

УДК 621
DOI 10.5862/TMM.32.2

Поступила в редакцию 01.03.2016

После доработки 20.10.2016

Принята к печати 23.11.2016



К ВОПРОСУ ОБ ОБРАТНОЙ ПРЕЦЕССИИ РОТОРА

М.Е. Подольский, С.В. Черенкова, М.А. Иванова

Подольский М.Е. – заслуженный деятель науки РФ, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Детали машин и подъемно-транспортных механизмов» Санкт-Петербургского государственного морского технического университета.

Черенкова С.В. - кандидат технических наук, доцент кафедры «Детали машин и подъемно-транспортных механизмов» Санкт-Петербургского государственного морского технического университета.

Иванова М.А. - кандидат технических наук, доцент кафедры «Детали машин и подъемно-транспортных механизмов» Санкт-Петербургского государственного морского технического университета.

190008, Санкт-Петербург, ул. Лоцманская, 3.

В ранее опубликованной статье «Физическая природа и условия возбуждения прямой и обратной прецессии», как и в большинстве публикаций по теории прецессионных движений роторов, задача о прецессии рассматривалась как задача о колебаниях. Это позволило различные виды прецессий рассматривать с единых позиций (траектории прецессий – это примеры кривых Лиссажу). Вместе с тем дискуссия с рецензентом показала, что целесообразно выполнить непосредственное определение скорости прецессии, без привлечения методов теории колебаний.

В настоящей статье для исследования прецессии – как прямой, так и обратной – используется рассмотренная в предыдущей статье на примере ротора Джеффкота очень простая модель, которая позволила свести задачу к изучению движения материальной точки и достаточно просто показать, что в рамках этой модели первопричиной прецессии и прямой, и обратной является центробежная сила, а обратная прецессия возникает как результат анизотропии упругих свойств опор ротора.

Реализация этой модели осуществлялась путем решения системы дифференциальных уравнений, которые записывались в полярной системе координат и использовались для анализа равномерного движения точки по окружности. Таким образом, задача интегрирования исходных уравнений в конечном итоге сводилась к определению постоянных величин: скорости и радиуса прецессии.

В результате оказалось, что в обоих рассмотренных случаях (изотропное и анизотропное поля жесткости опор) прецессия происходит с одной и той же по модулю скоростью, которая равна угловой скорости собственного вращения ротора, но направления прецессии разные (если поле жесткости изотропное – прецессия прямая, если оно анизотропное – обратная).

Из выполненного анализа с очевидностью следует также, что в условиях рассматриваемой задачи центробежная сила может вызвать не только прямую, но и, в зависимости от упругих свойств опор, обратную прецессию.

Ключевые слова: ротор, прямая прецессия, обратная прецессия, центробежная сила, поле жесткости опор.

В ранее опубликованной работе [1], как и в большинстве публикаций по теории прецессионных движений роторов [2-20], задача о прецессии рассматривалась как задача о колебаниях. Это позволило различные виды прецессий (прямая, обратная, синхронная, несинхронная) рассматривать с единых позиций (траектории прецессий – это примеры кривых Лиссажу [21], см. также [14]). Вместе с тем дискуссия с рецензентом показала, что результаты, полученные в [1], целесообразно дополнить непосредственным определением скорости прецессии, без привлечения методов теории колебаний.

Частично это уже было сделано в самой статье [1], где на примере ротора Джеффко-та [22] прецессия, по аналогии с известной поговоркой, была уподоблена движению иголки и нитки: вращающаяся вместе с ротором центробежная сила («иголка») вовлекает во вращательное движение изогнутую ось вала¹ («нитку»). Применительно к прямой прецессии такая трактовка почти очевидна. Однако она вряд ли может выглядеть убедительно, если прецессия обратная, то есть если ось вала и ротор вращаются в противоположные стороны. К этому следует добавить, что хотя о явлении обратной прецессии известно уже давно [2], в литературе, и тем более в учебной [4-10], она освещена явно недостаточно, и даже в такой капитальной работе, как [23], лишь подчеркивается, что предметом изучения является только прямая прецессия.

