

ДИНАМИКА МАШИННОГО АГРЕГАТА С УПРУГИМ ВАЛОМ И ЛИНЕЙНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ ИСПОЛНИТЕЛЬНОГО МЕХАНИЗМА

1. Введение

В разных отраслях индустрии широко распространены машинные агрегаты с фрикционной муфтой и зубчатой передачей (редуктором) между двигателем и исполнительным механизмом. Создание надежных зубчатых передач в составе машинных агрегатов требует определения действующих на них динамических нагрузок с высокой степенью точности. В литературе по динамике машин и, в частности, машинных агрегатов со сцепными муфтами [1,2,3,4,5,8,9,10,11], переходные процессы (разбег и торможение) мало исследованы. Механические системы (модели) рассмотрены отдельно от привода и характера рабочей нагрузки. Кроме того, существующие исследования представлены без определения нагрузок в зубчатых передачах, включенных в состав машинных агрегатов со сцепными муфтами. Значение этих нагрузок важно, так как они являются максимальными нагрузками, действующими в зубчатых передачах.

2. Цель исследования

Целью настоящего исследования является изучение режимов разбега и соответствующих динамических нагрузок в машинных агрегатах со сцепными фрикционными муфтами, зубчатой передачей (редуктором), упругим валом и исполнительным механизмом с учетом их механических характеристик.

3. Динамическая модель

Динамическая модель машины (рис.1) состоит из асинхронного электродвигателя (М) с короткозамкнутым ротором и постоянным моментом инерции

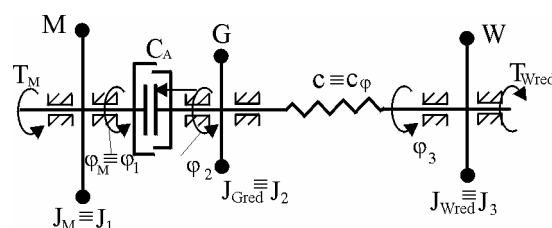


Рис.1. Модель агрегата

$J_M = \text{const}$; исполнительного механизма (W) ротационного типа с постоянным моментом инерции $J_W = \text{const}$ и линейной механической характеристикой $T_W = c'_1 + c_1 \omega_W$, где T_W - момент сил сопротивления (технологический) исполнительного механизма; c'_1, c_1 - постоянные величины, ω_W - угловая скорость ротора исполнительного механизма; зубчатой передачи (G), работающей как редуктор и имеющей постоянный (приведенный к валу электродвигателя) момент инерции J_G и постоянное передаточное отношение $i = \text{const}$; сцепной муфты (C_A) между двигателем и зубчатой передачей с постоянным моментом трения $T_{Fr, \max} = T = \text{const}$ при буксовании в зацепленном

положении; постоянной муфтой (C_B) между зубчатой передачей (G) и исполнительным механизмом (W) (она постоянно включена и поэтому не изображена на рис.1).

Приводя момент инерции исполнительного механизма и момент сил сопротивления к валу электродвигателя, получаем

$$J_{W np} = \frac{J_W}{i^2} ,$$

$$T_{W np} = \frac{T_W}{i} = \frac{c'_1 + c_1 \omega_W}{i} = \frac{c'_1}{i} + \frac{c_1}{i^2} \omega_M = c'_{1np} + c_{1np} \omega_M .$$
(1)

В дальнейшем будем считать, что

- зазоры в кинематической цепи отсутствуют;
- вал, связывающий электродвигатель и муфту, абсолютно жесткий;
- вал, связывающий редуктор с исполнительным механизмом имеет линейную упругую характеристику с жесткостью на кручение $c_\varphi = c$.

Предполагается, что электродвигатель (M) раскрутился предварительно до своей синхронной угловой скорости $\omega_{M syn}$, после чего происходит мгновенное включение фрикционной муфты C_A и увеличение созданного момента трения T_{Fr} от нуля до его максимального значения $T_{Fr, max} = const$. Это самый тяжелый режим разбега машины, другие режимы более благоприятны. На основе этого предположения считается, что асинхронный электродвигатель работает на наклонном участке механической характеристики (рис. 2), аппроксимируемом линейной зависимостью движущего момента от угловой скорости

$$T_M = a - b\omega_M ,$$
(2)

где для постоянных a и b имеем

$$a = \frac{\omega_{M syn}}{\Delta\omega_M} T_{M nom} , \quad b = \frac{T_{M nom}}{\Delta\omega_M} = \frac{a}{\omega_{M syn}} .$$

