

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭВОЛЮТЫ НЕКРУГЛОГО КОЛЕСА

Введение

Значительным вопросом теории зацепления некруглых колес является нахождение эволют профильных кривых, их связи с осуществляемой схемой нарезания зубьев. Эволюта позволяет оценить кривизну профилей зубьев, сравнить достоинства и недостатки различных схем нарезания. Графическое изображение эволюты совместно с центроидой способствует визуальному выявлению тех зубьев некруглого колеса, у которых эволюта близка к центроиде и, следовательно, есть опасность подрезания ножки зуба

Постановка задачи

В дифференциальной геометрии эволютой заданной кривой L называют множество ее центров кривизны [1]. Сама кривая L по отношению к своей эволюте называется эвольвентой. Для круглого зубчатого колеса эволютой эвольвентных профилей зубьев является, как известно, основная окружность и ее определение не вызывает никаких затруднений.

Для некруглого зубчатого колеса определение эволюты профиля значительно сложнее. При нарезании зубьев методом обкатки профильные кривые являются огибающими множества положений режущей кромки при взаимном перекатывании центроид инструмента и колеса.

Переменность кривизны центроиды колеса обуславливает трудность получения аналитической функции, определяющей профильную кривую зуба, и отсюда невозможность определения радиусов кривизны и соответственно центров кривизны, т.е. эволюты. В свое время Ф.Л.Литвиным [2] были получены формулы для расчета точек эволюты эллиптического колеса. При этом был использован достаточно сложный кинематический способ с применением кулисного механизма, в котором звено перекатывается по искомой эволюте.

В настоящей работе для определения эволют профильных кривых колеса произвольной формы используется общий способ дифференциальной геометрии, на наш взгляд, более простой в данном случае. Здесь эволюту рассматриваем как огибающую множества положений профильных нормалей.

Методика решения

Прежде условимся, что нарезание осуществляется методом обкатки, а инструментом является рейка с прямолинейным профилем и углом профиля α . При нарезании прямолинейная центроида рейки $N-N$ (рис. 1) обкатывает без скольжения центроиду эллиптического колеса Π , т.е. в каждом положении центроида рейки является касательной к центроиде колеса. Тогда любая профильная нормаль рейки, в том числе и нормаль $n-n$, проходящая через полюс зацепления P_0 , составляет постоянный угол α с касательной к центроиде колеса в точке P_0 .

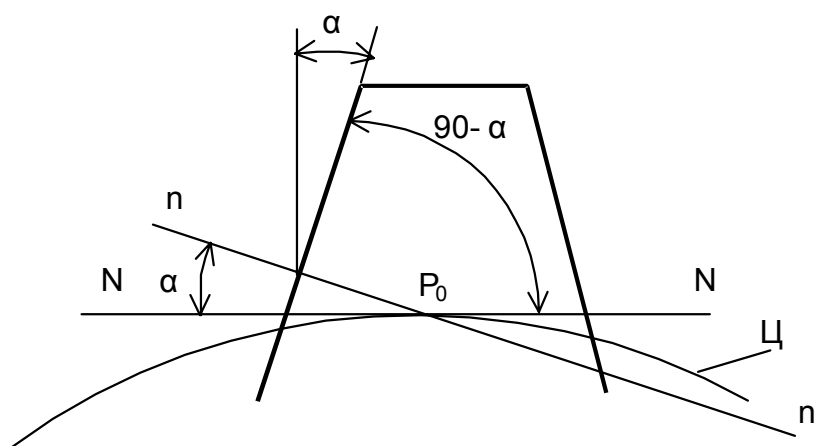


Рис. 1. Профильная нормаль рейки

Зуб рейки и зуб нарезаемого колеса в точке касания имеют общую нормаль, которая проходит через полюс P_0 . Поэтому, переходя к колесу, можно утверждать, что если схемой нарезания обеспечивается качение прямолинейной центроиды рейки по центроиде колеса, а именно это является условием обкатки при нарезании, то для любой точки B центроиды колеса (рис.2) угол между касательной $t-t$ к центроиде и нормалью $n-n$ зуба колеса, проходящей через эту же точку B , равен профильному углу α инструментальной рейки. К такому же выводу можно прийти и при рассмотрении процесса нарезания долбяком.