В настоящей статье для исследования прецессии – как прямой, так и обратной – используется рассмотренная в [1] очень простая модель, которая позволила свести задачу к изучению движения материальной точки и достаточно просто показать, что в рамках этой модели обратная прецессия возникает как результат анизотропии упругих свойств опор ротора.

Расчетная схема (обоснована в [1]) показана на рис. 1. Рассматривается движение материальной точки под действием двух сил: вращающейся с угловой скоростью ω

центробежной силы $m\omega^2\vec{e}$ и упругой силы \vec{F} .

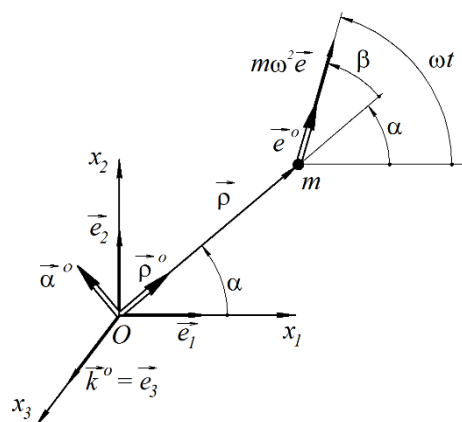


Рис. 1.

Дифференциальное уравнение движения точки в общепринятых обозначениях можно записать в виде:

$$m\ddot{\vec{\rho}} = m\omega^2\vec{e} - \vec{F}. \quad (1)$$

Силу \vec{F} будем определять формулой (см. Приложение)

$$\vec{F} = \vec{\rho} \cdot \underline{\underline{c}}, \quad (2)$$

где $\underline{\underline{c}}$ – тензор жесткости, а точкой обозначена операция скалярного умножения.

В общем случае анизотропного поля жесткостей (рассматривается плоская задача)

$$\underline{\underline{c}} = c_{11}\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2. \quad (3)$$

Если поле жесткостей изотропно, то

$$c_{11} = c_{22} = c, \quad (4)$$

и выражение для $\underline{\underline{c}}$ упрощается

$$\underline{\underline{c}} = c\underline{\underline{e}}. \quad (5)$$

Фигурирующий в (5) тензор $\underline{\underline{e}}$ – это двумерный аналог единичного тензора $\underline{\underline{E}}$ в трехмерном пространстве [24].

С учетом свойств единичного тензора, из (2) и (5) для силы \vec{F} в предположении (4) получим

¹ Здесь и далее под вращением оси вала понимается вращение плоскости, в которой располагается ось после ее изгиба.

$$\vec{F} = c\vec{\rho}. \quad (6)$$

В результате (см. (1)) приходим к дифференциальному уравнению для вектора $\vec{\rho}$:

$$\frac{d^2\vec{\rho}}{dt^2} = \omega^2\vec{e} - \frac{c}{m}\vec{\rho}. \quad (7)$$

Преобразуем выражение для производной $d^2\vec{\rho}/dt^2$. Для этого введем в рассмотрение единичные векторы $\vec{\rho}^0$, $\vec{\alpha}^0$, \vec{k}^0 и \vec{e}^0 (см. рис. 1) и заметим, что

$$\begin{aligned} \vec{\rho} &= \rho\vec{\rho}^0, \quad \vec{e} = e\vec{e}^0, \\ \vec{e}^0 &= \cos\beta\vec{\rho}^0 + \sin\beta\vec{\alpha}^0, \\ \vec{\rho}^0 &= \vec{\alpha}^0 \times \vec{k}^0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\beta = \omega t - \alpha. \quad (9)$$

Из (8) следует, что

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \dot{\rho}\vec{\rho}^0 + \rho\dot{\vec{\rho}}^0, \quad (10)$$

$$\dot{\vec{\rho}}^0 = \dot{\vec{\alpha}}^0 \times \vec{k}^0 + \vec{\alpha}^0 \times \dot{\vec{k}}^0.$$