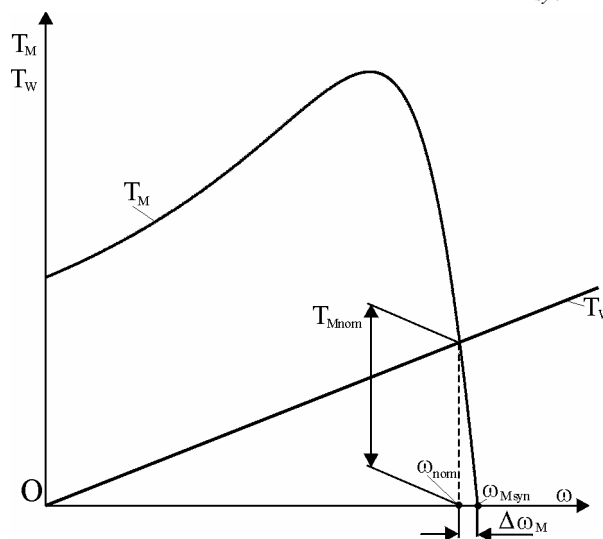


Рис.2. Механические характеристики

Рассмотрим решение поставленной задачи на основе созданной модели машинного агрегата, движение которого происходит в два этапа:

- 1) этап пробуксовки муфты, во время которой угловые скорости валов сцепной муфты стремятся к выравниванию;
- 2) этап совместного раскручивания, при котором оба вала ускоряются совместно до установления рабочей (стационарной) угловой скорости агрегата.

4. Дифференциальные уравнения движения машины

Движение частей агрегата на этапе пробуксовки описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 &= a - b\dot{\varphi}_1 - T, \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 &= T - c(\varphi_2 - \varphi_3), \\ J_3 \ddot{\varphi}_3 &= c(\varphi_2 - \varphi_3) - T_{Wnp}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $a - b\dot{\varphi}_1 = T_M$ - момент вращения двигателя, а $T_{Wnp} = c'_{1np} + c_{1np}\dot{\varphi}_3$ - приведенный рабочий момент сопротивления. Для упрощения записи дифференциальных уравнений (3) введены обозначения: $\varphi_1 = \varphi_M$, φ_2 , φ_3 - углов поворота соответственно ротора электродвигателя и приведенных к его оси углов поворота валов зубчатой передачи и исполнительного механизма, и $J_1 = J_M$, $J_2 = J_{Gnp}$ и $J_3 = J_{Wnp}$, соответствующих им моментов инерции. Для максимального момента трения, созданного между трущимися дисками муфты имеем:

$$T = T_{Fr\max} = \frac{2}{3} \mu Q \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2}. \quad (4)$$

В формуле (4): r_2 и r_1 - внешний и внутренний радиус кольцеобразной контактной поверхности муфты; μ - коэффициент трения; Q - максимальная прижимающая сила между дисками, которая мгновенно принимает значение, удовлетворяющее требованию $T = T_{Fr\max} \geq T_{Wnp}$.

Второе и третье дифференциальные уравнения в (3) с учетом (1) записываем в виде

$$\begin{aligned} J_2 \ddot{\varphi}_2 &= T - c(\varphi_2 - \varphi_3), \\ J_3 \ddot{\varphi}_3 &= c(\varphi_2 - \varphi_3) - c'_{1np}\dot{\varphi}_3 - c'_{1np}. \end{aligned} \quad (5)$$

При введении новой переменной ψ_2 :

$$\psi_2 = \varphi_2 - \frac{T}{c} \quad (6)$$

система (5) записывается в виде

$$\begin{aligned} J_2 \ddot{\psi}_2 + c\psi_2 - c\varphi_3 &= 0, \\ J_3 \ddot{\varphi}_3 + c'_{1np}\dot{\varphi}_3 + c\varphi_3 - c\psi_2 &= T - c'_{1np}, \end{aligned} \quad (7)$$

учитывая, что $\dot{\psi}_2 = \dot{\varphi}_2$, $\ddot{\psi}_2 = \ddot{\varphi}_2$.

Этап раскручивания начинается с выравниванием угловых скоростей валов агрегата (ω_s) и продолжается до момента установления рабочей скорости ω_{st} . Роторы электродвигателя и зубчатая передача движутся как единое целое с моментом инерции $J_2^* = J_1 + J_2$, с углом поворота $\varphi_2 = \varphi_1$ и с угловой скоростью $\omega_2 = \omega_1$. Агрегат движется как двумассовый, а его оба ротора связаны упругим валом с жесткостью c .

