

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Статья отражает опыт преподавания одного из разделов курса ТММ на практических занятиях в СПбГПУ. Она не претендует на полноту, ввиду многочисленности исследований, посвященных указанной теме. Статья является продолжением работы [1].

1. Задачи геометрического анализа

Целью геометрического анализа является определение *функций положения механизма* - зависимостей выходных координат x_1, x_2, \dots, x_m , характеризующих положения его звеньев, от заданных входных координат q_1, q_2, \dots, q_n . Для механизмов с n степенями подвижности эти функции записываются в форме

$$x_s = \Pi_s(q_1, q_2, \dots, q_n), \quad s = 1, 2, \dots, m. \quad (1)$$

Определение этих зависимостей составляет *прямую задачу геометрического анализа*. При заданных законах изменения входных координат $q_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) можно, решив прямую задачу, найти законы изменения выходных координат, как функций времени

$$x_s(t) = \Pi_s[q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)], \quad s = 1, 2, \dots, m. \quad (2)$$

Для механизма с одной степенью подвижности функции положения являются функциями одной независимой переменной q :

$$x_s = \Pi_s(q), \quad s = 1, 2, \dots, m. \quad (3)$$

Исследование функций положения механизма, также проводимое в ходе геометрического анализа, позволяет оценить его функциональные возможности.

В механизмах с несколькими степенями подвижности приходится решать *обратную задачу геометрического анализа*, связанную с определением входных координат q_1, q_2, \dots, q_n по заданным значениям некоторых выходных координат x_1, x_2, \dots, x_m . В общем случае речь идет об определении функций

$$q_k = \Phi_k(x_1, x_2, \dots, x_m), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

2. Геометрический анализ открытых кинематических цепей

Рассмотрим кинематическую цепь, имеющую структуру «дерево», и покажем, каким образом можно получить функции положения такой цепи.

Пример 1. Определим координаты полюса M схвата трехзвенного робота (рис.1), если известны входные координаты $q_1 = 150^\circ$, $q_2 = 240^\circ$, $q_3 = 0,8$ м и постоянные параметры открытой кинематической цепи $OA = \ell_1 = 0,6$ м; $BM = \ell_3 = 0,5$ м. Здесь угол q_1 отсчитывается от положительного направления оси Ox до вектора \overline{OA} против часовой стрелки, если смотреть с конца оси Oz . Угол q_2 отсчитывается от вектора \overline{OA} до вектора \overline{AB} также против часовой стрелки.

Координаты полюса определим последовательно из уравнений

$$\begin{aligned} x_A &= \ell_1 \cos q_1 = -0,5196 \text{ м}; & y_A &= \ell_1 \sin q_1 = 0,3 \text{ м}; \\ x_B &= x_A + q_3 \cos(q_1 + q_2) = 0,1732 \text{ м}; & y_B &= y_A + q_3 \sin(q_1 + q_2) = 0,7 \text{ м}; \\ x_M &= x_B - \ell_3 \sin(q_1 + q_2) = -0,0768 \text{ м}; & y_M &= y_B + \ell_3 \cos(q_1 + q_2) = 1,133 \text{ м}. \end{aligned}$$

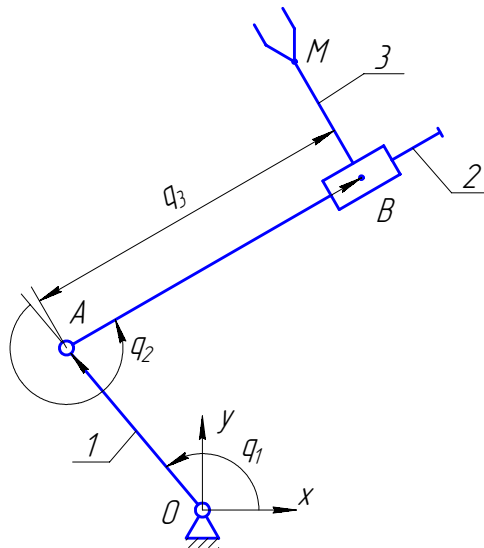


Рис. 1

Уравнения, связывающие выходные координаты с входными, называются *уравнениями геометрического анализа*. Для открытых кинематических цепей они имеют *единственное* решение, т.е. задание входных координат q_1, q_2, \dots, q_n однозначно определяет конфигурацию кинематической цепи, имеющей структуру «дерево».

Дальнейшее исследование уравнений геометрического анализа позволяет оценить функциональные возможности открытых кинематических цепей с помощью таких геометрических характеристик, как *рабочий объем*, *коэффициент сервиса* и т.п.

3. Составление уравнений геометрического анализа для замкнутых кинематических цепей

В простых случаях функции положения можно получить, анализируя геометрические фигуры, образующие контуры механизма.

Пример 2. Определим функции положения кривошипно-ползунного механизма, показанного на рис.2.

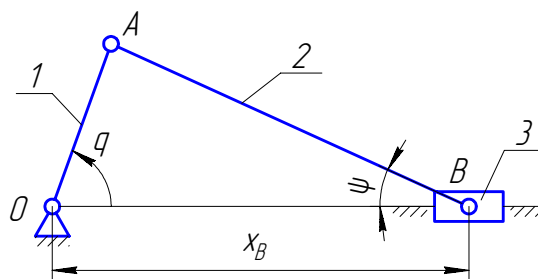


Рис. 2

Для механизма входной координатой является q - угол поворота кривошипа 1, а выходными координатами, определяющими положение шатуна 2 и ползуна 3, можно считать угол ψ и координату x_B . Из треугольника OAB несложно получить

$$\psi = \arcsin(l_1 \sin q / l_2), \quad x_B = l_1 \cos q + l_2 \cos \psi = l_1 \cos q + \sqrt{l_2^2 - l_1^2 \sin^2 q},$$

где l_1 - радиус кривошипа, l_2 - длина шатуна.

В более сложных случаях можно применить рассмотренный выше метод составления уравнений геометрического анализа для открытых кинематических цепей. Предлагается следующая последовательность действий.

1. Путем условного размыкания некоторых кинематических пар необходимо замкнутую кинематическую цепь привести к одной или к нескольким открытым кинематическим цепям типа «дерево».

2. Ввести *относительные* координаты, определяющие положение каждого звена «дерева» по отношению к предыдущему звену, или *абсолютные* координаты, характеризующие положения всех звеньев по отношению к положительному направлению оси Ox . При этом наряду с входными координатами появляются *дополнительные* координаты.

3. Число введенных дополнительных координат должно совпасть с числом разомкнутых связей, называемым *степенью замкнутости* механизма.

4. Для всех разомкнутых цепей необходимо составить уравнения геометрического анализа.

5. Для разорванных ранее цепей записать *условия их замыкания*, которые и являются уравнениями геометрического анализа для замкнутых цепей. Число таких уравнений должно быть равно числу введенных дополнительных координат.