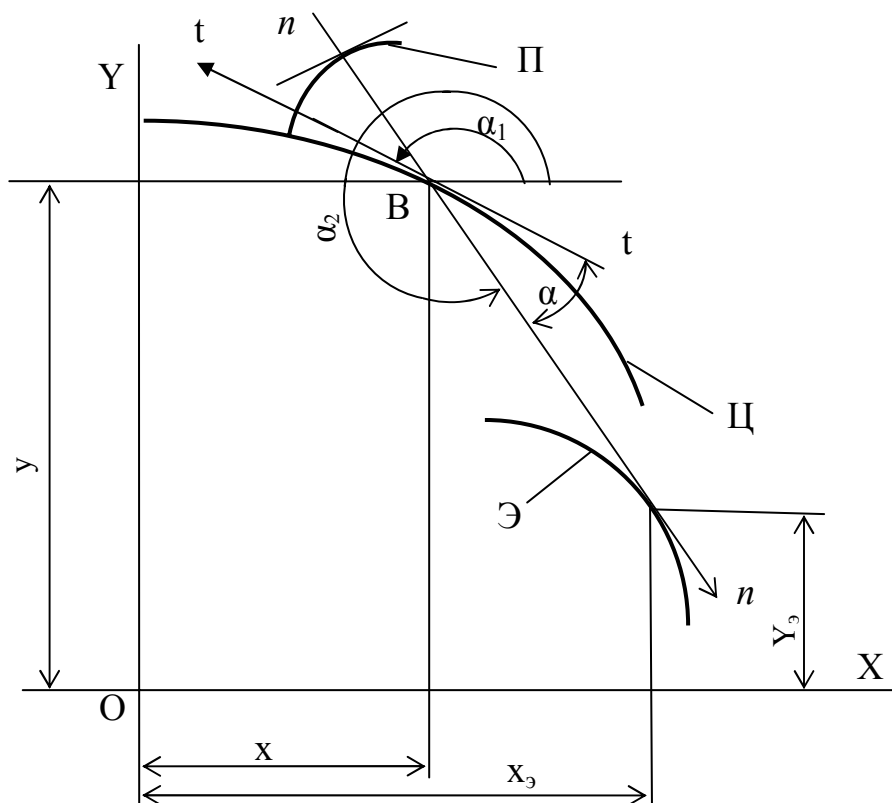


Рис. 2. Профильная нормаль нарезаемого колеса

Если для центроиды колеса известно уравнение центроиды Γ в выбранной системе координат XY , например, в параметрическом виде

$$x=x(v), y=y(v), \quad (1)$$

то угол наклона касательной $t-t$ к оси X , определится известным образом

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \left(\frac{\partial y}{\partial \sigma} \right) / \left(\frac{\partial x}{\partial \sigma} \right) \quad (2)$$

Угол α_2 между осью X и нормалью $n-n$, проходящей через точку B , составит

$$\alpha_2 = \pi + \alpha_1 - \alpha .$$

Запишем уравнение нормали в общем виде, как уравнение прямой, проходящей через точку B с координатами x, y ,

$$Y - y = K(X - x), \quad (3)$$

где X, Y - координаты произвольной точки нормали, $K = \operatorname{tg} \alpha_2$ - угловой коэффициент нормали.

Уравнение(3) можно рассматривать и как уравнение семейства нормалей, проходящих через точки центроиды с координатами $x = x(v), y = y(v)$. Запишем уравнение семейства с параметром v в общем виде

$$F(X, Y, v) = 0. \quad (4)$$

Здесь фиксированное значение параметра v выделяет из семейства конкретную нормаль, а уравнения (1) определяют отдельную точку на этой нормали.