Движение на этапе совместного раскручивания описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} (J_1 + J_2)\ddot{\varphi}_2 &= a - b\dot{\varphi}_2 - c(\varphi_2 - \varphi_3), \\ J_3\ddot{\varphi}_3 &= c(\varphi_2 - \varphi_3) - c_{1np}\varphi_3 - c'_{1np}, \end{aligned}$$

откуда получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} (J_1 + J_2)\ddot{\varphi}_2 + b\dot{\varphi}_2 + c\varphi_2 - c\varphi_3 &= a, \\ J_3\ddot{\varphi}_3 + c_{1np}\varphi_3 + c\varphi_3 - c\varphi_2 &= c'_{1np}. \end{aligned} \quad (8)$$

5. Определение закона движения машины

Анализ систем дифференциальных уравнений (7) и (8) показывает, что определение закона движения машины, требует знания решения системы дифференциальных уравнений, общий вид которых :

$$\begin{aligned} c_{11}\ddot{\theta} + c_{12}\dot{\theta} + c_{13}\theta + c_{14}\varphi &= B_1, \\ c_{21}\ddot{\varphi} + c_{22}\dot{\varphi} + c_{23}\varphi + c_{24}\theta &= B_2, \end{aligned} \quad (9)$$

где для (7):

$$\begin{aligned} \theta = \varphi_3, \varphi = \varphi_2, c_{11} = J_3, c_{12} = c_{1np}, c_{13} = c, c_{14} = -c, B_1 = T - c'_{1np}, \\ c_{21} = J_2, c_{22} = 0, c_{23} = c, c_{24} = -c, B_2 = 0, \end{aligned}$$

а для (8):

$$\begin{aligned} \theta = \varphi_2, \varphi = \varphi_3, c_{11} = J_1 + J_2, c_{12} = b, c_{13} = c, c_{14} = -c, B_1 = a, \\ c_{21} = J_3, c_{22} = c_{1np}, c_{23} = c, c_{24} = -c, B_2 = c'_{1np}. \end{aligned}$$

Система дифференциальных уравнений (9) неоднородная и ее решение получается как сумма общего решения соответствующей однородной системы и частного интеграла неоднородной системы

$$\theta = \theta_h + \eta_\theta, \quad \varphi = \varphi_h + \eta_\varphi. \quad (10)$$

Решение однородной системы ищем в виде

$$\theta_h = A_\theta e^{\rho t}, \quad \varphi_h = A_\varphi e^{\rho t}. \quad (11)$$

Подставляя соотношения (11) в однородную систему, получаем следующую алгебраическую систему для определения постоянных A_θ и A_φ

$$\begin{aligned} (c_{11}\rho^2 + c_{12}\rho + c_{13})A_\theta + c_{14}A_\varphi &= 0, \\ c_{24}A_\theta + (c_{21}\rho^2 + c_{22}\rho + c_{23})A_\varphi &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Для того чтобы система (12) имела нетривиальное решение относительно A_θ и A_φ , необходимо чтобы ρ удовлетворяло характеристическому уравнению:

$$\begin{vmatrix} c_{11}\rho^2 + c_{12}\rho + c_{13} & c_{14} \\ c_{24} & c_{21}\rho^2 + c_{22}\rho + c_{23} \end{vmatrix} = 0$$

или

$$a'_0\rho^4 + a'_1\rho^3 + a'_2\rho^2 + a'_3\rho + a'_4 = 0, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} a'_0 &= c_{11}c_{21}, & a'_1 &= c_{11}c_{22} + c_{12}c_{21}, & a'_2 &= c_{11}c_{23} + c_{13}c_{21}, \\ a'_3 &= c_{12}c_{23} + c_{13}c_{22}, & a'_4 &= c_{13}c_{23} - c_{14}c_{24}. \end{aligned}$$

Так как для исследуемой системы $c_{13} = c_{23} = -c_{14} = -c_{24}$, то и $a'_4 = 0$ и уравнение (13) принимает вид

$$\rho[a'_0\rho^3 + a'_1\rho^2 + a'_2\rho + a'_3] = 0, \quad (14)$$

откуда находим четыре корня ρ_k ($k=1,2,3,4$), которые являются собственными значениями системы. Подставляя их последовательно в систему уравнений (12), определяем четыре пары значений коэффициентов A_θ и A_φ , т.е. $A_\theta^{(k)}, A_\varphi^{(k)}$ ($k=1,2,3,4$), соответствующие каждому корню ρ_k . Из (14) находим один нулевой корень

$$\rho_1 = 0, \quad (15)$$

а остальные являются тремя корнями кубического уравнения

$$a'_0\rho^3 + a'_1\rho^2 + a'_2\rho + a'_3 = 0, \quad \rho^3 + a_1\rho^2 + a_2\rho + a_3 = 0, \quad (16)$$

где

$$a_1 = \frac{a'_1}{a'_0} = \frac{c_{11}c_{12} + c_{12}c_{21}}{c_{11}c_{21}}, \quad a_2 = \frac{a'_2}{a'_0} = \frac{c_{11}c_{23} + c_{13}c_{21}}{c_{11}c_{21}}, \quad a_3 = \frac{a'_3}{a'_0} = \frac{c_{12}c_{23} + c_{13}c_{22}}{c_{11}c_{21}}.$$

Уравнение (16) посредством подстановки

$$\rho = x - \frac{a}{3} \quad (17)$$

приводится к каноническому виду

$$x^3 + p x + q = 0, \quad (18)$$

где $p = -\frac{a^2}{3} + b, q = 2\left(\frac{a}{3}\right) - \frac{ab}{3} + c$.