6. Уравнения геометрического анализа удобнее составлять для структурных групп, т.е. их приводить к структуре «дерево». *Погруппный* метод позволяет всю систему уравнений геометрического анализа разделить на несколько независимых уравнений более низкого порядка, которые будут решаться последовательно для каждой группы в последовательности их присоединения к стойке. В этом случае дополнительные координаты будем называть *групповыми*, а уравнения геометрического анализа – *групповыми уравнениями*.

7. На графе механизма обозначить размыкания цепей и координаты, определяющие положение каждого звена «дерева», а на структурном графе – входные и выходные координаты структурных групп.

Пример 3. Составим уравнения геометрического анализа для шарнирного четырехзвенника, показанного на рис.3,а. Размыкая кинематическую цепь в шарнире A (на границе групп), приведем ее к структуре «дерево». Введем входную координату q и групповые координаты φ_{30} и φ_{23} , характеризующие положение каждого звена по отношению к предыдущему. Обозначим эти координаты на графе механизма (рис.3,б). Число введенных групповых координат φ_{30} и φ_{23} совпадает с числом разомкнутых связей ($\delta x_A \neq 0, \delta y_A \neq 0$). Степень замкнутости механизма равна двум.

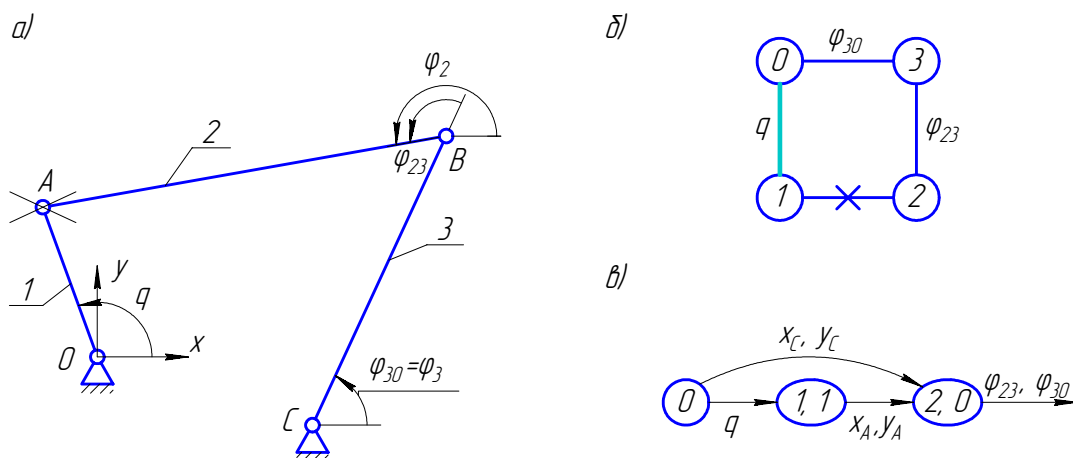


Рис. 3

Задание входной координаты q однозначно определяет положение однозвенной одноподвижной группы. Уравнения

$$\ell_1 \cos q = x_A^{(1)}, \quad \ell_1 \sin q = y_A^{(1)}$$

определяют зависимости выходных координат группы $x_A^{(1)}, y_A^{(1)}$ от входной координаты q . Проецируя ломаную CBA на оси координат Oxy , получим

$$\begin{aligned} x_C + \ell_3 \cos \varphi_{30} + \ell_2 \cos(\varphi_{30} + \varphi_{23}) &= x_A^{(2)}, \\ y_C + \ell_3 \sin \varphi_{30} + \ell_2 \sin(\varphi_{30} + \varphi_{23}) &= y_A^{(2)}. \end{aligned}$$

Составим условия замыкания первой и второй цепи

$$x_A^{(1)} = x_A^{(2)}, \quad y_A^{(1)} = y_A^{(2)},$$

являющиеся уравнениями геометрического анализа (групповыми уравнениями)

$$\left. \begin{aligned} \ell_3 \cos \varphi_{30} + \ell_2 \cos(\varphi_{30} + \varphi_{23}) &= \ell_1 \cos q - x_C, \\ \ell_3 \sin \varphi_{30} + \ell_2 \sin(\varphi_{30} + \varphi_{23}) &= \ell_1 \sin q - y_C. \end{aligned} \right\}$$

Эти *тригонометрические* уравнения можно записать в абсолютных координатах $\varphi_3 = \varphi_{30}, \varphi_2 = \varphi_{30} + \varphi_{23}$:

$$\left. \begin{aligned} \ell_3 \cos \varphi_3 + \ell_2 \cos \varphi_2 &= \ell_1 \cos q - x_C, \\ \ell_3 \sin \varphi_3 + \ell_2 \sin \varphi_2 &= \ell_1 \sin q - y_C. \end{aligned} \right\}$$

Если необходимо составить уравнение, связывающее выходную координату φ_3 с входной q , то следует в левых частях обоих уравнений оставить только члены с φ_2 :

$$\begin{aligned} \ell_2 \cos \varphi_2 &= \ell_1 \cos q - x_C - \ell_3 \cos \varphi_3, \\ \ell_2 \sin \varphi_2 &= \ell_1 \sin q - y_C - \ell_3 \sin \varphi_3. \end{aligned}$$

Возведя в квадрат и складывая обе части этих уравнений, получим функцию положения $\varphi_3(q)$ в неявном виде

$$F(q, \varphi_3) = (\ell_1 \cos q - x_C - \ell_3 \cos \varphi_3)^2 + (\ell_1 \sin q - y_C - \ell_3 \sin \varphi_3)^2 - \ell_2^2 = 0.$$

Уравнения геометрического анализа можно также записать в виде

$$\left. \begin{aligned} F_1(q, \varphi_2, \varphi_3) &= \ell_3 \cos \varphi_3 + \ell_2 \cos \varphi_2 - \ell_1 \cos q + x_C = 0, \\ F_2(q, \varphi_2, \varphi_3) &= \ell_3 \sin \varphi_3 + \ell_2 \sin \varphi_2 - \ell_1 \sin q + y_C = 0. \end{aligned} \right\}$$

На рис.3,в показан структурный граф механизма с входными и выходными параметрами группы.

В рассматриваемой группе BBB в качестве групповых координат можно было бы выбрать декартовы координаты точки B (x_B, y_B). Тогда групповые уравнения запишутся в *алгебраической* форме

$$\left. \begin{aligned} (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 &= \ell_2^2, \\ (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 &= \ell_3^2. \end{aligned} \right\}$$

Пример 4. Составим уравнения геометрического анализа для шестизвенного кулисного механизма строгального станка (рис.4,а). Произведя размыкание в шарнирах A и D , получим открытые кинематические цепи 0-1, 0-5 и 0-4-3-2. Обозначим входную координату q и групповые координаты $\varphi_4, \varphi_3, u_1, u_2$. Их число совпадает с числом разорванных связей ($\delta x_A \neq 0, \delta y_A \neq 0, \delta x_D \neq 0, \delta y_D \neq 0$).

