

АНАЛИЗ ПОЛОЖЕНИЙ ЗВЕНЬЕВ И ОБЛАСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ МЕХАНИЗМА ВЦЦЦ (часть II)¹

13. Области существования механизма ВЦЦЦ

13.1. Функции положения механизма

Функциональные зависимости переменных параметров φ_{23} , φ_{34} , φ_{41} , l_{23} , l_{34} , l_{41} механизма ВЦЦЦ от угловой координаты φ входного звена 2 называются *функциями положения* механизма.

Отрезок изменения аргумента φ , в пределах которого какая-либо из функций $\varphi_{23}(\varphi)$, $\varphi_{34}(\varphi)$, $\varphi_{41}(\varphi)$, $l_{23}(\varphi)$, $l_{34}(\varphi)$, $l_{41}(\varphi)$ существует, называется *областью существования* этой функции. При заданных значениях постоянных параметров h_1 , θ_1 , l_{12} , h_2 , θ_2 , h_3 , θ_3 , h_4 , θ_4 механизма все шесть указанных функций имеют одну и ту же область существования.

При изменении значений постоянных параметров механизма изменяются и его функции положения. Из формул, полученных в п. 7 и 8, видно, что функции $\varphi_{23}(\varphi)$, $\varphi_{34}(\varphi)$, $\varphi_{41}(\varphi)$ зависят от значений только четырёх постоянных угловых параметров θ_1 , θ_2 , θ_3 , θ_4 , а функции $l_{23}(\varphi)$, $l_{34}(\varphi)$, $l_{41}(\varphi)$ зависят от значений всех девяти постоянных параметров механизма.

13.2. Три области возможных значений постоянных угловых параметров механизма

Области существования функций положения звеньев механизма ВЦЦЦ, как и сами эти функции, зависят от значений четырёх постоянных угловых параметров θ_1 , θ_2 , θ_3 , θ_4 . При определении областей существования будем использовать функцию $\varphi_{34}(\varphi)$, поскольку она является наиболее простой (в математическом отношении) в сравнении с другими функциями положения.

В зависимости от величины области существования функции положения $\varphi_{34}(\varphi)$, а также от особенностей этой функции, будем различать три случая:

1) функция $\varphi_{34}(\varphi)$ существует при любых значениях аргумента φ ; мёртвые положения отсутствуют;

2) функция $\varphi_{34}(\varphi)$ существует на некотором отрезке (или отрезках) изменения аргумента φ ; при каком-либо одном или при нескольких значениях φ имеют место мёртвые положения механизма;

3) функция $\varphi_{34}(\varphi)$ не существует ни при каких значениях аргумента φ или же она существует только при одном значении φ .

В первом случае входное звено 2 может совершать полный поворот вокруг неподвижной оси, то есть оно является кривошипом. Такие механизмы будем называть *кривошипными*.

Во втором случае входное звено 2 может совершать поворот только на ограниченный угол, то есть оно является коромыслом. Такие механизмы будем называть *коромысловыми*.

В третьем случае механизм ВЦЦЦ не существует в виде замкнутой кинематической цепи ни при каком положении входного звена или же он существует при каком-то

¹ Часть I помещена в журнале ТММ, 2003, №2.

одном положении входного звена, из которого, однако, невозможно перемещение в бесконечно близкие положения.

Постоянные угловые параметры $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ могут принимать любые значения; должны лишь выполняться ограничения (33).

Рассмотрим следующую задачу: найти области возможных значений постоянных угловых параметров $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ механизма, которые соответствуют трём указанным выше случаям. Три искомого области обозначим через Ω_1, Ω_2 и Ω_3 соответственно.

Сформулированная задача рассматривается ниже в пп. 13.4, 13.5 и 13.6. Решению этой задачи предшествует исследование вопроса о мёртвых положениях механизма ВЦЦЦ.

13.3. Мёртвые положения механизма

Введём следующие обозначения:

S – число мёртвых положений механизма на отрезке $[0, 2\pi]$ изменения независимой переменной φ ;

$\varphi^{(i)}, \varphi_{34}^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, S$) – значения углов φ и φ_{34} , при которых достигаются мёртвые положения.

Значения $\varphi^{(i)}$ угла φ будем называть *критическими точками*.

Формулу (14) для $\cos \varphi_{34}$ можно записать в таком виде:

$$\cos \varphi_{34} = \frac{a_3 + a_1 \cos \varphi}{a_2}, \quad (39)$$

где

$$a_1 = s\theta_1 s\theta_2, \quad a_2 = s\theta_3 s\theta_4, \quad a_3 = c\theta_3 c\theta_4 - c\theta_1 c\theta_2. \quad (40)$$

Из условий (33) следует, что

$$a_1 \neq 0 \text{ и } a_2 \neq 0. \quad (41)$$

Как уже отмечалось в п. 10, в мёртвом положении механизма

$$\cos \varphi_{34}^{(i)} = 1 \text{ или } -1. \quad (42)$$

Тогда на основании (39) и (42) получаем:

$$\cos \varphi^{(i)} = U_1 \text{ или } U_2, \quad (43)$$

где

$$U_1 = \frac{a_2 - a_3}{a_1}, \quad U_2 = \frac{-a_2 - a_3}{a_1}. \quad (44)$$

Из формулы (43) видно, что число S мёртвых положений и критические точки $\varphi^{(i)}$ зависят от значений U_1 и U_2 , которые, в свою очередь, зависят от постоянных угловых параметров $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ механизма.

Параметры U_1 и U_2 могут принимать любые значения; должно лишь выполняться условие $U_1 \neq U_2$. В таблицах 1 и 2 приведены все возможные сочетания значений U_1 и U_2 , а также соответствующие значения $S, \varphi^{(i)}$ и $\varphi_{34}^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, S$).

В таблицах приняты следующие обозначения:

$$\Phi_1 = \arccos(U_1), \quad \Phi_2 = \arccos(U_2). \quad (45)$$

Всего получено 14 случаев, которые разделены на два набора. В первом наборе содержатся четыре случая; они названы *регулярными* (см. таблицу 1). Во втором наборе содержится десять случаев, которые названы *особыми* (см. таблицу 2). Особые случаи отличаются от регулярных тем, что в каждом особом случае хотя бы одно из значений $\varphi^{(i)}$ равно 0 или π . Кроме того, в регулярных случаях области возможных значений параметров U_1 и U_2 выражаются строгими неравенствами, а в особых случаях, по крайней мере, одно из условий, отображающих указанные области, является равенством.

Критическая точка $\varphi^{(i)}$ является границей области существования соответствующей сборки механизма. В регулярных случаях область существования сборки расположена по одну сторону от точки $\varphi^{(i)}$ – слева или справа; по другую же сторону от точки $\varphi^{(i)}$ механизм не существует. В особых случаях критическая точка $\varphi^{(i)}$, равная 0 или π , является левой границей одной сборки и одновременно правой границей другой сборки.

Из таблиц 1 и 2 видно, что число S мёртвых положений равно 0, 2 или 4 в регулярных случаях и 1, 2 или 3 в особых случаях.

