)^2 = d_2, \\ (x - a_3)^2 + (y - b_3)^2 + (z - c_3)^2 = d_3, \end{cases} \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = D_3, \end{cases} \quad (4)$$

где $a_i = a_i(q_1, q_2, \dots, q_n)$, $b_i = b_i(q_1, q_2, \dots, q_n)$, $c_i = c_i(q_1, q_2, \dots, q_n)$, $d_i = d_i(q_1, q_2, \dots, q_n) \geq 0$, $A_i = A_i(q_1, q_2, \dots, q_n)$, $B_i = B_i(q_1, q_2, \dots, q_n)$, $C_i = C_i(q_1, q_2, \dots, q_n)$, $D_i = D_i(q_1, q_2, \dots, q_n)$, $D_3 \geq 0$, $i = 1, 2, 3$, – непрерывные функции от обобщенных координат. Легко видеть, что простой заменой переменных системы первого вида приводятся к системам второго вида. В [6] разработан метод решения таких систем; описан способ выбора одного из двух корней, которые, вообще говоря, могут иметь системы; определена область U изменения обобщенных координат, где этот метод применим. Подход к расчету кинематики механизмов, сутью которого являются указанные метод и способ, не требует построения последовательности (2), а точнее – является одношаговым, т.е. для него $m = 1$.

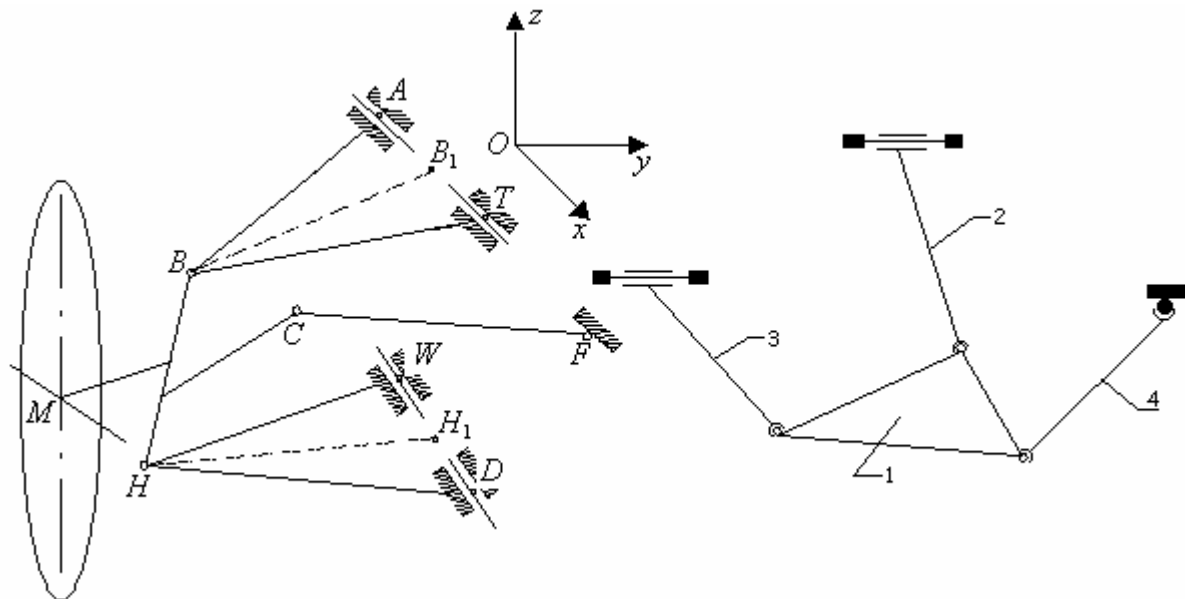


Рис.1. Механизм подвески и его структурная схема

На простом примере механизма подвески колеса легкового автомобиля, схематизированное изображение и структурная схема [7] которого даны на рис.1, рассмотрим особенности пошагового и одношагового подходов и сравним их.