Для этих открытых цепей запишем уравнения геометрического анализа

$$\begin{aligned} \ell_1 \cos q &= x_A^{(1)}, & \ell_1 \sin q &= y_A^{(1)}, \\ x_C + \ell_4 \cos \varphi_4 + u_1 \cos \varphi_3 &= x_A^{(2)}, & y_C + \ell_4 \sin \varphi_4 + u_1 \sin \varphi_3 &= y_A^{(2)}, \\ u_2 &= x_D^{(3)}, & y_D^{(3)} &= const. \end{aligned}$$

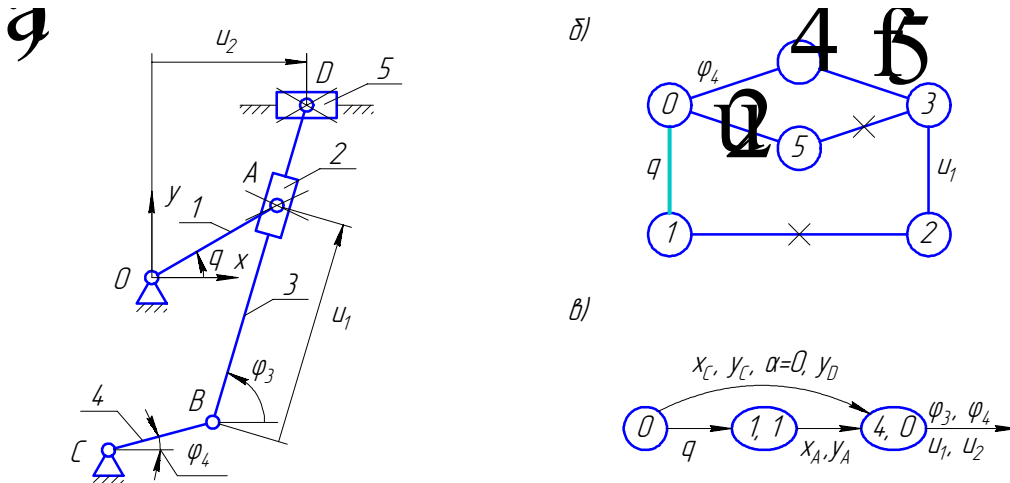


Рис. 4

Из условий $x_A^{(1)} = x_A^{(2)}, y_A^{(1)} = y_A^{(2)},$

$$x_D^{(3)} = x_D^{(2)} = x_C + l_4 \cos \varphi_4 + l_3 \cos \varphi_3, \quad y_D^{(3)} = y_D^{(2)} = y_C + l_4 \sin \varphi_4 + l_3 \sin \varphi_3$$

получим систему четырех групповых уравнений

$$\left. \begin{aligned} l_4 \cos \varphi_4 + u_1 \cos \varphi_3 &= l_1 \cos q - x_C, \\ l_4 \sin \varphi_4 + u_1 \sin \varphi_3 &= l_1 \sin q - y_C, \\ l_4 \cos \varphi_4 + l_3 \cos \varphi_3 - u_2 &= -x_C, \\ l_4 \sin \varphi_4 + l_3 \sin \varphi_3 &= y_D - y_C. \end{aligned} \right\}$$

На рис.4,б и 4,в изображены соответствующие графы механизма.

Пример 5. Составим групповые уравнения для четырехподвижной платформы (рис.5,а). Произведем размыкание в кинематических парах D и G. Обозначим входные координаты $q_1 - q_4$ и введем групповые координаты $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_7, \varphi_8$. Количество введенных групповых координат совпадает с числом разорванных связей ($\delta x_G \neq 0, \delta y_G \neq 0, \delta x_D \neq 0, \delta y_D \neq 0$).

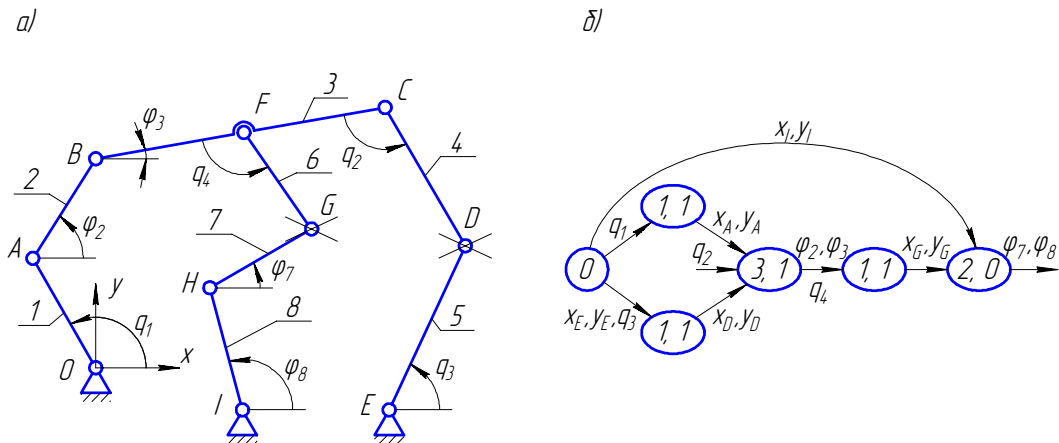


Рис. 5

Групповые уравнения тогда запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} l_1 \cos q_1 &= x_A, & x_E + l_5 \cos q_3 &= x_D, \\ l_1 \sin q_1 &= y_A, & y_E + l_5 \sin q_3 &= y_D, \\ l_2 \cos \varphi_2 + l_3 \cos \varphi_3 - l_4 \cos(\varphi_3 + q_2) &= x_D - x_A, \\ l_2 \sin \varphi_2 + l_3 \sin \varphi_3 - l_4 \sin(\varphi_3 + q_2) &= y_D - y_A, \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} x_A + l_2 \cos \varphi_2 + BF \cos \varphi_3 + l_6 \cos q_4 &= x_G, \\ y_A + l_2 \sin \varphi_2 + BF \sin \varphi_3 + l_6 \sin q_4 &= y_G, \\ \left. \begin{aligned} l_8 \cos \varphi_8 + l_7 \cos \varphi_7 &= x_G - x_I, \\ l_8 \sin \varphi_8 + l_7 \sin \varphi_7 &= y_G - y_I. \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

4. Решение групповых уравнений

Уравнения геометрического анализа, составленные для замкнутых кинематических цепей, являются тригонометрическими или алгебраическими *нелинейными* уравнениями. Если они имеют решение, то оно, как правило, является не единственным. С проблемами, возникающими при их решении, познакомимся на конкретных примерах.