Второе слагаемое в правой части формулы (10₂) равно нулю (в условиях рассматриваемой задачи вектор \vec{k}^0 постоянен). Поэтому

$$\dot{\vec{\rho}}^0 = \dot{\vec{\alpha}}^0 \times \vec{k}^0. \quad (11)$$

По известной формуле кинематики (см. также [25]),

$$\dot{\vec{\alpha}}^0 = \vec{\Omega} \times \vec{\alpha}^0, \quad (12)$$

где $\vec{\Omega}$ – вектор, определяющий скорость изменения углового положения вектора $\vec{\alpha}^0$. Из рис. 1 видно, что орт этого вектора есть \vec{k}^0 , а численное значение (в том числе и по знаку) равно $\dot{\alpha}$. Следовательно, вектор $\vec{\Omega}$ в (12) определяется формулой

$$\vec{\omega} = \dot{\alpha}\vec{k}^0. \quad (13)$$

Поскольку (см. рис. 1)

$$\vec{k}^0 \times \vec{\alpha}^0 = -\vec{\rho}^0, \quad (14)$$

то формула (12) дает

$$\dot{\vec{\alpha}}^0 = \dot{\alpha}\vec{k}^0 \times \vec{\alpha}^0 = -\dot{\alpha}\vec{\rho}^0, \quad (15)$$

а из (11) получим

$$\dot{\vec{\rho}}^0 = -\dot{\alpha}\vec{\rho}^0 \times \vec{k}^0 = \dot{\alpha}\vec{k}^0 \times \vec{\rho}^0. \quad (16)$$

Отсюда, поскольку (см. рис. 1):

$$\vec{k}^0 \times \vec{\rho}^0 = \vec{\alpha}^0, \quad (17)$$

следует, что

$$\dot{\vec{\rho}}^0 = \dot{\alpha}\vec{\alpha}^0. \quad (18)$$

В результате, подставив (18) в (10₁), приходим к формуле для $d\vec{\rho}/dt$:

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \dot{\rho}\vec{\rho}^0 + \rho\dot{\alpha}\vec{\alpha}^0. \quad (19)$$

Производную $d^2\vec{\rho}/dt^2$ найдем, выполняя преобразования, аналогичные предыдущим:

$$\frac{d^2\vec{\rho}}{dt^2} = (\ddot{\rho} - \dot{\alpha}^2\rho)\vec{\rho}^0 + \rho\ddot{\alpha}\vec{\alpha}^0 + 2\dot{\alpha}\dot{\rho}\vec{\alpha}^0. \quad (20)$$

Кинематический смысл формул (19) и (20) очевиден. Это формулы для абсолютных скорости и ускорения точки, движущейся вместе с вращающимся телом и по отношению к нему.

Возвращаясь к векторному уравнению (7), представим его в виде двух скалярных уравнений (проекции уравнения (7) на орты $\vec{\rho}^0$ и $\vec{\alpha}^0$). Воспользовавшись формулами (20), (8) и (9), получим

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\rho} - \rho\dot{\alpha}^2 + \frac{c}{m}\rho &= \omega^2 e \cos(\omega t - \alpha), \\ \rho\ddot{\alpha} + 2\dot{\alpha}\dot{\rho} &= \omega^2 e \sin(\omega t - \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Ограничимся анализом равномерного движения точки по окружности. В этом случае

$$\rho = \text{const}, \quad \dot{\alpha} = \Omega = \text{const} \quad (22)$$

и (см. (21)):

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{c}{m} - \Omega^2\right) \rho &= \omega^2 e \cos(\omega t - \alpha), \\ \omega^2 e \sin(\omega t - \alpha) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Продифференцируем (23₂) по времени. Получим

$$(\omega - \dot{\alpha}) \cos(\omega t - \alpha) = 0. \quad (24)$$

Так как, согласно (23₂),

$$\sin(\omega t - \alpha) = 0, \quad (25)$$

то $\cos(\omega t - \alpha) \neq 0$, и из (24) следует, что

$$\dot{\alpha} = \omega, \quad (26)$$

и, значит (см. (22₂))

$$\Omega = \omega. \quad (27)$$

Формула (27) означает, что моделирующее прецессию вращение вектора $\vec{\rho}$ происходит в ту же сторону и с такой же скоростью, что и собственное вращение ротора вокруг его оси. Таким образом, в рассматриваемых условиях (поле жесткостей изотропно) ротор совершает прямую ($\text{sign} \Omega = \text{sign} \omega$) синхронную ($|\Omega| = |\omega|$) прецессию.