Система координат $Oxyz$ жестко связана с кузовом автомобиля. Верхний рычаг ABT имеет свободу вращения вокруг оси AT , а нижний WHD – вокруг оси WD , где точки A, T, W, D неподвижны относительно кузова. Центр колеса M и центры сферических шарниров B, C, H образуют твердое тело $MBCNH$. С помощью рулевой тяги CF это твердое тело соединяется с рулевым управлением. Предполагается, что перемещение рулевого управления отсутствует, т.е. центр сферического шарнира F непод-

вижен относительно кузова. Точки B_1 и H_1 - проекции B и H на оси AT и WD . Звено 1 структурной схемы соответствует твердому телу $MBCH$, звенья 2 и 3 соответствуют верхнему ABT и нижнему WHD рычагам, звено 4 - рулевой тяге CF , в качестве стойки здесь берется кузов. Уберем лишние степени свободы, заменив сферическую пару C или F на сферическую с пальцем, тогда по формуле Сомова-Малышева на рис.1 будем иметь кинематическую цепь с одной степенью подвижности [1]. По аналогии с [4] в качестве обобщенной координаты q_1 этого механизма возьмем декартову координату z точки H . Здесь и далее все координаты берутся относительно системы $Oxyz$.

Будем считать, что известны не зависящие от q_1 координаты: $(x_{B_1}; y_{B_1}; z_{B_1})$, $(x_{H_1}; y_{H_1}; z_{H_1})$, $(x_F; y_F; z_F)$, $(x_A; y_A; z_A)$, $(x_T; y_T; z_T)$, $(x_W; y_W; z_W)$, $(x_D; y_D; z_D)$ точек B_1 , H_1 , F , A , T , W , D и длины отрезков $|BB_1|$, $|HH_1|$, $|BH|$, $|CH|$, $|CB|$, $|CF|$, $|MB|$, $|MH|$, $|MC|$. Отсюда нетрудно получить равенства, которые для рассматриваемого механизма выступают в качестве соотношений (1):

$$\begin{aligned} z_1 = q_1, & (x_1 - x_{H_1})(x_W - x_D) + (y_1 - y_{H_1})(y_W - y_D) + (z_1 - z_{H_1})(z_W - z_D) = 0, \\ & (x_1 - x_{H_1})^2 + (y_1 - y_{H_1})^2 + (z_1 - z_{H_1})^2 = |HH_1|^2, \\ (x_2 - x_{B_1})(x_A - x_T) + (y_2 - y_{B_1})(y_A - y_T) + (z_2 - z_{B_1})(z_A - z_T) = 0, \\ & (x_2 - x_{B_1})^2 + (y_2 - y_{B_1})^2 + (z_2 - z_{B_1})^2 = |BB_1|^2, \\ & (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = |BH|^2, \\ & (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 = |CH|^2, \\ & (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 = |CB|^2, \\ & (x_3 - x_F)^2 + (y_3 - y_F)^2 + (z_3 - z_F)^2 = |CF|^2, \\ & (x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2 + (z_4 - z_1)^2 = |MH|^2, \\ & (x_4 - x_2)^2 + (y_4 - y_2)^2 + (z_4 - z_2)^2 = |MB|^2, \\ & (x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2 + (z_4 - z_3)^2 = |MC|^2, \end{aligned} \quad (5)$$

где $(x_1; y_1; z_1)$, $(x_2; y_2; z_2)$, $(x_3; y_3; z_3)$, $(x_4; y_4; z_4)$ - декартовы координаты соответственно характерных точек H , B , C , M . В начальном положении механизма, которое определяется значением $q_1 = q_{11}$, координаты этих точек известны: $H(x_{11}; y_{11}; z_{11})$, $B(x_{21}; y_{21}; z_{21})$, $C(x_{31}; y_{31}; z_{31})$, $M(x_{41}; y_{41}; z_{41})$, $z_{11} = q_{11}$. Требуется найти их координаты $H(x_{12}; y_{12}; z_{12})$, $B(x_{22}; y_{22}; z_{22})$, $C(x_{32}; y_{32}; z_{32})$, $M(x_{42}; y_{42}; z_{42})$ в произвольно заданном положении механизма, определяемом значением $q_1 = q_{12}$. Таким образом, конкретная задача кинематики подвески поставлена в терминах и обозначениях общей задачи кинематики механизма. В нашем случае $n = 1$, $k = 4$.