Пример 6. Определим групповые координаты φ_{30} и φ_{23} в шарнирном четырехзвеннике (см. рис.3,а), если угол поворота входного звена - кривошипа $q = 60^0$; радиус кривошипа $l_1 = 0,5$ м; координаты неподвижной оси коромысла $x_C = l_0 = 1$ м, $y_C = 0$, а длина шатуна равна длине коромысла. Рассмотрим три случая:

$$l_2 = l_3 = \begin{cases} 1) \sqrt{3}/2 \text{ м}, \\ 2) \sqrt{3}/4 \text{ м}, \\ 3) \sqrt{3}/5 \text{ м}. \end{cases}$$

Для определения координаты φ_{23} левые и правые части групповых уравнений (см. пример 3):

$$\left. \begin{aligned} l_3 \cos \varphi_{30} + l_2 \cos(\varphi_{30} + \varphi_{23}) &= l_1 \cos q - x_C, \\ l_3 \sin \varphi_{30} + l_2 \sin(\varphi_{30} + \varphi_{23}) &= l_1 \sin q - y_C \end{aligned} \right\}$$

возведем в квадрат и сложим их, откуда для *первого* случая найдем

$$\cos \varphi_{23} = \frac{(l_1 \cos q - x_C)^2 + (l_1 \sin q - y_C)^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2 l_3} = -0,5,$$

$$\sin \varphi_{23} = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_{23}} = \pm \sqrt{3}/2.$$

Здесь двойной знак \pm перед радикалом указывает на *два решения* системы тригонометрических уравнений для φ_{23} ($\varphi_{23}^{(1)} = 120^0$, $\varphi_{23}^{(2)} = 240^0$).

Угол φ_{30} несложно определить из системы групповых уравнений, если в них раскрыть косинус и синус суммы и сгруппировать их компоненты относительно $\cos \varphi_{30}$ и $\sin \varphi_{30}$:

$$\left. \begin{aligned} (l_3 + l_2 \cos \varphi_{23}) \cos \varphi_{30} - l_2 \sin \varphi_{23} \sin \varphi_{30} &= l_1 \cos q - x_C, \\ l_2 \sin \varphi_{23} \cos \varphi_{30} + (l_3 + l_2 \cos \varphi_{23}) \sin \varphi_{30} &= l_1 \sin q - y_C. \end{aligned} \right\}$$

Из полученной системы линейных уравнений можно по правилу Крамера найти

$$\begin{aligned} \cos \varphi_{30} &= \frac{\begin{vmatrix} l_1 \cos q - x_C & -l_2 \sin \varphi_{23} \\ l_1 \sin q - y_C & l_3 + \cos \varphi_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} l_3 + l_2 \cos \varphi_{23} & -l_2 \sin \varphi_{23} \\ l_2 \sin \varphi_{23} & l_3 + l_2 \cos \varphi_{23} \end{vmatrix}} = \\ &= \frac{(l_1 \cos q - x_C)(l_3 + l_2 \cos \varphi_{23}) + (l_1 \sin q - y_C)l_2 \sin \varphi_{23}}{l_2^2 + l_3^2 + 2l_2 l_3 \cos \varphi_{23}} = \begin{cases} 0, \\ -\sqrt{3}/2, \end{cases} \end{aligned}$$

Таблица 1

	$\cos \varphi_{23}$	$\sin \varphi_{23}$	φ_{23}	$\cos \varphi_{30}$	$\sin \varphi_{30}$	$\varphi_{30} = \varphi_3$	$\varphi_2 = \varphi_{30} + \varphi_{23}$	математика	ТММ
1	-0,5	$\sqrt{3}/2$	120^0	0	1	90^0	210^0	два решения	две монтажные схемы
		$-\sqrt{3}/2$	240^0	$-\sqrt{3}/2$	-0,5	210^0	90^0		
2	1	0	0	$-\sqrt{3}/2$	0,5	150^0	150^0	кратные корни	особые положения
3	2,125	-	-	-	-	-	-	нет решения	разрыв кинем. цепи

2. Обнаружены *парадоксальные сборки* с «нестандартной» областью существования. Имеются механизмы, у которых цикл движения выходных звеньев совершается не за один, а за два оборота входного звена. К парадоксальным могут быть отнесены и некривошипные сборки, у которых область существования q превышает 2π , но не достигает 4π . Существование такихборок позволяет сделать вывод о том, что такие понятия как «полнооборотность входного звена» и «существование кривошипа» не равнозначны.

3. Одноподвижные рычажные механизмы всегда работают только в одной сборке. Поэтому важным является вопрос о *признаке (числовом показателе)*, позволяющем различать сборки данной группы Ассур или данного механизма. Например, для группы *BBB* (см. пример 6) показатель сборки можно выразить формулой

$$M = \text{sign}(-\sin \varphi_{23}) = \text{sign}[M_C(\overline{AB})],$$

где $M_C(\overline{AB})$ - момент вектора \overline{AB} относительно точки C . Предполагается, что $M = +1$, если поворот вектора \overline{AB} вокруг точки C виден против часовой стрелки и $M = -1$ - в противном случае (см. рис.6).

4. Число вариантов сборки групп Ассур обычно четное (за исключением мертвых положений).

5. В многозвенных группах Ассур (с числом звеньев 4 и более) задача решения групповых уравнений (см. пример 4) резко усложняется. Известны различные подходы к ее решению. Чаще всего из системы групповых уравнений производится последовательное исключение неизвестных. Как правило, итоговое уравнение преобразуется к полиномиальному виду. Порядок полинома определяет максимальное число вариантов сборки, а число вещественных корней полинома равно их фактическому числу.

6. Поиск корней алгебраического уравнения можно осуществить с помощью *метода Ньютона* [3]. Применение *метода Штурма* для определения корней полинома [2] по его коэффициентам позволяет повысить эффективность их поиска.

Пример 7. Определим координаты, характеризующие положения звеньев центрального кривошипно-ползунного механизма (рис.7), если $OA = l_3 = 0,6 м$; $AB = l_2 = 0,6\sqrt{3} м$; $q = 1,2 м$.

Из уравнений геометрического анализа

$$\left. \begin{aligned} l_3 \cos \varphi_{30} + l_2 \cos(\varphi_{30} + \varphi_{23}) &= q, \\ l_3 \sin \varphi_{30} + l_2 \sin(\varphi_{30} + \varphi_{23}) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

несложно определить

$$\cos \varphi_{23} = \frac{q^2 - l_3^2 - l_2^2}{2l_2 l_3} = 0, \quad \sin \varphi_{23} = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_{23}} = \pm 1.$$

Из $\triangle OAB$ по теореме косинусов найдем

$$\cos \varphi_{30} = \frac{q^2 + l_3^2 - l_2^2}{2ql_3} = 0,5; \quad \sin \varphi_{30} = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_{30}} = \pm \sqrt{3}/2.$$

Здесь два решения $\varphi_{23}^{(1)} = 270^\circ$, $\varphi_{30}^{(1)} = 60^\circ$ и $\varphi_{23}^{(2)} = 90^\circ$, $\varphi_{30}^{(2)} = 300^\circ$ соответствуют двум возможным положениям одной и той же монтажной схемы. В этом случае переход от одного из возможных положений в другое сопровождается проходом через особое положение механизма (точки O , A и B лежат на одной прямой), что, как правило, является нежелательным. Из особого положения механизм выводится благодаря силам инерции (с помощью маховика) или соединению между собой одинаковых механизмов. При этом соединении механизмов производится так, чтобы в особом положении находился только один из них.