Таблица 1. Мёртвые положения механизма ВЦЦЦ: регулярные случаи

#	Параметры U_1 и U_2	S	$\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(S)}$	$\varphi_{34}^{(1)}, \dots, \varphi_{34}^{(S)}$
1	$ U_1 > 1, U_2 > 1, U_1 \neq U_2$	0	–	–
2	$ U_1 < 1, U_2 > 1$	2	$\Phi_1, 2\pi - \Phi_1$	0, 0
3	$ U_1 > 1, U_2 < 1$		$\Phi_2, 2\pi - \Phi_2$	π, π
4	$ U_1 < 1, U_2 < 1, U_1 \neq U_2$	4	$\Phi_1, 2\pi - \Phi_1,$ $\Phi_2, 2\pi - \Phi_2$	0, 0, π, π

Таблица 2. Мёртвые положения механизма ВЦЦЦ: особые случаи

#	Параметры U_1 и U_2	S	$\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(S)}$	$\varphi_{34}^{(1)}, \dots, \varphi_{34}^{(S)}$
OC1	$U_1 = 1, U_2 > 1$	1	0	0
OC2	$U_1 = -1, U_2 > 1$		π	0
OC3	$ U_1 > 1, U_2 = 1$		0	π
OC4	$ U_1 > 1, U_2 = -1$		π	π
OC5	$U_1 = 1, U_2 = -1$	2	0, π	0, π
OC6	$U_1 = -1, U_2 = 1$		$\pi, 0$	0, π
OC7	$U_1 = 1, U_2 < 1$	3	0, $\Phi_2, 2\pi - \Phi_2$	0, π, π
OC8	$U_1 = -1, U_2 < 1$		$\pi, \Phi_2, 2\pi - \Phi_2$	0, π, π
OC9	$ U_1 < 1, U_2 = 1$		$\Phi_1, 2\pi - \Phi_1, 0$	0, 0, π
OC10	$ U_1 < 1, U_2 = -1$		$\Phi_1, 2\pi - \Phi_1, \pi$	0, 0, π

В мёртвом положении механизма знаменатель формул (27), (28), (29) для неизвестных линейных параметров l_{23} , l_{34} , l_{41} равен нулю, поскольку $\sin \varphi_{34}^{(k)} = 0$ ($k=1, 2, \dots, S$). Поэтому неизвестные l_{23} , l_{34} , l_{41} становятся бесконечно большими. Отсюда следует, что мёртвое положение механизма ВЦЦЦ не представляется возможным реализовать практически, то есть о нём можно говорить только в теоретическом плане.

13.4. Связь числа мёртвых положений со свойствами механизма

Каждому из трёх случаев, указанных в п. 13.2, соответствуют определённые значения числа S мёртвых положений механизма. Сведения на этот счёт приведены в таблице 3.

Таблица 3. Число мёртвых положений для трёх областей возможных значений постоянных угловых параметров $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ механизма

Области возможных значений параметров $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$	Свойства механизма ВЦЦЦ	Число S мёртвых положений
Ω_1	Кривошипный механизм	0
Ω_2	Коромысловый механизм	1, 2, 3 или 4
Ω_3	Механизм не существует ни при каких значениях угла φ	0
	Механизм существует только при одном значении угла φ	1

Значения $S=0$ и $S=1$ встречаются в таблице 3 дважды. В связи с этим возникает необходимость разделить соответствующие области возможных значений параметров U_1 и U_2 на две подобласти. Речь идёт об области для регулярного случая 1 (см. таблицу 1) и четырёх областях для особых случаев ОС1, ОС2, ОС3 и ОС4 (см. таблицу 2).

Результаты деления каждой из указанных областей на две подобласти представлены в таблице 4. Случай 1-а в таблице 4 относится к кривошипным механизмам (область Ω_1), случай 1-б – к ситуации, когда механизм не существует ни при каких значениях угла φ (первая часть области Ω_3), случаи ОС1-а, ..., ОС4-а – к коромысловым механизмам (часть области Ω_2), случаи ОС1-б, ..., ОС4-б – к ситуации, когда механизм существует только при одном значении угла φ (вторая часть области Ω_3).

С целью наглядного графического представления областей существования механизмов ВЦЦЦ будем использовать координатную плоскость (U_1, U_2) , показанную на рис. 2. Плоскость (U_1, U_2) разделена прямыми $U_1 = 1$, $U_1 = -1$, $U_2 = 1$ и $U_2 = -1$ на девять зон. Указанные прямые обозначены на рис. 2 через $abcd$, $efgh$, $ifbj$ и $kgcl$ соответственно.

Каждое из условий для параметров U_1 и U_2 (в форме равенств или неравенств), фигурирующих в таблицах 1, 2 и 4, отображается в координатной плоскости (U_1, U_2) соответствующей зоной или прямой.

Таблица 4. Области возможных значений параметров U_1 и U_2 для случаев, когда $S=0$ и $S=1$

S	Случай	Параметры U_1 и U_2	Случай	Параметры U_1 и U_2
0	1-а	$ U_1 > 1, U_2 > 1,$ $U_1 U_2 < 0$	1-б	$ U_1 > 1, U_2 > 1,$ $U_1 U_2 > 0, U_1 \neq U_2$
1	OC1-а	$U_1 = 1, U_2 > 1,$ $U_1 U_2 < 0$	OC1-б	$U_1 = 1, U_2 > 1,$ $U_1 U_2 > 0$
	OC2-а	$U_1 = -1, U_2 > 1,$ $U_1 U_2 < 0$	OC2-б	$U_1 = -1, U_2 > 1,$ $U_1 U_2 > 0$
	OC3-а	$ U_1 > 1, U_2 = 1,$ $U_1 U_2 < 0$	OC3-б	$ U_1 > 1, U_2 = 1,$ $U_1 U_2 > 0$
	OC4-а	$ U_1 > 1, U_2 = -1,$ $U_1 U_2 < 0$	OC4-б	$ U_1 > 1, U_2 = -1,$ $U_1 U_2 > 0$

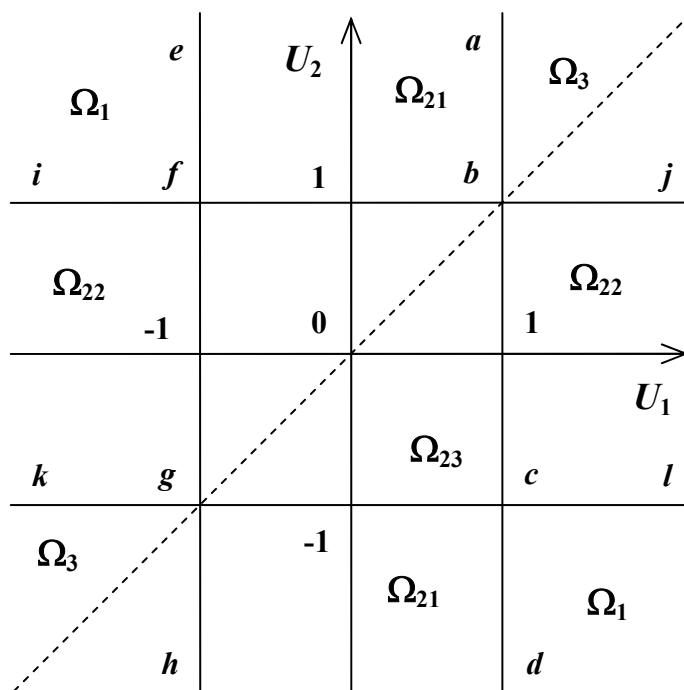


Рис. 2. Области возможных значений параметров U_1 и U_2 для механизмов ВЦЦ различного вида

13.5. Область существования кривошипных механизмов

В п. 13.4 была получена область Ω_1 существования кривошипных механизмов ВЦЦ в виде условий, содержащих параметры U_1 и U_2 (см. случай 1-а в таблице 4). Эта область определяется следующими неравенствами:

$$|U_1| > 1, |U_2| > 1, U_1 U_2 < 0. \quad (46)$$

В координатной плоскости (U_1, U_2) (см. рис. 2) область Ω_1 отображается в виде двух зон: efi и dcl (исключая граничные прямые ef, fi, dc и cl).

Покажем, что область Ω_1 можно представить в более простой форме, содержащей только один параметр. Из формулы (39) видно, что

$$(\cos \varphi_{34})_{\min} = \frac{a_3}{a_2} - \frac{|a_1|}{|a_2|}; \quad (\cos \varphi_{34})_{\max} = \frac{a_3}{a_2} + \frac{|a_1|}{|a_2|}. \quad (47)$$

Функция $\varphi_{34}(\varphi)$ будет существовать при любых значениях аргумента φ в том случае, когда выполняются следующие неравенства:

$$(\cos \varphi_{34})_{\min} > -1; \quad (\cos \varphi_{34})_{\max} < 1. \quad (48)$$

После подстановки из (47) в неравенства (48) получаем:

$$\frac{a_3}{a_2} - \frac{|a_1|}{|a_2|} > -1; \quad \frac{a_3}{a_2} + \frac{|a_1|}{|a_2|} < 1. \quad (49)$$

Два неравенства (49) могут быть преобразованы к одному неравенству:

$$U_3 > 1, \quad (50)$$

где

$$U_3 = \frac{|a_2| - |a_3|}{|a_1|}. \quad (51)$$

Неравенство (51) определяет область Ω_1 значений постоянных угловых параметров $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ и θ_4 , в пределах которой входное звено 2 является кривошипом. Множество кривошипных механизмов структуры ВЦЦЦ обозначим через $M1$.