Покажем, что корни кубического уравнения (16) имеют отрицательные вещественные части. Все коэффициенты вещественны, положительны:

$$a'_0 > 0, \quad a'_1 > 0, \quad a'_2 > 0, \quad a'_3 > 0,$$

и определяются выражениями

$$\begin{aligned} a'_0 &= J_2 J_3 > 0, & a'_1 &= c_{1np} J_2 > 0, \\ a'_2 &= c(J_2 + J_3) > 0, & a'_3 &= c \cdot c_{1np} > 0 \text{ и} \\ a'_0 &= J_3(J_1 + J_2) > 0, & a'_1 &= c_{1np}(J_1 + J_2) + b J_3 > 0, \\ a'_2 &= c(J_1 + J_2 + J_3) > 0, & a'_3 &= c(b + c_{1np}) > 0. \end{aligned}$$

Определители Гурвица

$$\Delta_1 = a'_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a'_1 & a'_3 \\ a'_0 & a'_2 \end{vmatrix} > 0$$

для двух этапов соответственно имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= c_{1np} J_2 > 0, & \Delta_2 &= c c_{1np} J_2^2 > 0, \\ \Delta_1 &= c_{1np}(J_1 + J_2) + b J_3 > 0, & \Delta_2 &= c [c_{1np}(J_1 + J_2)^2 + b J_3^2] > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, согласно критерию Рауса-Гурвица все корни имеют отрицательную вещественную часть. Движение будет устойчивым и при этом асимптотически.

Введем величины

$$A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}}, \quad B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}, \quad (19)$$

где

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}.$$

Два корня, определенных с помощью (19) будут комплексными, а один вещественным при $\Delta > 0$. Неравенство будет заведомо выполнено, если

$$p > 0, \quad p > -3 \sqrt[3]{\frac{q^2}{4}}, \quad (20)$$

откуда для двух этапов получаем

$$c_{1np} \leq \left[\frac{3c}{J_2} (J_2 + J_3) J_3 \right]^{1/2},$$

$$c_{1np} \leq -\frac{bJ_3}{J_1 + J_2} + \frac{1}{J_1 + J_2} [3cJ_3(J_1 + J_2 + J_3)(J_1 + J_2)]^{1/2}.$$

Если A и B вещественны, то три корня уравнения (18) находятся по формулам Кардано [6]:

$$x_2 = A + B, \quad x_3 = -\frac{A+B}{2} + i \frac{A-B}{2} \sqrt{3},$$

$$x_4 = -\frac{A+B}{2} - i \frac{A-B}{2} \sqrt{3}, \quad i = \sqrt{-1}. \quad (21)$$

Корни характеристического уравнения (13) находим при помощи (15), (17) и (21):

$$\rho_1 = 0, \quad \rho_2 = x_2 - \frac{c_{11}c_{22} + c_{12}c_{21}}{3c_{11}c_{21}} = -\lambda < 0,$$

$$\rho_3 = x_3 - \frac{c_{11}c_{22} + c_{12}c_{21}}{3c_{11}c_{21}} = -n + i\omega, \quad \rho_4 = x_4 - \frac{c_{11}c_{22} + c_{12}c_{21}}{3c_{11}c_{21}} = -n - i\omega, \quad (22)$$

где

$$\lambda = \frac{c_{11}c_{22} + c_{12}c_{21}}{3c_{11}c_{21}} - (A + B), \quad n = \frac{A + B}{2} + \frac{c_{11}c_{22} + c_{12}c_{21}}{3c_{11}c_{21}}, \quad \omega = \frac{A - B}{2} \sqrt{3}.$$

Общее решение однородной системы дифференциальных уравнений, полученных из (9):

$$\theta_h = A_\theta^{(1)} + A_\theta^{(2)} e^{-\lambda t} + A_\theta^{(3)} e^{\rho_3 t} + A_\theta^{(4)} e^{\rho_4 t},$$

$$\varphi_h = A_\varphi^{(1)} + A_\varphi^{(2)} e^{-\lambda t} + A_\varphi^{(3)} e^{\rho_3 t} + A_\varphi^{(4)} e^{\rho_4 t}, \quad (23)$$