Пример 8. Определим положение ползуна двухподвижного механизма (рис.8,а) при $l_1 = \sqrt{2} м$, $l_2 = l_3 = 1 м$, $q_1 = 150^\circ$, $q_2 = 60^\circ$, $y_C = 0$.

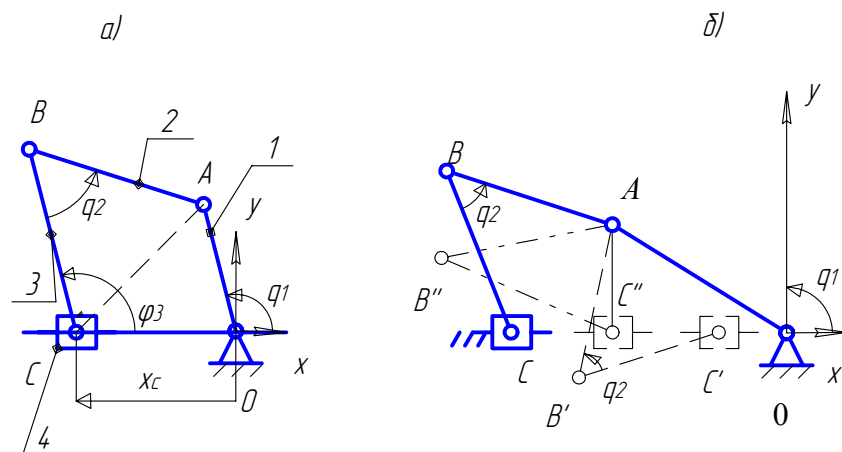


Рис. 8

Из $\triangle ABC$ с помощью теоремы синусов

$$\frac{AC}{\sin q_2} = \frac{l_2}{\sin(\angle BCA)}$$

и теоремы косинусов

$$AC^2 = l_2^2 + l_3^2 - 2l_2 l_3 \cos q_2$$

найдем

$$\angle BCA = \arcsin \frac{\ell_2 \sin q_2}{\sqrt{\ell_2^2 + \ell_3^2 - 2\ell_2\ell_3 \cos q_2}} = 60^\circ.$$

Аналогично определим

$$\angle OCA = (-1)^k \arcsin \frac{\ell_1 \sin q_1}{\sqrt{\ell_2^2 + \ell_3^2 - 2\ell_2\ell_3 \cos q_2}} + k \cdot 180^\circ = \begin{cases} 45^\circ, \\ 135^\circ, \end{cases}$$

отсюда получим

$$\varphi_3 = \angle BCA + \angle OCA = \begin{cases} 105^\circ, \\ 195^\circ. \end{cases}$$

Координата, определяющая положение ползуна

$$x_C = \ell_1 \cos q_1 + \ell_2 \cos(\varphi_3 + q_2) - \ell_3 \cos \varphi_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} \pm 1) \text{ м} = \begin{cases} -1,932 \text{ м}, \\ -0,5176 \text{ м}. \end{cases}$$

Здесь два решения уравнений также соответствуют двум *разным монтажным схемам механизма* (рис.8,б). Нетрудно понять, что переход механизма из положения $OABC$ в положение $OAB'C'$ возможен без его разборки. Для этого нужно сначала при фиксированном угле q_1 и неподвижной направляющей уменьшить угол q_2 (при этом прямая AB будет опускаться вниз, ползун 4 – приближаться к шарниру O), а затем восстановить его до прежнего значения. Монтажные схемы, способные перейти к другим схемам без их разборки, иногда называют *конфигурациями механизма*. Выбор «истинной» конфигурации механизма должен производиться на основе каких-то дополнительных условий.

Каждому виду монтажной схемы механизма соответствует своя матрица Якоби. В пределах данной сборки (или конфигурации) механизма *функциональный определитель (якобиан)* сохраняет свой знак, т.е. $J(q_1, q_2, \dots, q_n) \neq 0$ при всех q_k ($k = 1, 2, \dots, n$), и только в особом положении якобиан равен нулю.

Как и в предыдущей задаче, переход из одной конфигурации к другой происходит через особое положение. Из групповых уравнений

$$\left. \begin{aligned} F_1(\varphi_3, x_C) &= x_C + \ell_3 \cos \varphi_3 - \ell_2 \cos(\varphi_3 + q_2) - \ell_1 \cos q_1 = 0, \\ F_2(\varphi_3) &= y_C + \ell_3 \sin \varphi_3 - \ell_2 \sin(\varphi_3 + q_2) - \ell_1 \sin q_1 = 0 \end{aligned} \right\}$$

нетрудно получить якобиан

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \varphi_3} & \frac{\partial F_1}{\partial x_C} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \varphi_3} & \frac{\partial F_2}{\partial x_C} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\ell_3 \sin \varphi_3 + \ell_2 \sin(\varphi_3 + q_2) & 1 \\ \ell_3 \cos \varphi_3 - \ell_2 \cos(\varphi_3 + q_2) & 0 \end{vmatrix} = \ell_2 \cos(\varphi_3 + q_2) - \ell_3 \cos \varphi_3.$$

Механизм попадет в особое положение, если $J = \ell_2 \cos(\varphi_3 + q_2) - \ell_3 \cos \varphi_3 = 0$, т.е., когда проекция прямой AB'' на ось Ox будет равна проекции прямой $B''C''$ на ту же ось (см. рис.8,б).

Если все же требуется реализовать такую конфигурацию звеньев, то необходимо *изменить структуру* механизма так, чтобы это положение перестало быть особым. В частности, можно ввести *дополнительный вход* q_3 (двигатель), а вход q_2 - выключить.

Замечание.

В особом положении механизм способен потерять одну степень подвижности или ее приобрести, что может привести к неопределенности движения, его ветвлению.

В механизмах с несколькими степенями подвижности (рис.9,а) потеря одной из них или ее приобретение не означает остановки всего механизма. Но движения входных звеньев уже не могут происходить независимо друг от друга, т.е. не все входные координаты q_1, q_2, \dots, q_n будут обобщенными (рис.9,б). Потеря всех степеней подвижности означает мертвое положение, т.е. заклинивание механизма (рис.9,в).