Замечая, что, в силу (25):

$$\cos(\omega t - \alpha) = \pm 1, \quad (28)$$

и принимая во внимание (23₁), получим формулу

$$\rho = \pm \frac{e}{(k^2 / \omega^2) - 1}, \quad k = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad (29)$$

из которой следует, что величина ρ будет положительной, если ее определять формулами

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{e}{(k^2 / \omega^2) - 1} \quad \text{при } \omega < k \text{ и} \\ \rho &= \frac{e}{1 - (k^2 / \omega^2)} \quad \text{при } \omega > k. \end{aligned} \quad (30)$$

Остановимся еще на анализе взаимного углового положения векторов $\vec{\rho}^0$ и \vec{e}^0 . Оно определяется углом β (см. формулу (9)). Из (23), (25), (28), (29) и (30) следует, что

$$\begin{aligned} \sin \beta &= 0, \quad \cos \beta = 1 \quad \text{при } \omega < k \text{ и} \\ \cos \beta &= -1 \quad \text{при } \omega > k. \end{aligned} \quad (31)$$

Таким образом, линия действия вектора $\vec{\rho}$ совпадает с линией действия центробежной силы, но если $\omega < k$, то вектор $\vec{\rho}$ направлен в ту же сторону, что и центробежная сила, и в противоположную, если $\omega > k$.

Результаты, определяемые формулами (27), (30) и (31), во-первых, совпадают с результатами, полученными в [1], и во-вторых, служат дополнительным подтверждением правомерности модели «иголка-нитка». Физический смысл изменения направления вектора $\vec{\rho}$ на противоположное при $\omega > k$ рассмотрен в [1].

Откажемся теперь от предположения об изотропности поля жесткостей и рассмотрим более общий случай, задавая тензор \underline{c} по-прежнему формулой (3), но не используя предположение (4).

В базисе $\{\vec{\rho}^0 \otimes \vec{\alpha}^0\}$ (см. рис. 1) формулу для тензора \underline{c} можно записать так

$$\begin{aligned} \underline{c} &= c_{\rho\rho} \vec{\rho}^0 \otimes \vec{\rho}^0 + c_{\alpha\alpha} \vec{\alpha}^0 \otimes \vec{\alpha}^0 + \\ &+ c_{\rho\alpha} \vec{\rho}^0 \otimes \vec{\alpha}^0 + c_{\alpha\rho} \vec{\alpha}^0 \otimes \vec{\rho}^0, \end{aligned} \quad (32)$$

а для упругой силы \vec{F} (она определяется формулой (2)) получим

$$\begin{aligned} \vec{F} &= c_{\rho\rho} (\vec{\rho} \cdot \vec{\rho}^0) \vec{\rho}^0 + c_{\alpha\alpha} (\vec{\rho} \cdot \vec{\alpha}^0) \vec{\alpha}^0 + \\ &+ c_{\rho\alpha} (\vec{\rho} \cdot \vec{\rho}^0) \vec{\alpha}^0 + c_{\alpha\rho} (\vec{\rho} \cdot \vec{\alpha}^0) \vec{\rho}^0. \end{aligned} \quad (33)$$

Отсюда, с учетом взаимной перпендикулярности векторов $\vec{\rho}^0$ и $\vec{\alpha}^0$, находим

$$\vec{F} = \rho (c_{\rho\rho} \vec{\rho}^0 + c_{\rho\alpha} \vec{\alpha}^0). \quad (34)$$

Для того чтобы найти компоненты $c_{\rho\rho}$ и $c_{\rho\alpha}$ воспользуемся формулой [24], определяющей компоненту α_{mn} тензора $\underline{\alpha} = \alpha_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$:

$$\alpha_{mn} = \vec{e}_m \cdot \underline{\underline{\alpha}} \cdot \vec{e}_n. \quad (35)$$