где для определения постоянных $A_\theta^{(j)}$ и $A_\varphi^{(j)}$ ($j=1,2,3,4$), после последовательной подстановки ρ_j ($j=1, \dots, 4$) получаем алгебраические системы уравнений

$$\begin{aligned} [c_{11}\rho_j^2 + c_{12}\rho_j + c_{13}]A_\theta^{(j)} + c_{14}A_\varphi^{(j)} &= 0, \\ + c_{24}A_\theta^{(j)} + [c_{21}\rho_j^2 + c_{22}\rho_j + c_{23}]A_\varphi^{(j)} &= 0, \end{aligned} \quad (24)$$

$$(j = 1, 2, 3, 4).$$

Подставляя $\rho_1 = 0$ в (24), находим $A_\theta^{(1)} = A_\phi^{(1)}$. Для остальных трех пар постоянных можно записать отношения

$$\frac{A_\theta^{(j)}}{A_\phi^{(j)}} = -\frac{c_{14}}{c_{11}\rho_j^2 + c_{12}\rho_j + c_{13}} = -\frac{c_{21}\rho_j^2 + c_{22}\rho_j + c_{23}}{c_{24}} = \beta_j, (j = 2, 3, 4). \quad (25)$$

После замены ρ_3 и ρ_4 выражениями из (22), для отношений β_3, β_4 находим

$$\beta_{3,4} = -\frac{c_{21}(n^2 - \omega^2) - c_{22}n + c_{23} + \omega i(\pm c_{22} \mp 2c_{21}n)}{c_{24}}. \quad (26)$$

При помощи отношений (25) и формулы Эйлера $e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm i \sin \omega t$, общее решение (23) записываем в виде

$$\begin{aligned} \theta_h &= C_1 + \beta_2 C_2 e^{-\lambda t} + e^{-nt} \left[(\gamma_3 C_3 - \gamma_4 C_4) \cos \omega t + \right. \\ &\quad \left. + (\gamma_4 C_3 + \gamma_3 C_4) \sin \omega t \right], \\ \varphi_h &= C_1 + C_2 e^{-\lambda t} + e^{-nt} (C_3 \cos \omega t + C_4 \sin \omega t), \end{aligned} \quad (27)$$

где $A_\theta^{(1)} = A_\phi^{(1)} = C_1$, $A_\phi^{(2)} = C_2$, $C_3 = A_\theta^{(3)} + A_\phi^{(3)}$, $C_4 = i(A_\theta^{(3)} - A_\phi^{(3)})$, а для γ_3 и γ_4 находим значения

$$\gamma_3 = \frac{-c_{21}(n^2 - \omega^2) + nc_{22} - c_{23}}{c_{24}}, \quad \gamma_4 = \frac{\omega(c_{22} - 2nc_{21})}{c_{24}}, \quad \gamma_3 = \operatorname{Re} \beta_3, \quad \gamma_4 = \operatorname{Im} \beta_3.$$

Частные решения η_θ и η_ϕ системы (9) находим в виде:

$$\begin{aligned} \eta_\theta &= \beta_2 \left[\frac{\alpha_1 \gamma_4 - \alpha_2 (\gamma_3 - 1)}{\lambda \alpha_3 (\beta_2 - 1)} \right] + \frac{[\gamma_3 (\alpha_1 \omega + \alpha_2 n) - \gamma_4 (\alpha_1 n - \alpha_2 \omega)]}{\alpha_3 (n^2 + \omega^2)} + \\ &\quad + \left[\frac{\alpha_2 (\gamma_3 - \beta_2) - \alpha_1 \gamma_4}{\alpha_3 (\beta_2 - 1)} \right] t, \\ \eta_\phi &= \frac{\alpha_1 \gamma_4 - \alpha_2 (\gamma_3 - 1)}{\lambda \alpha_3 (\beta_2 - 1)} + \frac{\alpha_1 \omega + \alpha_2 n}{\alpha_3 (n^2 + \omega^2)} + \left[\frac{\alpha_2 (\gamma_3 - \beta_2) - \alpha_1 \gamma_4}{\alpha_3 (\beta_2 - 1)} \right] t, \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{B_1}{c_{11}} b_2 - \frac{B_2}{c_{21}} b_1, \quad \alpha_2 = \frac{B_1}{c_{11}} a_2 - \frac{B_2}{c_{21}} a_1, \\ \alpha_3 &= b_1 a_2 - a_1 b_2, \quad a_1 = \frac{\lambda \beta_2}{(\beta_2 - 1)} \gamma_4 - n \gamma_4 - \omega \gamma_3, \end{aligned}$$

$$a_2 = \frac{\lambda}{(\beta_2 - 1)} \gamma_4 - \omega, \quad b_1 = \frac{\lambda \beta_2}{(\beta_2 - 1)} (\gamma_3 - 1) + \omega \gamma_4 - n \gamma_3, \\ b_2 = \frac{\beta_2}{(\beta_2 - 1)} (\gamma_3 - 1) - n.$$