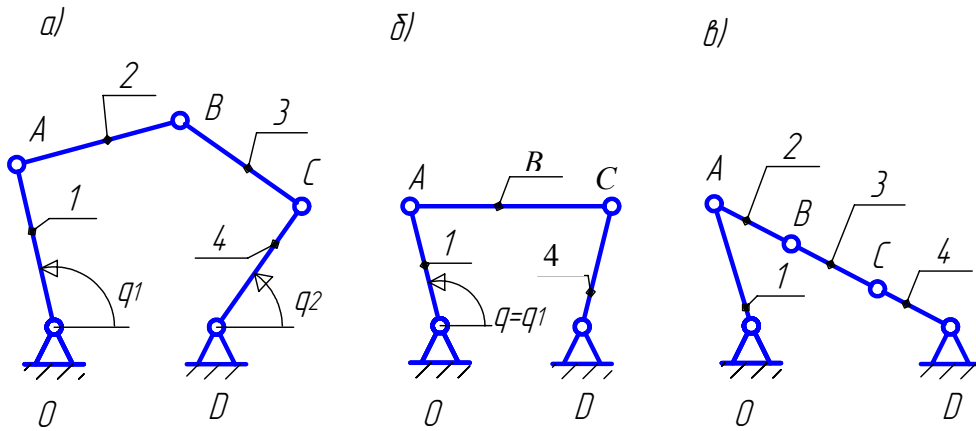


Рис. 9

5. Исследование функций положения механизма

Анализ функций положения выходных звеньев позволяет оценить функциональные возможности механизма. Такое исследование включает в себя несколько этапов.

1. На первом этапе устанавливается, в какой области функция положения для заданной монтажной схемы определена и имеются ли у нее разрывы.

Значения постоянных параметров кинематической схемы определяют область существования искомой функции. Например, в зависимости от длин звеньев шарнирный четырехзвенник при

$$\left. \begin{aligned} l_0 + l_1 < l_2 + l_3, \\ l_0 - l_1 > |l_2 - l_3| \end{aligned} \right\}$$

будет *однокривошипным*, при

$$\left. \begin{aligned} l_0 + l_1 < l_2 + l_3, \\ l_1 - l_0 > |l_2 - l_3| \end{aligned} \right\}$$

- *двухкривошипным*, где $l_0 = \sqrt{x_C^2 + y_C^2}$. В примере б при

$$|l_2 - l_3| \leq |l_0 - l_1| < l_2 + l_3 < l_0 + l_1$$

реализуется *двухкоромысловый* четырехзвенник. Здесь возможные пределы изменения входной координаты находятся по формуле

$$-\arccos \frac{l_0^2 + l_1^2 - (l_2 + l_3)^2}{2l_1} < q < \arccos \frac{l_0^2 + l_1^2 - (l_2 + l_3)^2}{2l_1}.$$

Разрыв функции положения означает, что механизм не существует в виде замкнутой кинематической цепи. Разрыва не произойдет, если будут существовать все структурные группы механизма. Для этого необходимо, чтобы в решениях *подкоренные выражения были неотрицательными, а синусы и косинусы определяемых углов по модулю не превосходили единицу*. Так, например, из неравенства $|\cos \varphi_{23}| < 1$ можно получить условие существования группы *BBB* (см. пример б):

$$|\ell_2 - \ell_3| < AC < \ell_2 + \ell_3,$$

где $AC = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2}$, $x_A = \ell_1 \cos q$, $y_A = \ell_1 \sin q$.

Данное условие можно было бы получить из ΔABC . Известно, что всякая сторона треугольника (здесь AC) меньше суммы и больше разности двух других сторон.

2. На втором этапе определяются первые и вторые производные от функций положения по независимым переменным и находятся точки, в которых производные не существуют. Этим точкам соответствуют особые положения механизма.

При заданных постоянных параметрах кинематической схемы особые положения могут и не наступить. Тем не менее, их определение является полезным, поскольку позволяет судить о близости механизма к особым точкам.

3. На следующем этапе определяются экстремумы функций положения. Чем больше их число, тем выше функциональные возможности механизма. Например, появляется возможность проведения приближенного выстоя выходного звена за счет слияния нескольких экстремумов функции положения.

При задании постоянных параметров кинематической схемы реализуются не все экстремумы. В частности, при соответствующем наборе постоянных параметров кинематической схемы функция положения может быть монотонной.

Здесь же определяются наибольшее и наименьшее значения функций, соответствующие *крайним* положениям механизма. В многоподвижных механизмах крайние положения определяются по правилам разыскания экстремумов функций нескольких переменных.

Пример 9. Определим экстремумы функции положения $\varphi(q)$ кулисного механизма [4], изображенного на рис.10,а.

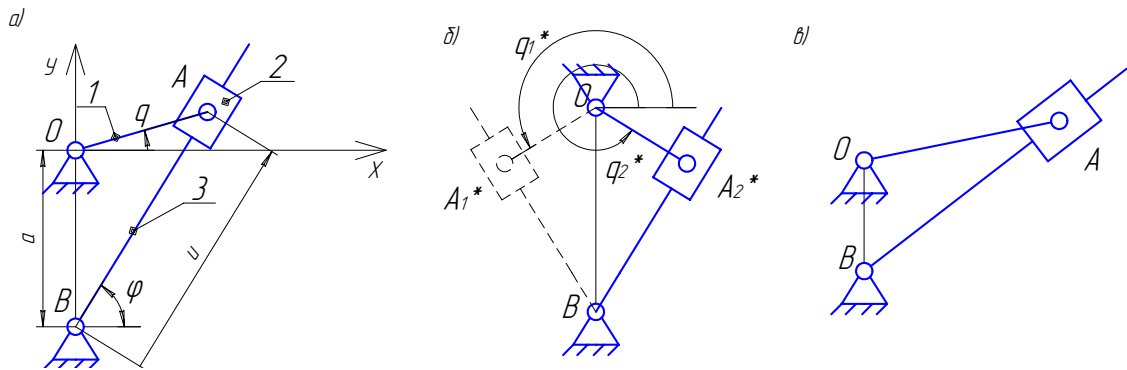


Рис 10

Для определения экстремумов функции $\varphi(q)$ продифференцируем групповые уравнения

$$\left. \begin{aligned} \ell \cos q &= u \cos \varphi, \\ \ell \sin q + a &= u \sin \varphi \end{aligned} \right\}$$

по независимой входной координате q :

$$\left. \begin{aligned} u' \cos \varphi - u \sin \varphi \cdot \varphi' &= -\ell \sin q, \\ u' \sin \varphi + u \cos \varphi \cdot \varphi' &= \ell \cos q, \end{aligned} \right\}$$

откуда найдем

$$\varphi'(q) = \frac{\begin{vmatrix} \cos \varphi & -\ell \sin q \\ \sin \varphi & \ell \cos q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \varphi & -u \sin \varphi \\ \sin \varphi & u \cos \varphi \end{vmatrix}} = \frac{\ell(\cos \varphi \cos q + \sin \varphi \sin q)}{u} = \frac{\ell(\ell + a \sin q)}{a^2 + \ell^2 + 2\ell a \sin q}.$$

Функция $\varphi(q)$ может иметь экстремумы, если $\ell + a \sin q^* = 0$. Из этого уравнения определим два корня $q_{1,2}^* = \arcsin(-\ell/a)$, соответствующие двум крайним положениям механизма. В этих положениях кривошип перпендикулярен кулисе (рис.10,б). Крайние положения реализуются при $\ell < a$. При данном условии получается механизм с качающейся кулисой.