Отметим, что условия (46) и (50) эквивалентны.

13.6. Область значений параметров, в пределах которой механизм ВЦЦЦ не существует

В п. 13.4 была получена область Ω_3 , в пределах которой механизм ВЦЦЦ не существует. Область Ω_3 представлена в виде условий, содержащих параметры U_1 и U_2 (см. случаи 1-б, ОС1-б, ОС2-б, ОС3-б и ОС4-б в таблице 4). Эта область определяется следующими неравенствами:

$$\begin{aligned} & (|U_1| > 1, |U_2| > 1, U_1 U_2 > 0, U_1 \neq U_2) \cup \\ & (|U_1| = 1, |U_2| > 1, U_1 U_2 > 0) \cup (|U_1| > 1, |U_2| = 1, U_1 U_2 > 0) \end{aligned} \quad (52)$$

В координатной плоскости (U_1, U_2) (см. рис. 2) область Ω_3 имеет вид двух зон: abj и $h g k$ (включая граничные прямые ab, bj, hg и gk , но исключая точки b и g).

Покажем, что область Ω_3 можно представить в более простой форме, содержащей только один параметр U_3 .

Функция $\varphi_{34}(\varphi)$ не существует ни при каких значениях аргумента φ в том случае, когда выполняются следующие неравенства:

$$\text{если } a_3/a_2 \geq 0, \text{ то } (\cos\varphi_{34})_{\min} > 1; \quad (53)$$

$$\text{если } a_3/a_2 < 0, \text{ то } (\cos\varphi_{34})_{\max} < -1.$$

После подстановки из (47) в (53) получаем:

$$\text{если } a_3/a_2 \geq 0, \text{ то } \frac{a_3}{a_2} - \frac{|a_1|}{|a_2|} > 1; \quad (54)$$

$$\text{если } a_3/a_2 < 0, \text{ то } \frac{a_3}{a_2} + \frac{|a_1|}{|a_2|} < -1.$$

В обоих случаях, то есть как при $a_3/a_2 \geq 0$, так и при $a_3/a_2 < 0$, условия (54) преобразуются к одному неравенству:

$$\frac{|a_3|}{|a_2|} - \frac{|a_1|}{|a_2|} > 1. \quad (55)$$

С учётом обозначения (50), неравенство (55) принимает такой вид:

$$U_3 < -1. \quad (56)$$

Рассмотрим теперь случай, когда $U_3 = -1$. Можно показать, что в этом случае функция $\varphi_{34}(\varphi)$ существует только при одном значении аргумента φ , а именно: при $\varphi=0$ или $\varphi=\pi$, то есть функция вырождается в одну изолированную точку. В данном случае нельзя говорить о том, что механизм существует, поскольку входное звено может занимать одно единственное положение, из которого оно не может переместиться в какое-либо другое положение. Поэтому значение $U_3 = -1$ будем относить к области значений параметров, в которой механизм ВЦЦЦ не существует.

Присоединив значение $U_3 = -1$ к неравенству (56), получаем:

$$U_3 \leq -1. \quad (57)$$

Неравенство (57) определяет область Ω_3 значений постоянных угловых параметров $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$, при которых механизм ВЦЦЦ не существует.

Отметим, что условия (52) и (57) эквивалентны.

13.7. Область существования коромысловых механизмов

Выше в пп. 13.5 и 13.6 было установлено, что область Ω_1 кривошипных механизмов определяется неравенством $U_3 > 1$, а область Ω_3 , в пределах которой механизм ВЦЦЦ не существует, – неравенством $U_3 \leq -1$. Следовательно, область Ω_2 существования коромысловых механизмов определяется двойным неравенством:

$$-1 < U_3 \leq 1. \quad (58)$$

Множество коромысловых механизмов обозначим через M_2 .

Из сказанного выше ясно, что параметр U_3 может служить *критерием*, с помощью которого устанавливается принадлежность постоянных угловых параметров $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ механизма к области Ω_1, Ω_2 или Ω_3 .

Между тем, суждение об области существования механизма ВЦЦЦ, сделанное на основании критерия U_3 , является вполне адекватным только в отношении областей Ω_1 и Ω_3 , то есть когда речь идёт о кривошипных механизмах или же когда механизм не су-

существует. Что касается коромысловых механизмов, то по значению критерия U_3 не представляется возможным получить более детальную информацию об области существования таких механизмов. Например, по значению U_3 нельзя установить число S мёртвых положений механизма при изменении входного угла φ от 0 до 2π , число отрезков изменения аргумента φ , в пределах которых функция $\varphi_{34}(\varphi)$ существует, левые и правые границы каждого из указанных отрезков.

С целью получить более полные сведения об области Ω_2 существования коромысловых механизмов ВЦЦЦ, мы представим эту область в форме, содержащей параметры U_1 и U_2 .

В п. 13.4 было показано, что у коромысловых механизмов число S мёртвых положений равно 1, 2, 3 или 4 (см. таблицу 3). Поэтому область Ω_2 устанавливается на основании данных, приведённых в таблицах 1, 2 и 4. Для получения области Ω_2 нужно объединить все условия, которым должны удовлетворять параметры U_1 и U_2 для регулярных случаев 2, 3, 4 ($S=2$ и 4) и особых случаев ОС1-а, ОС2-а, ОС3-а, ОС4-а, ОС5, ОС6, ..., ОС10 ($S=1, 2$ и 3). В результате получаем область Ω_2 в таком виде:

$$\begin{aligned} & (|U_1| < 1, |U_2| > 1) \cup (|U_1| = 1, |U_2| > 1, U_1 U_2 < 0) \cup \\ & (|U_2| < 1, |U_1| > 1) \cup (|U_2| = 1, |U_1| > 1, U_1 U_2 < 0) \cup \\ & (|U_1| \leq 1, |U_2| \leq 1, U_1 \neq U_2). \end{aligned} \quad (59)$$

В координатной плоскости (U_1, U_2) область Ω_2 имеет вид плоской фигуры, состоящей из пяти зон (см. рис. 2): $abfe, dcgh, jbcl, ifgk, bcfg$ (включая границы $bf, fe, dc, cg, bc, cl, if$ и fg , но исключая границы ab, jb, gh, gk и отрезок bg).

13.8. Три семейства коромысловых механизмов

Область Ω_2 существования коромысловых механизмов ВЦЦЦ разделим на три подобласти, которые обозначим через Ω_{21}, Ω_{22} и Ω_{23} . Они определяются следующими условиями:

$$\text{подобласть } \Omega_{21}: (|U_1| < 1, |U_2| > 1) \cup (|U_1| = 1, |U_2| > 1, U_1 U_2 < 0); \quad (60)$$

$$\text{подобласть } \Omega_{22}: (|U_2| < 1, |U_1| > 1) \cup (|U_2| = 1, |U_1| > 1, U_1 U_2 < 0); \quad (61)$$

$$\text{подобласть } \Omega_{23}: (|U_1| \leq 1, |U_2| \leq 1, U_1 \neq U_2). \quad (62)$$

Коромысловые механизмы, принадлежащие множеству M_2 , разделим соответственно на три семейства, обозначив их через $M_{2.1}, M_{2.2}$ и $M_{2.3}$. Некоторые сведения о механизмах трёх указанных семейств приведены в таблице 5.