Полагая в этой формуле $\vec{e}_m = \vec{\rho}^0$, $\vec{e}_n = \vec{\alpha}^0$, $\underline{\underline{\alpha}} = \underline{\underline{c}}$, где $\underline{\underline{c}}$ – по формуле (3), и вводя, для простоты записи, обозначения

$$c_{11} = c_1, \quad c_{22} = c_2, \quad (36)$$

приходим к формулам (см. также рис. 1)

$$\begin{aligned} c_{\rho\rho} &= \vec{\rho}^0 \cdot (c_1 \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + c_2 \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2) \cdot \vec{\rho}^0 = \\ &= c_1 \cos^2 \alpha + c_2 \sin^2 \alpha, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} c_{\rho\alpha} &= \vec{\rho}^0 \cdot (c_1 \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + c_2 \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2) \cdot \vec{\alpha}^0 = \\ &= -c_1 \cos \alpha \sin \alpha + c_2 \sin \alpha \cos \alpha = \\ &= (c_2 - c_1) \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned} \quad (38)$$

В результате из (37), (38) и (34) находим упругую силу \vec{F} :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \rho \left[(c_1 \cos^2 \alpha + c_2 \sin^2 \alpha) \vec{\rho}^0 \right] + \\ &+ \rho (c_2 - c_1) \sin \alpha \cos \alpha \vec{\alpha}^0, \end{aligned} \quad (39)$$

а система дифференциальных уравнений движения будет отличаться от (21) лишь тем, что в левой части (21₂) появится слагаемое

$$\frac{\rho}{m} (c_2 - c_1) \sin \alpha \cos \alpha, \quad (40)$$

а слагаемое $(c/m)\rho$ в (21₁) заменится на

$$\frac{\rho}{m} (c_1 \cos^2 \alpha + c_2 \sin^2 \alpha). \quad (41)$$

Этими формулами учитывается анизотропия задачи в случае $c_2 \neq c_1$.

В результате приходим к уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\rho} - \rho \dot{\alpha}^2 + \rho (k_1^2 \cos^2 \alpha + k_2^2 \sin^2 \alpha) &= \\ = \omega^2 e \cos(\omega t - \alpha), \\ \rho \ddot{\alpha} + 2\dot{\alpha} \dot{\rho} + \rho (k_2^2 - k_1^2) \sin \alpha \cos \alpha &= \\ = \omega^2 e \sin(\omega t - \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Здесь (см. также (29₂))

$$k_1^2 = \frac{c_1}{m}, \quad k_2^2 = \frac{c_2}{m}. \quad (43)$$

Как и выше, будем искать только те решения системы (42), которые удовлетворяют условиям (22). Полагая на этом основании

$$\dot{\alpha} = \Omega, \quad \alpha = \Omega t, \quad \dot{\rho} = 0, \quad \ddot{\rho} = 0, \quad (44)$$

из (42) получим

$$\left. \begin{aligned} -\Omega^2 + (k_1^2 \cos^2 \Omega t + k_2^2 \sin^2 \Omega t) &= \\ = \omega^2 \frac{e}{\rho} \cos[(\omega - \Omega)t], \\ \frac{\rho}{2\omega^2 e} (k_2^2 - k_1^2) \sin 2\Omega t &= \\ = \sin[(\omega - \Omega)t]. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Рассмотрим уравнение (45₂). В обозначениях

$$\begin{aligned} A &= \frac{\rho}{2\omega^2 e} (k_2^2 - k_1^2), \\ q &= 2\Omega, \\ s &= \omega - \Omega \end{aligned} \quad (46)$$

оно может быть записано так:

$$A \sin qt = \sin st. \quad (47)$$

Задача теперь состоит в том, чтобы найти A , s и q . Уравнение (47) справедливо при любых t . Поэтому, наряду с (47), можно также рассматривать уравнение

$$q A \cos qt = s \cos st, \quad (48)$$

которое получается дифференцированием обеих частей (47) по времени.