Для определения максимума и минимума функции $\varphi(q)$ систему групповых уравнений дважды продифференцируем по q :

$$\left. \begin{aligned} u'' \cos \varphi - u \sin \varphi \cdot \varphi'' &= -\ell \cos q + 2u' \varphi' \sin \varphi + u(\varphi')^2 \cos \varphi, \\ u'' \sin \varphi + u \cos \varphi \cdot \varphi'' &= -\ell \sin q - 2u' \varphi' \cos \varphi + u(\varphi')^2 \sin \varphi, \end{aligned} \right\}$$

откуда определим

$$\varphi'' = \frac{\ell \sin(\varphi - q) - 2u' \varphi'}{u} = \frac{\ell a \cos q (a^2 - \ell^2)}{(a^2 + \ell^2 + 2\ell a \sin q)^2}.$$

Подставив q_1^* и q_2^* в выражение второй производной, получим

$$\varphi''(q_1^*) = -\frac{\ell}{\sqrt{a^2 - \ell^2}} < 0, \quad \varphi''(q_2^*) = \frac{\ell}{\sqrt{a^2 - \ell^2}} > 0.$$

Таким образом, при $q = q_1^*$ функция $\varphi(q)$ имеет максимум, а при $q = q_2^*$ - минимум.

Функция $\varphi(q)$ является монотонной, т.е. не имеет экстремумов, если $\ell > a$. В этом случае получается кулисный механизм с вращающейся кулисой (рис.10,в).

При $\ell = a$ первая производная от функции положения φ по q :

$$\varphi' = \frac{1 + \sin q}{2(1 + \sin q)}.$$

Из формулы следует, что при равномерном вращении кривошипа, кулиса будет вращаться равномерно с угловой скоростью, вдвое меньшей угловой скорости кривошипа. При $q = 270^\circ$, когда совпадут точки A и B , движение кулисы будет неопределенным (механизм попадет в особое положение), поскольку $\varphi'(270^\circ) = 0/0$.

4. На заключительном этапе оцениваются функциональные возможности механизма по следующим геометрическим критериям: *ход* и *коэффициент изменения средней скорости выходного звена*, *число реализуемых экстремумов* функций положения, *якобианы* системы групповых уравнений. Вместе с тем, на этом этапе важно обеспечить требуемые условия передачи сил, поэтому определяются *углы давления* или *углы передачи*.

Для оценки работоспособности механизма зачастую используют *обобщенные критерии качества*, которые выражаются в виде безразмерных функций: а) критерий K_1 , характеризующий отношение сил на входе и выходе; б) критерий K_2 , характеризующий относительный уровень внутренних сил (реакций) [2]; в) критерий K_3 , который характеризует относительный уровень инерционных сил.

В такой последовательности перед курсовым проектом студенты ММФ СПбГПУ выполняют курсовую работу «Исследование одноподвижного рычажного механизма».

6. Обратная задача геометрического анализа

С помощью этой задачи определяют входные координаты q_k ($k=1,2,\dots,n$) механизма по его заданным выходным координатам x_s ($s=1,2,\dots,m$).

Условие $n = m$ является необходимым для того, чтобы обратная задача (ОЗ) имела решение, т.е. чтобы можно было составить n независимых уравнений с n неизвестными.

При $n > m$, когда механизм имеет избыточные степени подвижности, ОЗ решается неоднозначно. В этом случае произвольно задается $n - m$ входных координат, а остальные m входных координат находят из геометрических уравнений.

При $n < m$ решение ОЗ в общем случае отсутствует. Его можно получить, если задать лишь n выходных координат механизма.

Во многих случаях ОЗ решается численно, например, с помощью метода Ньютона.

Пример 10. Определим входные координаты двухзвенного робота (рис.11,а), обеспечивающие «попадание» полюса схвата M в точку с координатами $x_M = y_M = 1$ м.

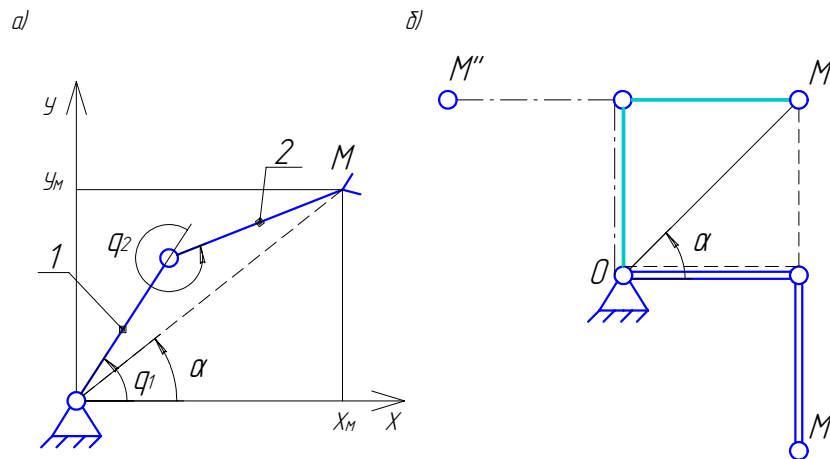


Рис. 11

Из уравнений геометрического анализа

$$\left. \begin{aligned} l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2) &= x_M, \\ l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2) &= y_M \end{aligned} \right\}$$

можно найти входные координаты

$$q_2 = \pm \arccos \frac{x_M^2 + y_M^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2},$$

$$q_1 = \pm \arccos \frac{x_M^2 + y_M^2 + l_1^2 - l_2^2}{2l_1 \sqrt{x_M^2 + y_M^2}} + \alpha,$$

где

$$\cos \alpha = \frac{x_M}{\sqrt{x_M^2 + y_M^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{y_M}{\sqrt{x_M^2 + y_M^2}}.$$

Приняв $l_1 = l_2 = 1$ м, получим

$$q_2 = \pm 90^0; \quad q_1 = \begin{cases} 0, \\ 90^0. \end{cases}$$

В процессе решения уравнений пришлось осуществить преобразования, которые привели к новым уравнениям. Уравнениям-следствиям удовлетворяют все корни исходных уравнений, но, кроме них, эти уравнения могут также иметь решения, которые не являются корнями исходных уравнений, это так называемые посторонние корни. Чтобы выявить и отсеять эти корни обычно поступают так: все найденные корни уравнений следствий проверяют подстановкой в исходные уравнения.

Здесь получается четыре решения уравнений геометрического анализа (рис.11,б). При этом два из них не будут удовлетворять исходной системе уравнений (M', M''), а два других будут соответствовать двум возможным конфигурациям звеньев (M). Для того, чтобы избавиться от неопределенности движения, необходимо заранее задать системе управления ту или иную конфигурацию звеньев.