Если приведенный момент сопротивления имеет вид $T_{Wnp} = c_{1np} \omega_M$ ($c'_{1np} = 0$) и $c_{13} = c_{23} = -c_{14} = -c_{24}$, $c_{22} = 0$, то частные интегралы (28) в этапе пробуксовки принимают окончательный вид

$$\eta_{\psi_2} = \eta_{\varphi_3} = \frac{T}{c_{1np}} t. \quad (29)$$

Таким образом, на основе (27), (29), (10) и с учетом (6), получим законы движения угловой скорости ротора электродвигателя и приведенных к его оси углов поворота зубчатых колес и исполнительного механизма на этапе пробуксовки

$$\varphi_1 = \frac{a_0}{b} t + \frac{T J_1}{b^2} \left(1 - e^{-\frac{b}{J_1} t} \right), \\ \varphi_2 = \frac{T}{c} + \frac{T}{c_{1red}} t + C_1 + C_2 e^{-\lambda t} + e^{-nt} (C_3 \cos \omega t + C_4 \sin \omega t), \quad (30)$$

$$\varphi_3 = \frac{T}{c_{1np}} t + C_1 + \beta_2 C_2 e^{-\lambda t} + \\ + e^{-nt} [(\gamma_3 C_3 - \gamma_4 C_4) \cos \omega t + (\gamma_4 C_3 + \gamma_3 C_4) \sin \omega t], \\ \omega_1 = \dot{\varphi}_1 = \frac{a_0}{b} + \frac{T}{b} e^{-\frac{b}{J_1} t}, \\ \omega_2 = \dot{\varphi}_2 = \frac{T}{c_{1np}} - \lambda C_2 e^{-\lambda t} - n e^{-nt} (C_3 \cos \omega t + C_4 \sin \omega t) + \\ + \omega e^{-nt} (-C_3 \sin \omega t + C_4 \cos \omega t), \quad (31)$$

$$\omega_3 = \dot{\varphi}_3 = \frac{T}{c_{1np}} - \lambda \beta_2 C_2 e^{-\lambda t} - \\ - n e^{-nt} [(\gamma_3 C_3 - \gamma_4 C_4) \cos \omega t + (\gamma_4 C_3 + \gamma_3 C_4) \sin \omega t] + \\ + \omega e^{-nt} [-(\gamma_3 C_3 - \gamma_4 C_4) \sin \omega t + (\gamma_4 C_3 + \gamma_3 C_4) \cos \omega t],$$

где в первом уравнении (30) учтены начальные условия движения:

$$t = 0, \varphi_{1,0} = 0, \dot{\varphi}_{1,0} = \frac{a}{b}, \varphi_{2,0} = 0, \dot{\varphi}_{2,0} = 0, \varphi_{3,0} = 0, \dot{\varphi}_{3,0} = 0.$$

Постоянные интегрирования C_j ($j=1, \dots, n$) можно определить методом, показанным в [7].

Продолжительность фазы пробуксовки длится до момента выравнивания угловых скоростей двигателя и зубчатой передачи, т.е. $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2$. Приравняв

правых частей первых двух уравнений в (33) получаем трансцендентное уравнение. Для определения его корня t_s (длительность этапа пробуксовки) можно использовать какой-либо численный метод, например метод хорд, метод Ньютона.

На этапе совместного раскручивания при приведенном моменте сопротивления $T_{Wnp} = c_{np}\omega_M (c'_{1np} = 0)$ с учетом $c_{13} = c_{23} = -c_{14} = -c_{24}$, $c_{22} \neq 0$, получаем частные решения η_θ и η_φ :

$$\eta_{\varphi_2} = \frac{c_{1np}}{c} \frac{a}{b + c_{1np}} + \frac{a}{b + c_{1np}} t, \quad \eta_{\varphi_3} = \frac{a}{b + c_{1np}} t. \quad (32)$$

Закон движения агрегата на этапе совместного раскручивания получаем из соотношений (27) и (34) с учетом (10)

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \frac{c_{1np}}{c} \frac{a}{b + c_{1np}} + \frac{a}{b + c_{1np}} t + C_1 + \beta_2 C_2 e^{-\lambda t} + \\ &+ e^{-nt} [(\gamma_3 C_3 - \gamma_4 C_4) \cos \omega t + (\gamma_4 C_3 + \gamma_3 C_4) \sin \omega t], \\ \varphi_3 &= \frac{a}{b + c_{1np}} t + C_1 + C_2 e^{-\lambda t} + e^{-nt} (C_3 \cos \omega t + C_4 \sin \omega t). \end{aligned} \quad (33)$$