Из (45) и (46) следует, что

$$q \neq 0 \text{ и } s \neq 0. \quad (49)$$

Действительно, если, например, предположить, что $q = 0$, т.е., согласно (46), принять $\Omega = 0$, то система (45) сведется к уравнениям

$$\left. \begin{aligned} k_1^2 &= \omega^2 \frac{e}{\rho} \cos \omega t, \\ 0 &= \sin \omega t, \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

которые можно считать справедливыми, только если $\omega = 0$, то есть в случае неподвижного (не вращающегося) ротора.

Если же $s = 0$, то из (45) получим (в этом случае $\Omega = \omega$):

$$\left. \begin{aligned} -\omega^2 + k_1^2 \cos^2 \omega t + k_2^2 \sin^2 \omega t &= \omega^2 \frac{e}{\rho}, \\ \frac{\rho}{2\omega^2 e} (k_2^2 - k_1^2) \sin 2\omega t &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Оба эти равенства действительно выполняются, но лишь при условии

$$k_1^2 = k_2^2, \quad (52)$$

то есть в предположении, что (см. также (43)):

$$c_2 = c_1. \quad (53)$$

В противном случае, то есть при $k_1^2 \neq k_2^2$ формула (51₂) неверна, что и оправдывает неравенство (49₂).

Но равенство (53) – это условие (4), которым определяется изотропность поля жесткостей. Таким образом, в условиях рассматриваемой задачи (постоянство скорости прецессии) неравенство (49₂), то есть неравенство

$$\Omega \neq \omega. \quad (54)$$

является непосредственным следствием предположения о том, что поле жесткостей неизотропно.

Рассматривая теперь совместно уравнения (47) и (48), получим

$$\begin{aligned} A^2 \cos^2 qt &= \frac{s^2}{q^2} \cos^2 st \Rightarrow \\ \Rightarrow A^2 &= A^2 \sin^2 qt + \frac{s^2}{q^2} \cos^2 st = \\ &= \sin^2 st + \frac{s^2}{q^2} \cos^2 st, \end{aligned}$$

так что

$$A^2 - 1 = \left(\frac{s^2}{q^2} - 1 \right) \cos^2 st. \quad (55)$$

Так как A от времени не зависит, не должна зависеть от времени и правая часть уравнения (55). Но поскольку, по доказанному, $s \neq 0$, это возможно лишь при условии обращения в нуль коэффициента перед $\cos^2 st$. В результате из (55) получим

$$A^2 = 1 \Rightarrow A = \pm 1 \text{ и } s^2 = q^2. \quad (56)$$

Если в (48) положить $t = 0$, то получим формулу

$$qA = s, \quad (57)$$

из которой с учетом (46), следует, что если

$$A = 1, \text{ то } 2\Omega = \omega - \Omega \Rightarrow \Omega = \frac{1}{3}\omega, \quad (58)$$

и если

$$\begin{aligned} A = -1, \text{ то} \\ 2\Omega = -\omega + \Omega \Rightarrow \Omega = -\omega. \end{aligned} \quad (59)$$

Формулы (58) и (59) получены путем анализа только одного из уравнений системы (45) – уравнения (45₂). Обращаясь к уравнению (45₁), заметим, что фигурирующая в нем величина $\omega^2 e / \rho$ связана с величиной A из (46₁) формулой

$$\frac{\omega^2 e}{\rho} = \frac{k_2^2 - k_1^2}{2A}. \quad (60)$$

Поэтому (см. (58) и (59)) нужно рассматривать два варианта: $A = -1$ и $A = 1$. Наибольший интерес представляет первый из них. В этом случае (см. (59))

$$\Omega = -\omega, \quad (61)$$

и из (45₁) приходим к формуле

$$\begin{aligned} \omega^2 &= k_1^2 \cos^2 \omega t + k_2^2 \sin^2 \omega t + \\ &+ \frac{k_2^2 - k_1^2}{2} (\cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t), \end{aligned} \quad (62)$$

которая после очевидных преобразований приводится к виду

$$\omega^2 = \frac{k_1^2 + k_2^2}{2}. \quad (63)$$

Физический смысл этой формулы состоит в том, что если ротор вращается со скоростью, определяемой формулой (63), то он, согласно (61), совершает прецессию, которая, в силу (61), является синхронной ($|\Omega| = |\omega|$) и обратной ($\text{sign } \Omega = -\text{sign } \omega$).