Для описания огибающей данного семейства прямых, как известно из дифференциальной геометрии, к уравнению (4) нужно добавить еще одно уравнение

$$\frac{\partial}{\partial v} F(X, Y, v) = 0 . \quad (5)$$

В системе уравнений (4) и (5) величины X и Y представляют уже координаты точек касания нормалей с эволютой профильной кривой. Поэтому далее будем их обозначать x_3, y_3 , как координаты точек эволюты.

Пример применения

Используя общие уравнения эволюты (4),(5), получим уравнения эволюты в каноническом виде для эллиптической центроиды. Координаты точек эллипса, как известно, можно выразить в параметрическом виде

$$x = b \cos \psi, \quad y = a \sin \psi,$$

где a, b - большая и малая полуоси эллипса, ψ - параметр, определяющий отдельную точку эллипса.

По выражению (2) находим угол наклона касательных к эллиптической центроиде

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \left(\frac{\partial y}{\partial \sigma} \right) / \left(\frac{\partial x}{\partial \sigma} \right) = -(a/b) \operatorname{ctg} \psi$$

и угловой коэффициент профильных нормалей

$$K = \operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg} [\operatorname{arctg}(-a/b \operatorname{ctg} \psi) - \alpha].$$

Функция (4) здесь имеет вид $F(X, Y, \psi) = 0$, или в развернутом виде

$$F = Y - a \sin \psi - \operatorname{tg} [(\operatorname{arctg}(-a/b \operatorname{ctg} \psi) + \alpha)](X - b \cos \psi) \quad (6)$$

Найдем производную (5) от функции (6) с заменой $X = x_3, Y = y_3$. Получим

$$-a \cos \psi - \left\{ 1 + \operatorname{tg}^2 \left[\operatorname{arctg} \left(-\frac{a}{b} \operatorname{ctg} \psi \right) + \alpha \right] \right\} \frac{1}{1 + \frac{a^2}{b^2} \operatorname{ctg}^2 \psi} \frac{a}{b} (1 + \operatorname{ctg}^2 \psi) (x_3 -$$

$$-b \cos \psi) - \operatorname{tg} \left[\operatorname{arctg} \left(-\frac{a}{b} \operatorname{ctg} \psi \right) + \alpha \right] + b \sin \psi = 0.$$

После преобразований найдем

$$x_3 = x + y \frac{(tg\alpha_2 - tg\alpha_1)(1 + tg^2\alpha_1)}{(1 + tg^2\alpha_2)(\frac{a^2}{b^2} + tg^2\alpha_1)}. \quad (7)$$

Подставив (7) в (3), получим вторую координату точек эволюты

$$y_3 = y + K(x_3 - x). \quad (8)$$

Выражения (7), (8) определяют эволюту левых профилей зубьев эллиптического колеса. Подобным образом получены формулы для определения эволюты правых профилей

$$x_3 = x - y \frac{(tg\alpha_1 - tg\alpha_2)(1 + tg^2\alpha_1)}{(1 + tg^2\alpha_2)(\frac{a^2}{b^2} + tg^2\alpha_1)}. \quad (9)$$

$$y_3 = y - K(x_3 - x). \quad (10)$$

Как видим, выражения (9),(10) отличаются от (7),(8) лишь знаками.

Итак, рассматривая эволюту как огибающую нормалей к профилю зуба, достаточно просто получить уравнение эволюты некруглого зубчатого колеса в параметрическом виде, как это найдено здесь для профильных кривых эллиптического колеса.

Обсуждение полученных результатов

Как показали компьютерные исследования эволют, с увеличением эксцентриситета эллиптического колеса эволюты левых и правых профилей все более уклоняются друг от друга, но обе приближаются к центроиде в области большой полуоси эллипса, увеличивая опасность подрезания ножек зубьев. На рис.3 приведены: центроида 1 и эволюты левых 2 и правых 3 профилей эллиптического колеса с эксцентриситетом $e=0,8$ и числом зубьев $z=47$.