Таблица 5. Сведения о коромысловых механизмах, принадлежащих семействам М2.1, М2.2 и М2.3

Семейство механизмов	Область существования	Номера соответствующих случаев (см. таблицы 1 и 2)		Значения угла φ_{34} в мёртвых положениях
		регулярный случай	особые случаи	
М2.1	Ω_{21}	2	ОС1-а, ОС2-а	0
М2.2	Ω_{22}	3	ОС3-а, ОС4-а	π
М2.3	Ω_{23}	4	ОС5, ОС6, ОС7, ОС8, ОС9, ОС10	0, π

Из таблиц 1, 2, 4 и 5 видно, что:

- механизмы семейства М2.1 имеют, как правило, два мёртвых положения, которые достигаются при $\varphi_{34}=0$ (только на границах подобласти Ω_{21} механизмы этого семейства имеют одно мёртвое положение);
- механизмы семейства М2.2 имеют, как правило, два мёртвых положения, которые достигаются при $\varphi_{34}=\pi$ (только на границах подобласти Ω_{22} механизмы этого семейства имеют одно мёртвое положение);
- механизмы семейства М2.3 имеют, как правило, четыре мёртвых положения, которые достигаются при $\varphi_{34}=0$ и $\varphi_{34}=\pi$ (только на границах подобласти Ω_{23} механизмы этого семейства имеют два или три мёртвых положения).

В координатной плоскости (U_1, U_2) подобласти Ω_{21} соответствуют зоны $abfe$ и $dcgh$ (включая границы fe и dc , но исключая границы ab , bf , cg и gh); подобласти Ω_{22} соответствуют зоны $jbcl$ и $ifgk$ (включая границы cl и if , но исключая границы jb , bc , fg и gk); подобласти Ω_{23} соответствует зона $bcgf$ (включая её границы, но исключая отрезок bg).

14. Сборки механизма ВЦЦЦ

14.1. Постановка задачи

В части I статьи был изложен алгоритм решения типовой задачи №1 анализа механизма ВЦЦЦ. Эта задача состоит в том, что по заданным значениям постоянных параметров $h_1, \theta_1, l_{12}, h_2, \theta_2, h_3, \theta_3, h_4, \theta_4$ (см. рис. 1), признака М варианта сборки механизма и независимой переменной φ определяются: 1) число H вариантов сборки механизма; 2) значения зависимых переменных $\varphi_{23}, \varphi_{34}, \varphi_{41}, l_{23}, l_{34}, l_{41}$ (пункт 2 выполняется только в том случае, если $H > 0$).

Рассмотрим теперь типовую задачу №2 анализа механизма. Значения постоянных параметров механизма ВЦЦЦ считаются заданными. Цель задачи №2 – найти:

- общее число G борок механизма, в том числе – число G_1 некривошипныхборок и число G_2 кривошипныхборок ($G = G_1 + G_2$);
- область существования (по углу φ) для каждой из некривошипныхборок;
- функции положения $\varphi_{23}(\varphi), \varphi_{34}(\varphi), \varphi_{41}(\varphi), l_{23}(\varphi), l_{34}(\varphi), l_{41}(\varphi)$ для каждой изборок механизма.

Обратим внимание на различие двух понятий – "вариант сборки" и "сборка" рычажного механизма [2, 6]. *Вариант сборки* – это одна из возможных конфигураций рычажного механизма при заданном положении входного звена. *Сборка* – это одна из

возможных конфигураций рычажного механизма, в которой непрерывное перемещение входного звена в пределах некоторого промежутка приводит к непрерывным перемещениям других подвижных звеньев.

Понятие *сборки* относится не только к определённому положению (из нескольких возможных положений) каждого из ведомых звеньев механизма при заданном положении входного звена, но и к множеству непрерывно изменяющихся положений ведомых звеньев при непрерывном и одностороннем вращении входного звена в пределах некоторого диапазона. Промежуток изменения обобщённой координаты рычажного механизма, в пределах которого существует данная сборка, называется *областью существования* этой сборки.

Механизм не может самопроизвольно перейти из данной сборки в другую сборку в процессе своего функционирования (если движущий момент приложен только к входному звену). Выбор конкретной сборки производится при монтаже механизма. Поэтому в реальном механизме имеет место однозначное соответствие между положением входного звена и положениями других подвижных звеньев. Для того чтобы перейти к другой сборке, нужно при фиксированном положении входного звена разъединить звенья механизма, по крайней мере, в одной паре и затем их вновь соединить, изменив сборку.

14.2. Сборки кривошипного механизма

Пусть при подсчёте безразмерного критерия U_3 по формуле (51) получено: $U_3 > 1$. Это означает, что рассматриваемый механизм является кривошипным, то есть принадлежит множеству M1 (см. п. 13.5).

Такой механизм имеет два варианта сборки при любых значениях независимой переменной $\varphi \in [0, 2\pi]$, то есть $H(\varphi) \equiv 2$. Отсюда следует, что механизм имеет две сборки, то есть $G=2$. Обе эти сборки являются *кривошипными*, так что $G_1=0$, $G_2=2$. Признак M варианта сборки (см. п. 7.1) одновременно является признаком сборки рассматриваемого механизма.

Функции положения звеньев механизма определяются в табличной форме для ряда последовательных значений независимой переменной φ , лежащих в пределах от 0 до 2π . Расчёт неизвестных параметров φ_{23} , φ_{34} , φ_{41} , l_{23} , l_{34} , l_{41} производится в последовательности, описанной в п. 11. Расчёт выполняется два раза: первый раз при $M = +1$ (для первой сборки), второй раз при $M = -1$ (для второй сборки).

14.3. Сборки коромысловых механизмов

Пусть при подсчёте безразмерного критерия U_3 по формуле (51) получено: $-1 < U_3 \leq 1$. Это означает, что рассматриваемый механизм ВЦЦЦ является коромысловым, то есть принадлежит множеству M2 (см. п. 13.7). Далее нужно подсчитать параметры U_1 и U_2 по формулам (44), с тем чтобы, основываясь на формулах (60), (61) и (62), установить, к какому из семейств M2.1, M2.2 или M2.3 коромысловых механизмов принадлежит рассматриваемый механизм.

Из результатов, полученных в п. 13.8, видно, что механизмы, принадлежащие семействам M2.1 и M2.2, имеют, как правило, две *некривошипных* сборки (и только в особых случаях – одну сборку), а механизмы семейства M2.3 имеют, как правило, четыре *некривошипных* сборки (и только в особых случаях – две или три сборки). В таблице 6 содержатся сведения об областях существованияборок для механизмов ВЦЦЦ, принадлежащих семействам M2.1, M2.2 и M2.3, в регулярных случаях (см. таблицу 5). Аналогичные сведения, но для десяти особых случаев, приведены в таблице 7.

Таблица 6. Сборки коромысловых механизмов ВЦЦ и области их существования в регулярных случаях

Семейство механизмов	Число сборок	U_4	Номера сборок	Области существования сборок
M2.1	2	$U_4 > 0$	1, 2	$\Phi_1 \leq \varphi \leq 2\pi - \Phi_1$ (63)
		$U_4 < 0$	1, 2	$-\Phi_1 \leq \varphi \leq \Phi_1$ (64)
M2.2	2	$U_4 > 0$	1, 2	$-\Phi_2 \leq \varphi \leq \Phi_2$ (65)
		$U_4 < 0$	1, 2	$\Phi_2 \leq \varphi \leq 2\pi - \Phi_2$ (66)
M2.3	4	$U_4 > 0$	1, 2	$\Phi_1 \leq \varphi \leq \Phi_2$ (67)
			3, 4	$2\pi - \Phi_2 \leq \varphi \leq 2\pi - \Phi_1$ (68)
		$U_4 < 0$	1, 2	$\Phi_2 \leq \varphi \leq \Phi_1$ (69)
			3, 4	$2\pi - \Phi_1 \leq \varphi \leq 2\pi - \Phi_2$ (70)

В таблицах 6 и 7 принято следующее обозначение:

$$U_4 = a_2/a_1. \quad (71)$$

Таблица 7. Сборки коромысловых механизмов ВЦЦ и области их существования в особых случаях