Рассмотрим теперь вариант $A=1$. Поступая, как и выше, и принимая (см.(58)) $\Omega = \omega/3$, получим

$$\omega^2 = 9 \left(\frac{3k_1^2 - k_2^2}{2} \cos^2 \frac{\omega}{3} t \right) + 9 \frac{3k_2^2 - k_1^2}{2} \sin^2 \frac{\omega}{3} t. \quad (64)$$

В отличие от (63), квадрат угловой скорости ротора определяется формулой (64) как некоторая функция времени, которая не является постоянной. А поскольку в ее исходной постановке задача рассматривалась как задача о движении с постоянными скоростями ω и Ω , то решение, отвечающее значению $A=1$, должно быть отброшено. В этой связи нужно заметить, что если $k_1 = k_2$, в правой части (64) получим не зависящую от времени постоянную величину. Однако на окончательный результат это обстоятельство не влияет, ибо возможность совпадения k_1 и k_2 друг с другом исключается из рассмотрения самой постановкой задачи (см. обоснование неравенства (49₂)).

Помимо Ω прецессия определяется также длиной вектора $\vec{\rho}$ (см. рис. 1). Если считать, что $k_2 > k_1$, то для $|\vec{\rho}|$, в силу (60), (63) и (64), получим

$$|\vec{\rho}| = \frac{k_1^2 + k_2^2}{k_2^2 - k_1^2} e. \quad (65)$$

Полученные в настоящей статье результаты согласуются с известными решениями и тем самым подтверждают правомерность принятой модели, а ее математическое описание содержит непосредственное указание на ту роль, которую в возникновении обрат-

ной прецессии играет анизотропия поля жесткостей (см. третье слагаемое в левой части уравнения (42₂)). Из рис. 1 видно также, что первопричиной прецессии является центробежная сила, развиваемая в процессе собственного вращения ротора, причем это относится как к прямой, так и, в условиях рассматриваемой в настоящей статье задачи, к обратной прецессии.

ПРИЛОЖЕНИЕ. Упругая реакция анизотропных опор

Схема задачи показана на рис. 2. Реакция опоры равна взятой со знаком минус силе

$$\vec{F} = c_1 x_1 \vec{e}_1 + c_2 x_2 \vec{e}_2, \quad (\text{П1})$$

где x_1 и x_2 – перемещения вдоль координатных осей; c_1 и c_2 – отвечающие этим перемещениям жесткости.

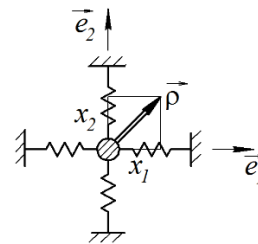


Рис. 2.

Поскольку

$$x_1 = \vec{\rho} \cdot \vec{e}_1, \quad x_2 = \vec{\rho} \cdot \vec{e}_2, \quad (\text{П2})$$

формулу (П1) можно записать в виде

$$\vec{F} = c_1 (\vec{\rho} \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_1 + c_2 (\vec{\rho} \cdot \vec{e}_2) \vec{e}_2. \quad (\text{П3})$$

Принимая во внимание, что

$$\begin{aligned} (\vec{\rho} \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_1 &= \vec{\rho} \cdot (\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1), \\ (\vec{\rho} \cdot \vec{e}_2) \vec{e}_2 &= \vec{\rho} \cdot (\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2). \end{aligned} \quad (\text{П4})$$

из (П3) для \vec{F} получим

$$\vec{F} = \vec{\rho} \cdot \underline{\underline{c}}, \quad (\text{П5})$$

где

$$\underline{\underline{c}} = c_1 \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + c_2 \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2. \quad (\text{П6})$$

В этих формулах \underline{c} – тензор жесткости, умножения (см. [24], краткие сведения о тензорном исчислении см. [25]).
знаком \otimes обозначена операция тензорного