Решим задачу пошаговым методом. Последовательность (2) построим, разбив отрезок $[q_{11}, q_{12}]$ на m равных частей:

$$h = (q_{12} - q_{11}) / m, \quad q_1^i = q_{11} + ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m. \quad (6)$$

Продифференцируем равенства (5) по q_1 . Получим систему двенадцати линейных уравнений относительно неизвестных двенадцати производных по q_1 координат точек H , B , C , M . Из этой системы, обозначая производные при помощи точки, будем иметь зависимости производных координат всех характерных точек от самих этих координат:

$$\begin{aligned} \dot{x}_v &= \dot{x}_v(x_1, y_1, z_1, \dots, x_4, y_4, z_4), \quad \dot{y}_v = \dot{y}_v(x_1, y_1, z_1, \dots, x_4, y_4, z_4), \\ \dot{z}_v &= \dot{z}_v(x_1, y_1, z_1, \dots, x_4, y_4, z_4), \quad v = 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \quad (7)$$

Последовательность (6) и зависимости (7) позволяют за m шагов определить координаты $(x_{v2}; y_{v2}; z_{v2}) = (x_v^m; y_v^m; z_v^m)$ характерных точек при $q_1 = q_{12} = q_1^m$, зная их координаты $(x_{v1}; y_{v1}; z_{v1}) = (x_v^0; y_v^0; z_v^0)$ при $q_1 = q_{11} = q_1^0$:

$$\begin{aligned} x_v^i &= x_v^{i-1} + \dot{x}_v(x_1^{i-1}, y_1^{i-1}, z_1^{i-1}, \dots, x_4^{i-1}, y_4^{i-1}, z_4^{i-1}) \cdot h, \\ y_v^i &= y_v^{i-1} + \dot{y}_v(x_1^{i-1}, y_1^{i-1}, z_1^{i-1}, \dots, x_4^{i-1}, y_4^{i-1}, z_4^{i-1}) \cdot h, \\ z_v^i &= z_v^{i-1} + \dot{z}_v(x_1^{i-1}, y_1^{i-1}, z_1^{i-1}, \dots, x_4^{i-1}, y_4^{i-1}, z_4^{i-1}) \cdot h, \\ v &= 1, 2, 3, 4, \quad i = 1, 2 \dots m. \end{aligned} \tag{8}$$

Для рассматриваемого в нашем случае механизма рекуррентные соотношения (8) выступают в качестве (3).

Решим задачу одношаговым методом. Первые три равенства из (5) образуют систему уравнений относительно трех неизвестных x_1, y_1, z_1 . Заменой переменных $x_1 - x_{H1} = x', y_1 - y_{H1} = y', z_1 - z_{H1} = z'$ эта система приводится к системе второго вида из (4), решив которую методом, предложенным в [6], получим $(x_1; y_1; z_1)$ - координаты точки H при любом фиксированном q_1 . Поскольку x_1, y_1, z_1 теперь известны, то следующие три равенства из (5) образуют систему уравнений относительно трех неизвестных x_2, y_2, z_2 . Заменой переменных $x_2 - x_1 = x', y_2 - y_1 = y', z_2 - z_1 = z'$ эта система также приводится к системе второго вида из (4), решив которую тем же методом, получим $(x_2; y_2; z_2)$ - координаты точки B . Так как x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 нами найдены, то седьмое, восьмое, девятое и десятое, одиннадцатое, двенадцатое равенства из (5) образуют две системы первого вида из (4) относительно неизвестных x_3, y_3, z_3 и x_4, y_4, z_4 . Решив системы, как и ранее методом [6], будем иметь $(x_3; y_3; z_3)$ и $(x_4; y_4; z_4)$ - координаты точек C и M . Таким образом, координаты характерных точек найдены при любом q_1 и, в частности, при $q_1 = q_{12}$.

Приведем и сравним результаты расчетов, полученных с использованием программного обеспечения ЭВМ, в основе которого лежат рассмотренные выше первый и второй алгоритмы определения кинематики механизма подвески. Координаты точек и длины отрезков будем измерять в миллиметрах.

Исходными данными для расчетов являлись координаты точек подвески автомобиля ВА3-21213 в начальном ее положении - при $q_{11} = -141,55$:

$$\begin{aligned} A(-174,00; -334,00; 207,00), \quad T(13,50; -334,00; 197,00), \quad W(-233,00; -248,00; -102,00), \\ D(14,00; -248,00; -116,00), \quad F(110,00; -296,40; -3,00), \quad H(x_{11}; y_{11}; z_{11}) = H(-6,14; \\ -643,35; -141,55), \quad B(x_{21}; y_{21}; z_{21}) = B(2,70; -574,69; 195,82), \quad C(x_{31}; y_{31}; z_{31}) = C(171,99; \\ -560,70; -4,67), \quad M(x_{41}; y_{41}; z_{41}) = M(-4,00; -718,50; -60,00). \end{aligned}$$