Особый случай	Число сборок	Номера сборок	Области существования сборок
OC1-a	2	1, 2	$0 \leq \varphi \leq 2\pi$ (72)
OC2-a	2	1, 2	$-\pi \leq \varphi \leq \pi$ (73)
OC3-a	2	1, 2	$0 \leq \varphi \leq 2\pi$ (74)
OC4-a	2	1, 2	$-\pi \leq \varphi \leq \pi$ (75)
OC5	4	1, 2	$0 \leq \varphi \leq \pi$ (76)
		3, 4	$\pi \leq \varphi \leq 2\pi$ (77)
OC6	4	1, 2	$0 \leq \varphi \leq \pi$ (78)
		3, 4	$\pi \leq \varphi \leq 2\pi$ (79)
		1, 2	$-\Phi_2 \leq \varphi \leq 0$ (80)

OC7	4	1, 2	$-\Phi_2 \leq \varphi \leq 0$	(80)
		3, 4	$0 \leq \varphi \leq \Phi_2$	(81)
OC8	4	1, 2	$\Phi_2 \leq \varphi \leq \pi$	(82)
		3, 4	$\pi \leq \varphi \leq 2\pi - \Phi_2$	(83)
OC9	4	1, 2	$-\Phi_1 \leq \varphi \leq 0$	(84)
		3, 4	$0 \leq \varphi \leq \Phi_1$	(85)
OC10	4	1, 2	$\Phi_1 \leq \varphi \leq \pi$	(86)
		3, 4	$\pi \leq \varphi \leq 2\pi - \Phi_1$	(87)

Из таблиц 6 и 7 видно, что

- области существования сборок зависят от знака величины U_4 ;
- сборки 1 и 2 для всех коромысловых механизмов, а также сборки 3 и 4 для механизмов семейства М2.3, имеют одинаковую область существования.

Функции положения звеньев механизма определяются в табличной форме для ряда последовательных значений независимой переменной φ , взятых в пределах области существования соответствующей сборки. Расчёт неизвестных параметров φ_{23} , φ_{34} , φ_{41} , l_{23} , l_{34} , l_{41} производится в последовательности, описанной в п. 11. Для механизмов, принадлежащих семействам М2.1 и М2.2, расчёт выполняется два раза: первый раз при $M = +1$ (для сборки 1), второй раз при $M = -1$ (для сборки 2). Для механизмов, принадлежащих семейству М2.3, расчёт выполняется четыре раза: для сборок 1 и 3 при $M = +1$, для сборок 2 и 4 при $M = -1$.

14.4. Численные примеры

Расчёты в примерах выполнены по программе, составленной в системе MathCAD. С помощью этой программы получены также и графики функций положения механизма ВЦЦЦ.

Пример 1. Заданы постоянные параметры механизма ВЦЦЦ: $\theta_1=45^\circ$, $\theta_2=120^\circ$, $\theta_3=300^\circ$, $\theta_4=240^\circ$, $h_1=h_2=h_3=h_4=l_{12}=1$ (см. рис. 1).

Требуется определить функции положения $\varphi_{23}(\varphi)$, $\varphi_{34}(\varphi)$, $\varphi_{41}(\varphi)$, $l_{23}(\varphi)$, $l_{34}(\varphi)$, $l_{41}(\varphi)$ для всех возможных сборок механизма.

Находим по формуле (51): $U_3=1.0556$. Так как $U_3>1$, то рассматриваемый механизм является кривошипным. Механизм имеет две кривошипных сборки (см. п. 14.2). Расчёт функций положения производится на основании алгоритма, описанного в части I статьи, для ряда последовательных значений независимой переменной φ в пределах от 0 до 360° .

На рисунках 3 и 4 приведены графики шести функций положения для двух сборок механизма.

Пример 2. Дано: $\theta_1=90^\circ$, $\theta_2=120^\circ$, $\theta_3=265^\circ$, $\theta_4=240^\circ$, $h_1=h_2=h_3=h_4=l_{12}=1$.

Находим по формуле (51): $U_3=0.9459$. Так как параметр U_3 удовлетворяет условию $-1 < U_3 < 1$, то рассматриваемый механизм является коромысловым. Вычисляем

по формуле (44): $U_1=0.9459$, $U_2=-1.0465$. Найденные значения параметров U_1 и U_2 свидетельствуют о том, что механизм принадлежит семейству M2.1 (см. п. 13.8).

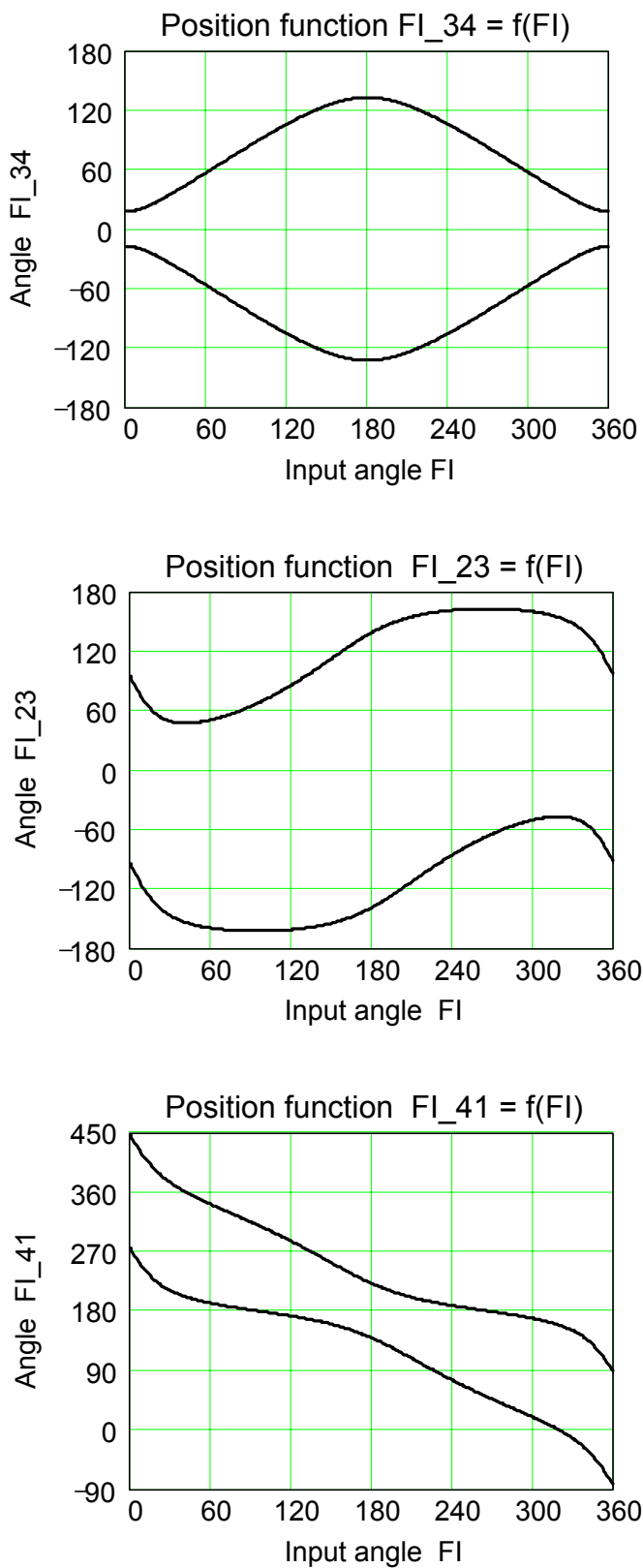


Рис. 3. Графики функций $\varphi_{34}(\varphi)$, $\varphi_{23}(\varphi)$, $\varphi_{41}(\varphi)$ (пример 1)