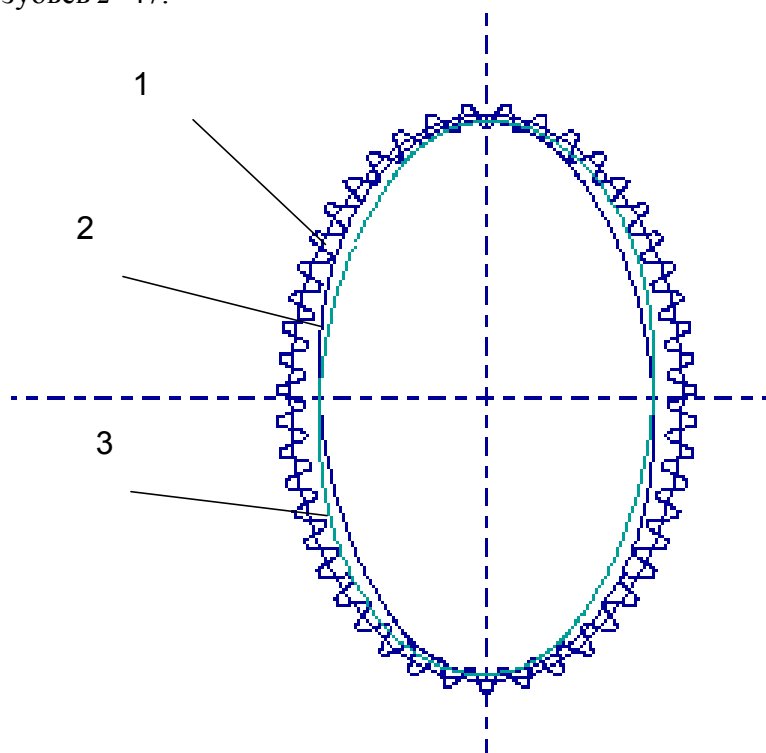


Рис. 3. Пример расчёта центроиды и эволют

Сравнение эволют по приведенным выше формулам с эволютами, построенными по формулам Ф.Л.Литвина, показали их полную идентичность. Более того, преобразованием выражений (7-10) можно перейти непосредственно к формулам Ф.Л.Литвина.

Для наглядного доказательства правильности полученных формул с помощью компьютера построены также касательные к центроиде ($t-t$) и нормали ($n-n$) в произвольных точках центроиды. На изображении (рис.4) видно, что нормали действительно являются касательными к эволюте, а эволюта – их огибающей.

Полученные здесь уравнения эволют совместно с разработанной методикой определения профилей [3] позволяют эффективно выполнить проектирование эллиптической зубчатой передачи.

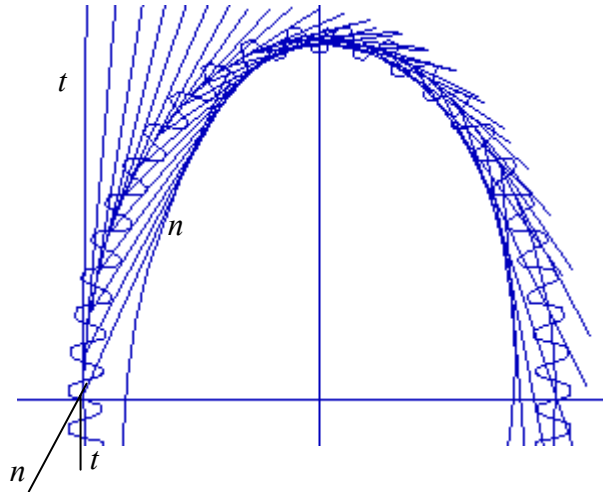


Рис. 4. Пример расчёта центроиды и эволют

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Позняк Э.Г., Шикин Е.В. Дифференциальная геометрия. - М.: МГУ. 1990.- 382с.
2. Литвин Ф.Л. Некруглые зубчатые колеса. Машгиз, М-Л, 1956 г.-312 с.
3. Киреев С.О. Падалко Н.А. Падалко А.П. Аналитическое определение профилей зубьев эллиптического колеса. Изв. Вузов Сев. – Кавк. регион. Техн. Науки 2000. №3, с.31-34.

Поступила в редакцию 16.12. 2003
После доработки 23.01.2004