Вычислялись координаты характерных точек $H(x_{12}; y_{12}; z_{12})$, $B(x_{22}; y_{22}; z_{22})$, $C(x_{32}; y_{32}; z_{32})$, $M(x_{42}; y_{42}; z_{42})$ при максимальном перемещении подвески вверх, которое определялось значением $q_{12} = -63,53$. В качестве критериев оценки точности применяемого метода расчета служили длины $|HW|$, $|HD|$, $|BA|$, $|BT|$, $|BH|$, $|CF|$, $|CH|$, $|CB|$, $|MH|$, $|MB|$, $|MC|$, получаемые с использованием вычисленных $H(x_{12}; y_{12}; z_{12})$, $B(x_{22}; y_{22}; z_{22})$, $C(x_{32}; y_{32}; z_{32})$, $M(x_{42}; y_{42}; z_{42})$. В процессе перемещения механизма эти длины должны оставаться неизменными.

В таблице 1 показаны значения величин длин, найденных пошаговым методом при различных значениях числа шагов m , причем $m = 0$ соответствует начальному положению подвески - $q_{11} = -141,55$, а $m \neq 0$ - положению $q_{12} = -63,53$.

Зависимость величин длин от количества шагов расчета

m	$ HW $	$ HD $	$ BA $	$ BT $	$ BH $	$ CF $	$ CH $	$ CB $	$ MH $	$ MB $	$ MC $
0	457,53	396,69	298,80	240,94	344,40	271,48	239,37	262,78	110,92	293,55	242,76
5	458,86	398,23	300,84	243,46	345,39	273,62	239,40	262,78	110,93	293,57	242,79
10	458,20	397,46	299,83	242,22	345,88	272,56	239,39	262,78	110,93	293,56	242,78
20	457,86	397,07	299,32	241,58	346,18	272,02	239,38	262,78	110,92	293,55	242,77
50	457,66	396,84	299,01	241,20	346,38	271,70	239,37	262,78	110,92	293,55	242,77
100	457,59	396,76	298,90	241,07	346,45	271,59	239,37	262,78	110,92	293,55	242,77
200	457,56	396,72	298,85	241,00	346,49	271,53	239,37	262,78	110,92	293,55	242,77

Из таблицы 1 видно, что с увеличением m все значения длин, за исключением $|BH|$, стремятся к значениям, которые они имеют при $m = 0$. Значение же длины $|BH|$ все больше и больше отличается от своего значения, которое она имеет при нулевом m . Поэтому варьированием m обеспечить необходимую точность расчета, например, сделать все значения длин отличающимися от своих значений при $m = 0$ менее, чем на 0,1, не представляется возможным. Кроме того, ясно, что, не включив постоянство длины $|BH|$ в число критериев, можно прийти к неверным результатам. Значения величин длин, полученных одношаговым методом в положении $q_{12} = -63,53$, совпадают с теми, которые приведены в таблице при $m = 0$. Поэтому указанная необходимая точность заведомо обеспечена, и применение этого метода является более предпочтительным.

На простом примере мы показали эффективность одношагового подхода. Он всегда применим, когда либо все, либо только часть соотношений (1) сводятся к системам вида (4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Артоболевский И.И.** Теория механизмов и машин. М.: Наука, 1988. 640с.
2. **Мирзоев Г.К., Пешкилев А.Г.** Исследование кинематики подвески с помощью ЭЦВМ // Автомобильная промышленность. 1980. №2. С.12-14.
3. **Алышев И.И., Петракович А.Г.** Моделирование кинематики подвески Макферсона // Повышение производительности и безопасности автомобилей. М., 1989, С.58-62.
4. **Родионов В.Ф., Фиттерман Б.М.** Легковые автомобили. М.: Машиностроение, 1971. 504с.
5. **Рязанцев В.И., Федотов И.В.** Об алгоритмах решения частной задачи в моделях рулевых управлений автомобилей // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 1998. №10-12. С.41-46.
6. **Черных В.В.** Структурный анализ, расчет и многокритериальная оптимизация параметров и характеристик механизмов подвесок колес легковых автомобилей семейства "ВАЗ": Дис... канд. техн. наук. – Тольятти, 2002. – 141с. – Машинопись.
7. **Семенов Ю.А., Семенова Н.С.** Структурный анализ механизмов // Теория механизмов и машин. 2003, №2. С.3-14.

Поступила в редакцию 25.11.2003