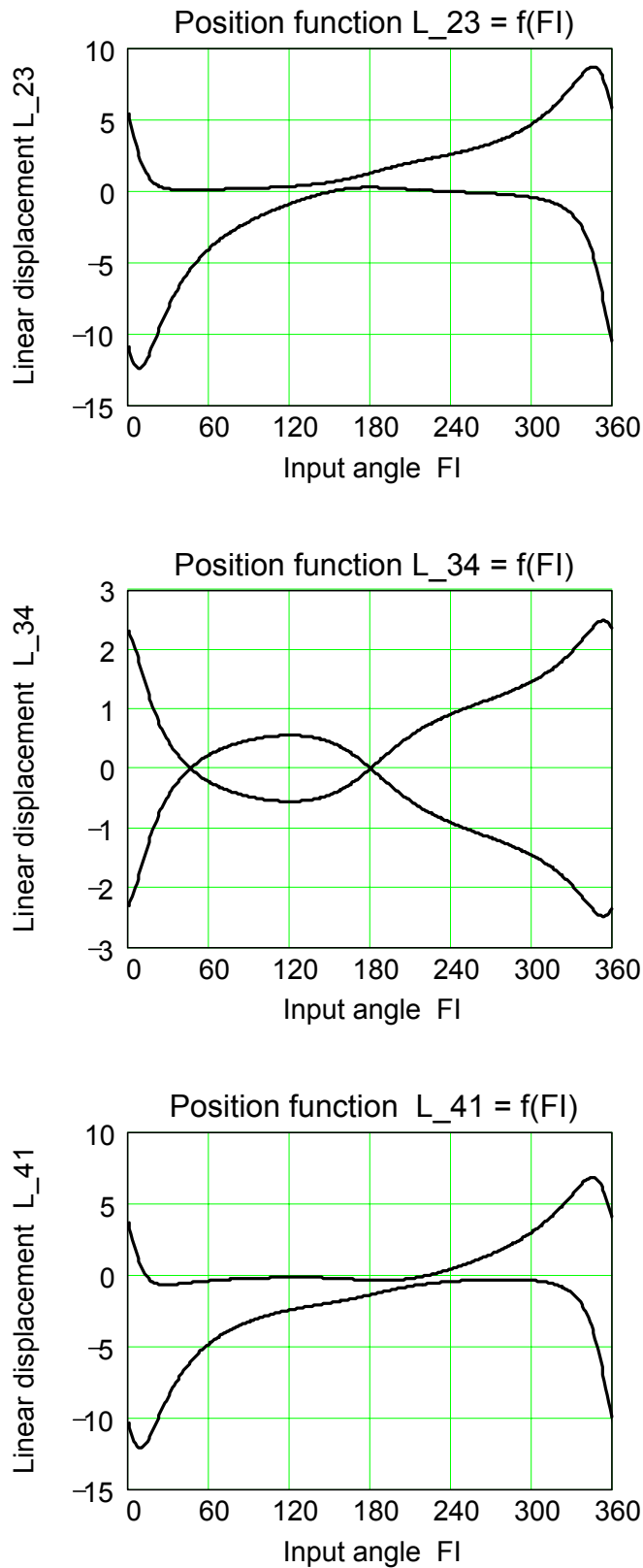


Рис. 4. Графики функций $l_{23}(\varphi)$, $l_{34}(\varphi)$, $l_{41}(\varphi)$ (пример 1)

Далее находим значения угла φ в двух мёртвых положениях механизма, используя формулы (45) и таблицу 1:

$$\varphi^{(1)} = \Phi_1 = 18.937^\circ, \quad \varphi^{(2)} = 360^\circ - \Phi_1 = 341.063^\circ.$$

Рассматриваемый механизм имеет две некривошипных сборки. Вычисляем параметр U_4 по формуле (71): $U_4=0.9962$. Так как $U_4 > 0$, то в соответствии с формулой (63) обе сборки имеют следующую область существования: $18.937^\circ \leq \varphi \leq 341.063^\circ$. На рисунках 5 и 6 приведены графики шести функций положения для двух сборок механизма.

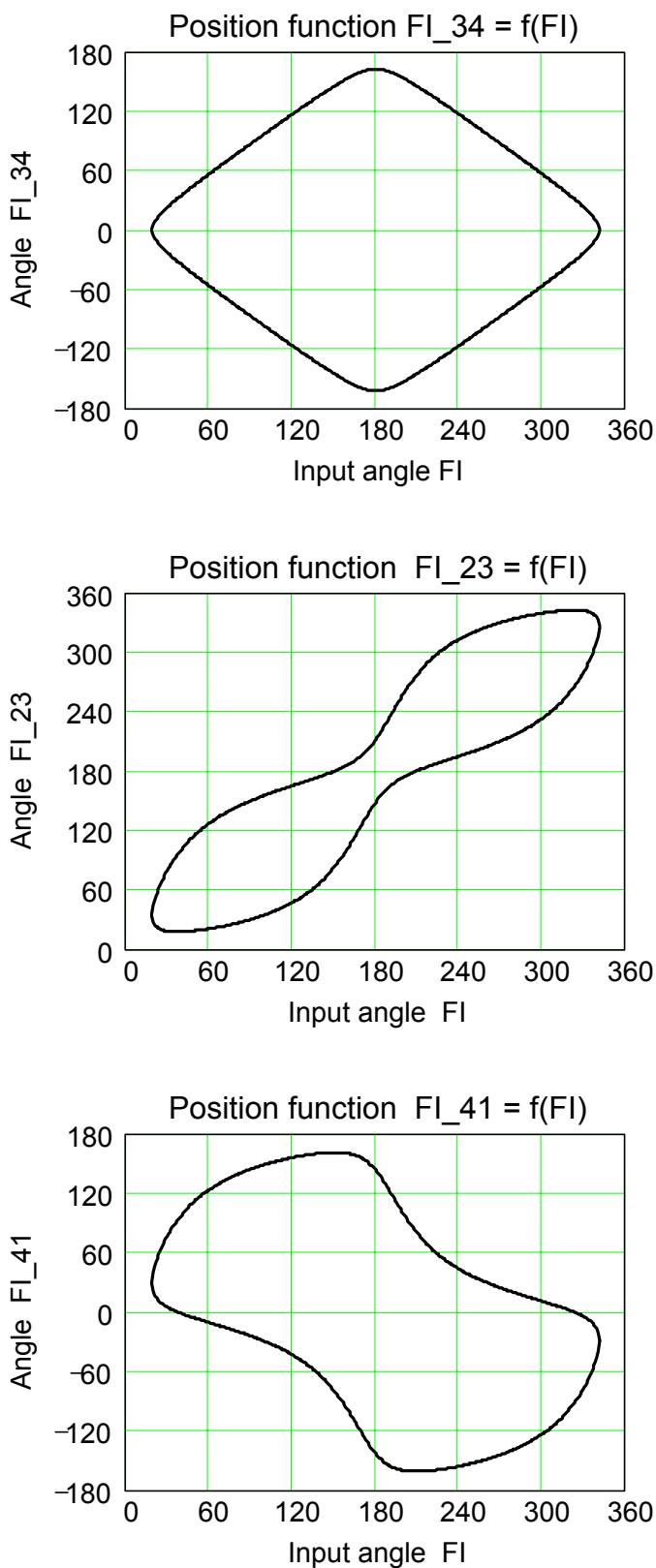


Рис. 5. Графики функций $\varphi_{34}(\varphi)$, $\varphi_{23}(\varphi)$, $\varphi_{41}(\varphi)$ (пример 2)