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Подольский М.Е., Черенкова С.В.** Физическая природа и условия возбуждения прямой и обратной прецессии ротора. // Теория механизмов и машин. 2014. Том 12. №1. С. 27-40.
2. **Диментберг Ф.М.** Изгибные колебания вращающихся валов. – М.: Академия наук СССР, 1959. – 258 с.
3. **Dimentberg F.M.** Flexural Vibrations of Rotating Shafts. – London: Butter worths, 1961. – 243 p.
4. **Вульфсон И.И., Ерихов М.Л., Коловский М.З., Семенов Ю.А., Слоущ А.В. и др.** Механика машин / Под редакцией Г.А. Смирнова. – М.: Высш. шк., 1996. – 511 с.
5. Детали машин / под ред. **О.А. Ряховского** – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004 – 520 с.
6. **Дмитриев В.А.** Детали машин. – Л.: Судостроение, 1970. – 791 с.
7. **Иванов М.Н., Финогонов В.А.** Детали машин. – М.: Высш. шк., 2008. – 408 с.
8. **Иосилевич Г.Б.** Детали машин. – М.: Машиностроение, 1988. – 368 с.
9. **Красковский Е.Я., Дружинин Ю.А., Филатова Е.М.** Расчет и конструирование механизмов приборов и вычислительных систем / Под редакцией Ю.А. Дружинина. – М.: Высш. шк., 1991. – 480 с.
10. **Кудрявцев В.Н.** Детали машин. – Л.: Машиностроение, 1980. – 464 с.
11. **Бидерман В.Л.** Теория механических колебаний. – М.: Высш. шк., 1980. – 408 с.
12. Вибрация энергетических машин. Справочное пособие. / **Н.В. Григорьев, Н.Г. Беляковский, В.К. Дондошанский.** Под ред. д.т.н. Н.В. Григорьева. – Л.: Машиностроение, 1974. – 464 с.
13. **Диментберг Ф.М., Шаталов К.Т., Гусаров А.А.** Колебания машин. – М.: Машиностроение, 1964. – 307 с.
14. **Костюк А.Г.** Динамика и прочность турбомашин. – М.: Издательский дом МЭИ, 2007. – 476 с.
15. **Пановко Я.Г.** Механика деформируемого твердого тела: Современные концепции, ошибки и парадоксы. – М.: Наука, 1985. – 288 с.
16. **Пановко Я.Г.** Основы прикладной теории колебаний и удара. – Л.: Машиностроение, 1976. – 320 с.
17. **Позняк Э.Л.** Колебания роторов // В справочнике «Вибрации в технике». – М.: Машиностроение, 1980. – Том 3. С. 130-189.
18. **Раер Г.А.** Динамика и прочность центробежных компрессорных машин. – Л.: Машиностроение, 1968. – 258 с.
19. **Тимошенко С.П.** Колебания в инженерном деле. – М.: ГИФМЛ, 1959. – 439 с.
20. **Тондл А.** Динамика роторов турбогенераторов. / Пер. с англ. Б.Ш. Неймана под ред. В.И. Олимпиева. – М.-Л.: Энергия, 1971. – 387 с.
21. **Фриш С.Э., Тиморева А.В.** Курс общей физики (том 1). – М.: ГИФМЛ, 1962. – 468с.
22. **Пасынкова И.А., Сабонеев В.С.** Из истории развития динамики роторов // Четвертые Поляховские чтения: Избранные труды. – СПб.: Изд-во ВВМ, 2006. – С. 644-654.
23. **Пасынкова И.А.** Динамика прецессионного движения неуравновешенного ротора / Дисс. на соиск. ученой степени докт. физ.-мат. наук. – СПб.: С.-Петербург. гос. ун-т, 2006. – 217 с.
24. **Подольский М.Е.** Физико-механические основы и некоторые инженерные приложения прямого тензорного исчисления: монография. – СПб: Изд-во СПбГМТУ, 2011. – 466 с.
25. **Подольский М.Е., Черенкова С.В.** О кинематике пространственного движения твердого тела. // Теория механизмов и машин. 2015. Том 13.