Из соотношений (35) после дифференцирования по времени t находим

$$\begin{aligned} \omega_2 = \dot{\varphi}_2 &= \frac{a}{b + c_{1np}} - \lambda \beta_2 C_2 e^{-\lambda t} - \\ &- n e^{-nt} [(\gamma_3 C_3 - \gamma_4 C_4) \cos \omega t + (\gamma_4 C_3 + \gamma_3 C_4) \sin \omega t] + \\ &+ \omega e^{-nt} [-(\gamma_3 C_3 - \gamma_4 C_4) \sin \omega t + (\gamma_4 C_3 + \gamma_3 C_4) \cos \omega t] \\ \omega_3 = \dot{\varphi}_3 &= \frac{a}{b + c_{1np}} - \lambda C_2 e^{-\lambda t} - n e^{-nt} (C_3 \cos \omega t + C_4 \sin \omega t) + \\ &+ \omega e^{-nt} (-C_3 \sin \omega t + C_4 \cos \omega t). \end{aligned}$$

Постоянные интегрирования $C_j (j=1, \dots, n)$ в формулах (35) определяются методом, показанным в [7], при следующих начальных условиях

$$t = 0, \quad \varphi_{2,0} = \varphi_2(t_s), \quad \dot{\varphi}_{2,0} = \dot{\varphi}_2(t_s), \quad \varphi_{3,0} = \varphi_3(t_s), \quad \dot{\varphi}_{3,0} = \dot{\varphi}_3(t_s),$$

которые находятся из формул (32) и (33) для момента t_s .

6. Динамические нагрузки

Крутящий момент на упругом валу T_t на этапе пробуксовки определяется выражением

$$T_t = c(\varphi_2 - \varphi_3),$$

где φ_2 и φ_3 представлены выражением (32). Из этого выражения находим

$$T_t = T + c C_2 (1 - \beta_2) e^{-\lambda t} + c e^{-nt} \{ [(1 - \gamma_3) C_3 + \gamma_4 C_4] \cos \omega t + [\gamma_4 C_3 + (1 - \gamma_3) C_4] \sin \omega t \}.$$

Видно, что когда $t \rightarrow t_s$ крутящий момент T_t стремится к максимальному моменту трения муфты $(C_A) - T$. Крутящий момент T_t^* , действующий на упругий вал, на этапе совместного раскручивания, определяется выражением

$$T_t^* = c(\varphi_2 - \varphi_3).$$

С учетом (33) находим

$$T_t = c_{1np} \frac{a}{b + c_{1np}} + c C_2 e^{-\lambda t} (1 - \beta_2) + c e^{-nt} \{ [(1 - \gamma_3) C_3 + \gamma_4 C_4] \cos \omega t + [\gamma_4 C_3 + (1 - \gamma_3) C_4] \sin \omega t \}.$$

Из полученной формулы видно, что когда $t \rightarrow \infty$ крутящий момент T_t^* стремится к предельному значению

$$T_{t,st}^* = \lim_{t \rightarrow \infty} T_t^* = c_{1np} \frac{a}{b + c_{1np}} = c_{1np} \omega_{3,st} = T_{W np},$$

которое определяет стационарную нагрузку трансмиссионного вала.

7. Пример

Полученные результаты проиллюстрированы численным примером на основе технической характеристики многофункционального прессавтомата с перенастройкой МРА-1РМ, произведенного в ТИКЕ-АД Пловдив. Для автомата: $J_M = 0,192 \text{ кгм}^2$, $J_W = 130 \text{ кгм}^2$, $T_{Fr,max} = 92 \text{ Нм}$, $i = 41,6$, $J_{Gnp} = 0,02 \text{ кгм}^2$. Для асинхронного электродвигателя с короткозамкнутым ротором АМ-132-М-6: $N_{nom} = 5,5 \text{ кВт}$, $n = 950 \text{ об/мин}$, $a = 1149,93 \text{ Нм}$ и $b = 10,98 \text{ Нмс}$. Коэффициенты момента сопротивления $c_1 = 961,7 \text{ Нмс}$, $c'_1 = 0$, а жесткость вала $c = 13178 \text{ Нм}$.

Изменение угловых скоростей $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ и нагрузки T зубчатой передачи показаны на рис.3 – 5.