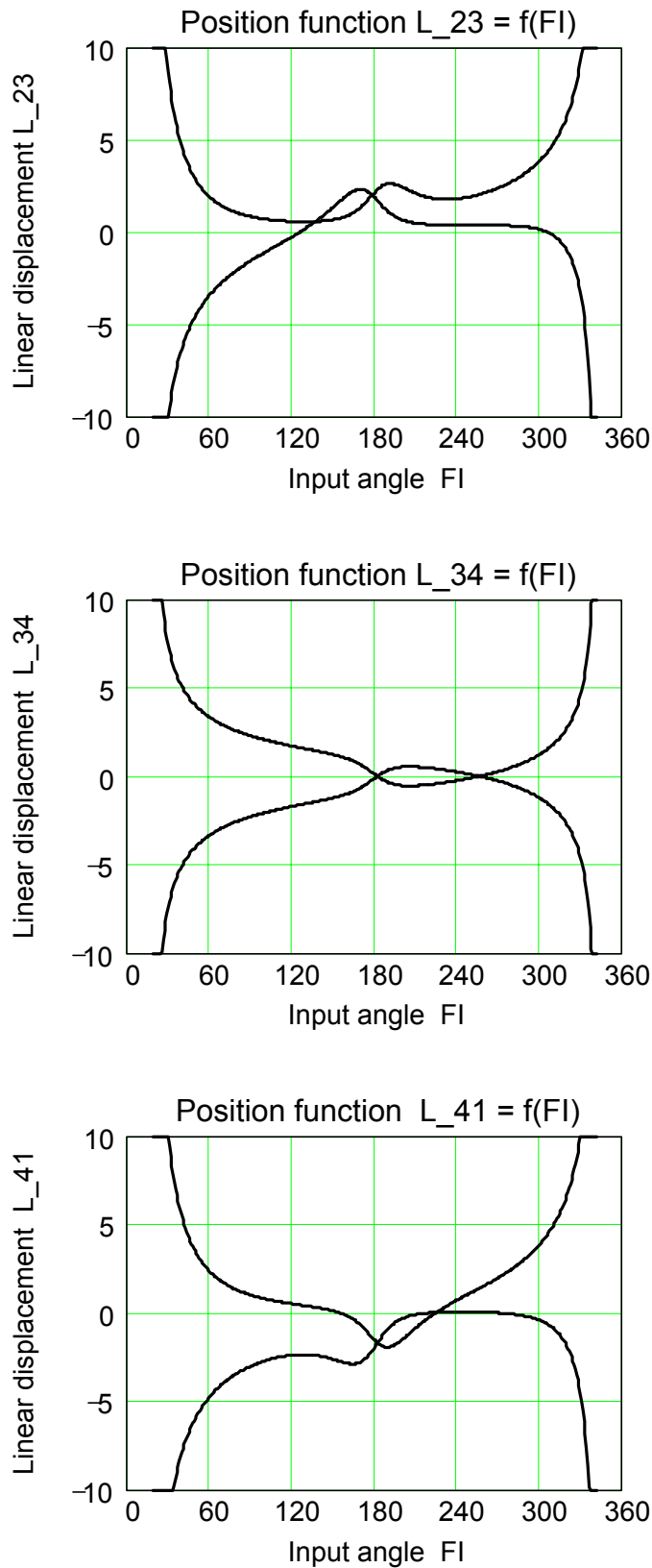


Рис. 6. Графики функций $l_{23}(\varphi)$, $l_{34}(\varphi)$, $l_{41}(\varphi)$ (пример 2)

При приближении значения φ к границам области существования сборок переменные l_{23} , l_{34} и l_{41} неограниченно возрастают. Поэтому графики функций $l_{23}(\varphi)$, $l_{34}(\varphi)$, $l_{41}(\varphi)$ изображены на рис. 6 в пределах от -10 до $+10$ по оси ординат.

Пример 3. Дано: $\theta_1=90^\circ$, $\theta_2=120^\circ$, $\theta_3=265^\circ$, $\theta_4=230^\circ$, $h_1=h_2=h_3=h_4=l_{12}=1$.

Находим по формуле (51): $U_3=0.8165$. Так как параметр U_3 удовлетворяет условию $-1 < U_3 < 1$, то рассматриваемый механизм является коромысловым. Вычисляем по формуле (44): $U_1=0.8165$, $U_2=-0.9459$. Найденные значения параметров U_1 и U_2 свидетельствуют о том, что механизм принадлежит семейству М2.3 (см. п. 13.8).

Далее находим значения угла φ в четырёх мёртвых положениях механизма, используя формулы (45) и таблицу 1:

$$\begin{aligned}\varphi^{(1)} &= \Phi_1 = 35.264^\circ, & \varphi^{(2)} &= 360^\circ - \Phi_1 = 324.736^\circ, \\ \varphi^{(3)} &= \Phi_2 = 161.063^\circ, & \varphi^{(4)} &= 360^\circ - \Phi_2 = 198.937^\circ.\end{aligned}$$

Рассматриваемый механизм имеет четыре некривошипных сборки. Вычисляем параметр U_4 по формуле (71): $U_4=0.8812$. Так как $U_4 > 0$, то в соответствии с формулами (67) и (68) сборки 1 и 2 существуют на отрезке $[35.264^\circ, 161.063^\circ]$, а сборки 3 и 4 – на отрезке $[198.937^\circ, 324.736^\circ]$.

На рисунках 7 и 8 приведены графики шести функций положения для двух сборок механизма. На рис. 8 ординаты графиков функций $l_{23}(\varphi)$, $l_{34}(\varphi)$, $l_{41}(\varphi)$ ограничены пределами от -10 до $+10$.

14.5. Заключительные замечания

Механизмы структуры ВЦЦЦ обладают одной необычной особенностью. Дело в том, что наличие или отсутствие кривошипа или коромысла (речь идёт о входном звене) зависит от значений *четырёх* постоянных угловых параметров θ_1 , θ_2 , θ_3 , θ_4 механизма. Между тем, принадлежность рассматриваемого механизма к одному из трёх множеств (кривошипные механизмы, коромысловые механизмы, отсутствие механизма) определяется значением только *одного* безразмерного параметра U_3 . Что касается областей существования трёх семейств коромысловых механизмов, то они определяются значениями только *двух* безразмерных параметров U_1 и U_2 .

Если известны значения углов θ_1 , θ_2 , θ_3 , θ_4 , то параметры U_1 , U_2 и U_3 определяются по формулам (44) и (51) однозначно. Если же задать параметр U_3 , то формула (51) позволяет найти только один из углов θ_1 , θ_2 , θ_3 , θ_4 ; другие же три угла нужно предварительно выбрать произвольно (в некоторых пределах). В случае задания параметров U_1 и U_2 формулы (44) позволяют найти только два из углов θ_1 , θ_2 , θ_3 , θ_4 ; другие же два угла могут быть назначены произвольно.

Отметим, что большая часть из полученных в статье результатов относится не только к механизму ВЦЦЦ, но также и к четырёхзвенному сферическому механизму ВВВВ (с четырьмя вращательными парами). Для анализа сферического механизма могут быть использованы все части текста и формулы, в которых отсутствуют линейные параметры h_1 , h_2 , h_3 , h_4 , l_{12} , l_{23} , l_{34} , l_{41} .

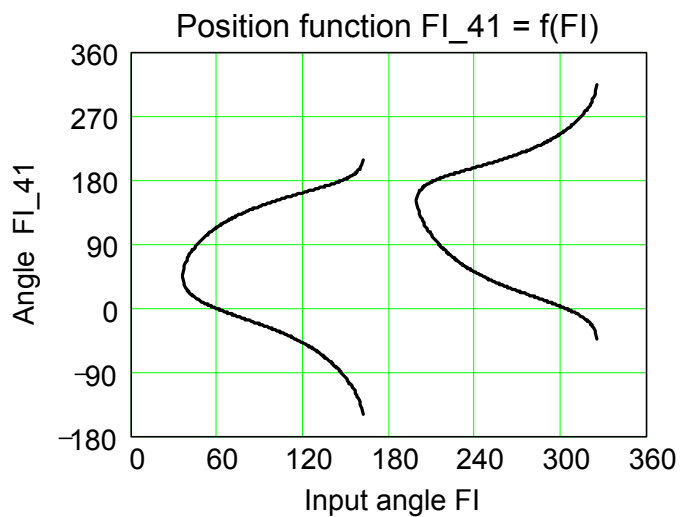
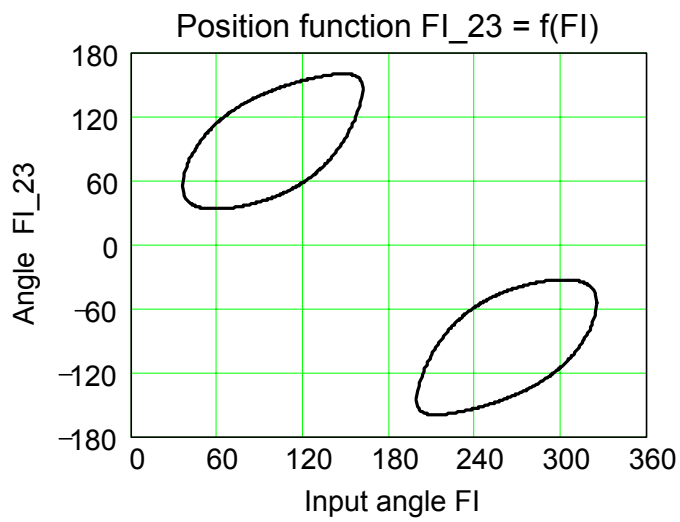
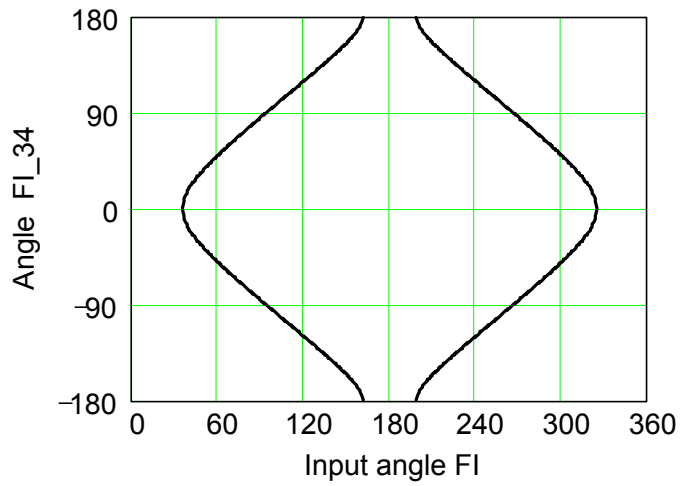