Пример 11. Определим входные координаты q_1 и q_2 двухподвижного робота, имеющего замкнутую структуру (рис.12,а), по заданным координатам полюса M схвата: $x_M = 2,0 м; y_M = 0,7 м$, если $OA = \ell_1 = 0,7 м; AB = \ell_2 = 0,8 м; BC = \ell_3 = 1,0 м; AM = 2,0 м; DC = \ell_4 = 0,4 м; x_D = 0,4 м; y_D = -0,3 м$.

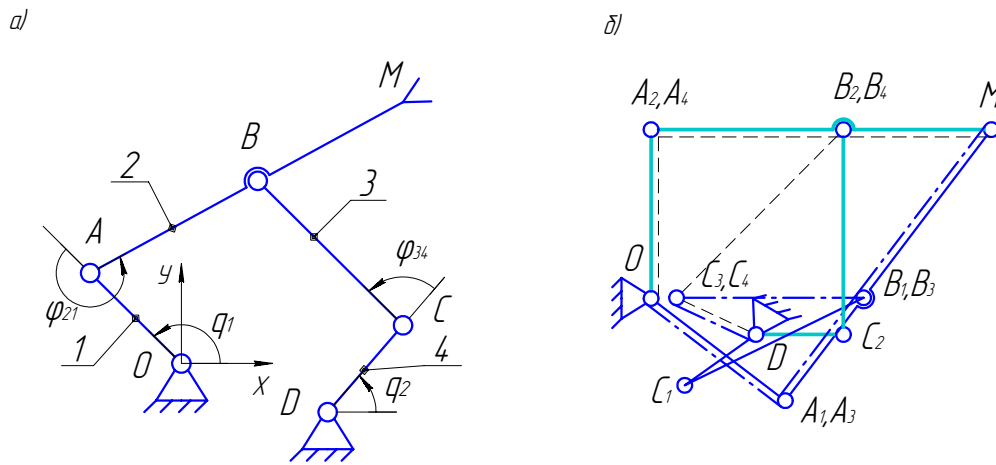


Рис. 12

Из уравнений геометрического анализа

$$\left. \begin{aligned} \ell_1 \cos q_1 + AM \cos(q_1 + \varphi_{21}) &= x_M, \\ \ell_1 \sin q_1 + AM \sin(q_1 + \varphi_{21}) &= y_M \end{aligned} \right\}$$

несложно определить

$$\cos \varphi_{21} = \frac{x_M^2 + y_M^2 - \ell_1^2 - AM^2}{2\ell_1 \cdot AM}, \quad \sin \varphi_{23} = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_{21}},$$

$$\cos q_1 = \frac{y_M \cdot AM \sin \varphi_{21} + x_M (\ell_1 + AM \sin \varphi_{21})}{\ell_1^2 + AM^2 + 2\ell_1 \cdot AM \cos \varphi_{21}},$$

$$\sin q_1 = \frac{y_M (\ell_1 + AM \sin \varphi_{21}) - x_M \cdot AM \sin \varphi_{21}}{\ell_1^2 + AM^2 + 2\ell_1 \cdot AM \cos \varphi_{21}}.$$

С помощью уравнений замкнутого контура $OABCD$

$$\left. \begin{aligned} \ell_4 \cos q_2 + \ell_3 \cos(q_2 + \varphi_{34}) &= \ell_1 \cos q_1 + \ell_2 \cos(q_1 + \varphi_{21}) - x_D, \\ \ell_4 \sin q_2 + \ell_3 \sin(q_2 + \varphi_{34}) &= \ell_1 \sin q_1 + \ell_2 \sin(q_1 + \varphi_{21}) - y_D \end{aligned} \right\}$$

аналогично определим

$$\cos \varphi_{34} = \frac{(x_B - x_D)^2 + (y_B - y_D)^2 - \ell_4^2 - \ell_3^2}{2\ell_4 \ell_3}, \quad \sin \varphi_{34} = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_{34}},$$

$$\cos q_2 = \frac{(y_B - y_D)l_3 \sin \varphi_{34} + (x_B - x_D)(l_4 + l_3 \cos \varphi_{34})}{l_4^2 + l_3^2 + 2l_3l_4 \cos \varphi_{34}},$$

$$\sin q_2 = \frac{(y_B - y_D)(l_4 + l_3 \cos \varphi_{34}) - (x_B - x_D)l_3 \sin \varphi_{34}}{l_4^2 + l_3^2 + 2l_3l_4 \cos \varphi_{34}},$$

где $x_B = l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + \varphi_{21})$, $y_B = l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + \varphi_{21})$.

Результаты решения данной задачи приведены в табл.2

Таблица 2

Вариант конфиг.	$\varphi_2 = q_1 + \varphi_{21}$	q_1	$\varphi_3 = 180^0 + q_2 + \varphi_{34}$	q_2
1	$38,6^0$	$308,58^0$	$219,5^0$	$254,1^0$
2	0^0	90^0	270^0	0^0
3	$38,6^0$	$308,58^0$	$182,1^0$	$147,5^0$
4	0^0	90^0	$226,4^0$	$136,4^0$

Как видно, уравнения геометрического анализа имеют четыре решения, которые соответствуют четырем конфигурациям механизма (рис.12,б).

Якобиан системы геометрических уравнений

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_M}{\partial q_1} & \frac{\partial x_M}{\partial q_2} \\ \frac{\partial y_M}{\partial q_1} & \frac{\partial y_M}{\partial q_2} \end{vmatrix} = \frac{AM \cdot l_1 \cdot l_4}{l_2} \cdot \frac{\sin(\varphi_2 - q_1) \sin(\varphi_3 - q_{21})}{\sin(\varphi_3 - \varphi_2)}$$

позволяет найти особые положения механизма. Условия

$$\sin(\varphi_2 - q_1) = 0, \quad \sin(\varphi_3 - q_2) = 0$$

определяют границу между различными конфигурациями. При выполнении условия

$$\sin(\varphi_3 - \varphi_2) = 0$$

двухподвижный механизм вырождается в одноподвижный четырехзвенник, и вращение двух входных звеньев становятся зависимыми друг от друга, что в общем случае невозможно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Семенов Ю.А., Семенова Н.С. Структурный анализ механизма // Теория механизмов и машин. – 2003. №2. с. 3-14.
2. Пейсах Э.Е., Нестеров В.А. Система проектирования плоских рычажных механизмов. М.: Машиностроение, 1988. - 232 с.
3. Kolovsky M.Z., Evgrafov A.N., Semenov Yu.A., Slousch A.V. Advanced Theory of Mechanisms and Machines. Springer – Verlag Berlin Heidelberg New York, 2000, 394 p.
4. Баранов Г.Г. Курс теории механизмов и машин. М.: Машиностроение, 1975.- 496 с.

Поступила в редакцию 05.09.2003