Рис. 7. Графики функций $\varphi_{34}(\varphi)$, $\varphi_{23}(\varphi)$, $\varphi_{41}(\varphi)$ (пример 3)

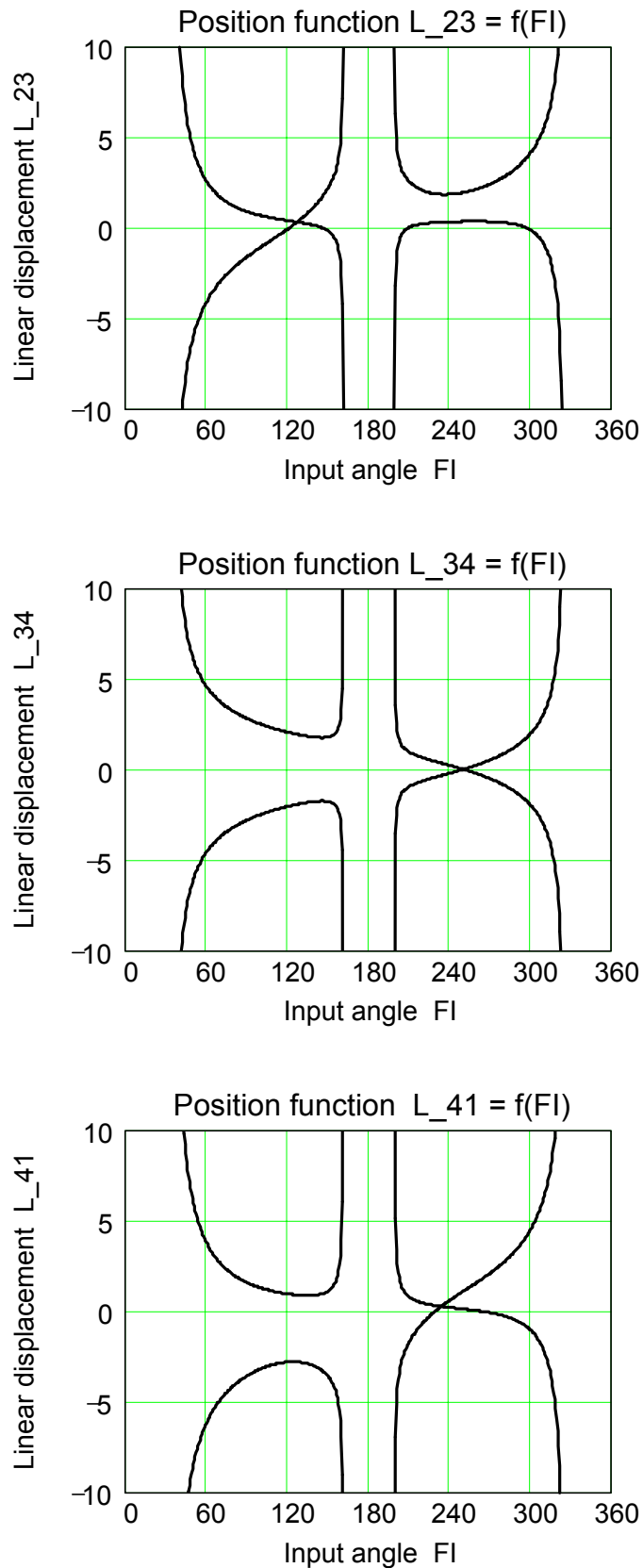


Рис. 8. Графики функций $l_{23}(\varphi)$, $l_{34}(\varphi)$, $l_{41}(\varphi)$ (пример 3)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Диментберг Ф.М.** Теория пространственных шарнирных механизмов. М.: Наука, 1982, 336 с.
2. Механика машин: Учебное пособие для вузов / **И.И. Вульфсон, М.Л. Ерихов, М.З. Коловский, Э.Е. Пейсах** и др.; Под редакцией Г.А. Смирнова. – М.: Высшая школа, 1996, 511 с.
3. **Пейсах Э.Е.** Исследование и синтез четырёхзвенных механизмов. Конспект лекций. – Л.: ЛИТЛП, 1983, 64 с.
4. **Пейсах Э.Е.** Векторная рекуррентная формула и ее применение в пространственной кинематике. - Сборник: "Теория механизмов и машин", Харьков, изд-во ХГУ, выпуск 39, 1985, с. 133-140.
5. **Пейсах Э.Е.** Определение положений звеньев одноконтурных пространственных рычажных механизмов на основе векторной рекуррентной формулы. – International Conference "Spatial Mechanisms and High Class Mechanisms (Theory and Practice)", Proceedings, Vol. 1, Republic of Kazakhstan, Almaty, 1994, с. 46-51.
6. **Пейсах Э.Е.** Кинематический анализ рычажных механизмов. - Глава 2 в части II книги: Машиностроение. Энциклопедия (в сорока томах), том I-3, книга 2. М.: Машиностроение, 1995.- 624 с. (с. 395-430).
7. **Cheng, H.H. and Tompson, S.:** Singularity analysis of spatial mechanisms using dual polynomials and complex dual numbers. Transactions of ASME, Vol. 121, June 1999, p. 200-205
8. **Crane III, C.D., Duffy, J.:** Kinematic analysis of robot manipulators. Cambridge Univ. Press, 1998, 429 p.
9. **Dukkipati, R.V.:** Spatial mechanisms. Analysis and Synthesis. Narosa Publ. House, New Delhi, India, 2001, 367 pp.
10. **McCarthy, J.M.:** Geometric Design of Linkages. Springer-Verlag, New York, 2000, 320 p.
11. **Peisach E.E.** The vectorial recurrent formula and its use in kinematics of spatial linkages and manipulators. - X Congresso Nazionale dell' Associazione Italiana di Meccanica Teorica ed Applicata (AIMETA), Volume secondo, Italia, Pisa, 1990, p. 489-493.
12. **Reinholtz, C.F., Sandor, G.N., Duffy, J.:** Branching Analysis of Spherical RRRR and Spatial RCCC Mechanisms. Transactions of the ASME, Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, 1986, Vol. 108, p. 481-486.
13. **Shaoen, F.:** Analysis of spatial four-bar RCCC mechanism. Proceedings of Intern. Conference on Mechanical Transmissions and Mechanisms, Tianjin, China, 1997, p. 192-195.
14. **Suh, C.H., Radcliffe, C.W.:** Kinematics and mechanism design. John Wiley and Sons, New York, 1978, 434 p.

Поступила в редакцию 19.05.2003