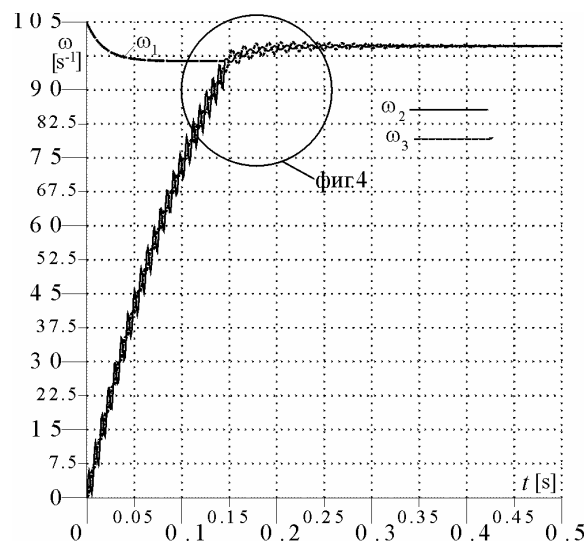


Рис.3. Изменение угловых скоростей

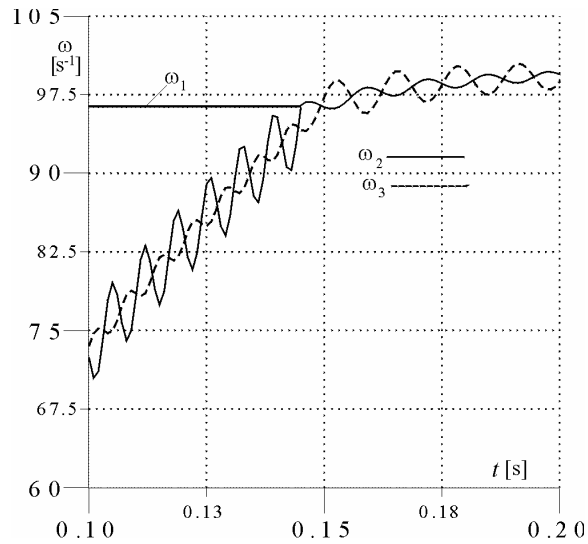


Рис.4. Изменение угловых скоростей

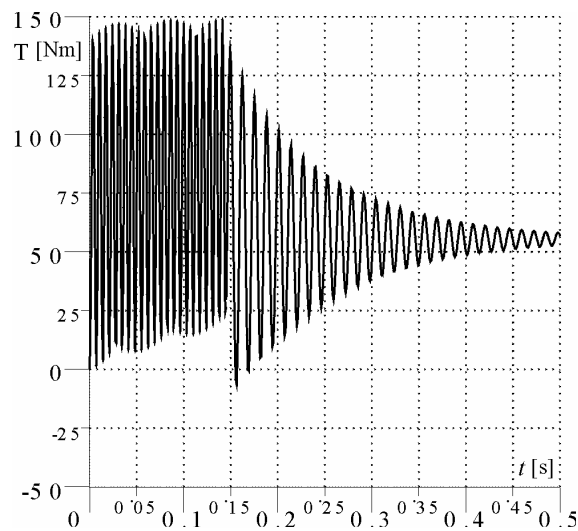


Рис.5 Изменение крутящего момента

8. Заключение

В представленном исследовании изучена динамика разбега машинного агрегата с управляемой фрикционной муфтой между двигателем и исполнительным механизмом. Асинхронный электродвигатель с короткозамкнутым ротором, раскручен до своей синхронной угловой скорости, а исполнительный механизм имеет линейную механическую характеристику и приводится в движение из состояния покоя. Определены законы движения машины на двух этапах его разбега: этапа пробуксовки (скольжение в фрикционной муфте) и этапа совместного раскручивания. Представлена методика вычислений. Найден динамический крутящий момент, действующий на трансмиссионный вал на обоих этапах. Теоретические результаты проиллюстрированы численным моделированием конкретного технического примера.

По сравнению с исполнительным механизмом с постоянным моментом сопротивления [7], время выравнивания скоростей двигателя и исполнительного механизма уменьшилось на 40%. Время затухания колебательного процесса уменьшается на 42%, а амплитуда колебаний вала исполнительного механизма машины существенно уменьшилась. Динамическая нагрузка трансмиссионного вала более

значительна в случае исполнительного механизма с постоянным моментом сопротивления, при котором время установления стационарного процесса более длительное.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ангелов Г.** Машинни елементи. ДИ "Техника", С., 1968.
2. **Арнаудов К.,И. Димитров, П. Йорданов, Л. Лефтеров.** Машинни елементи. ДИ "Техника", С., 1980.
3. **Борисов С.М.** Фрикционне муфты и тормоза строительных и дорожных машин, Машиностроение, М., 1973.
4. **Иванов Е.А.** Муфты приводов. Mashgiz, М, 1959.
5. **Комаров М.С.** Динамика механизмов и машин. Машиностроение, М., 1969.
6. **Корн Г., Т.Корн.** Справочник по математике для научных работников инженеров. Наука, Москва, 1973.
7. **Bachvarov St, V. Zlatanov, Konst. Arnaudov, P. Kolev.** Non-steady processes in machine aggregates with friction coupling and elastic shaft between the power and the working machine. IX Congress - Theoretical and Applied Mechanics, 19-22. 09.2001, Varna. Proceedings of The 9th National Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Vol.1, pp 7-19.
8. **Fronius St.** Maschinenelemente, Bd.II, Antriebselemente, VEB Verlag, В., 1971.
9. **Genova P., Karapetkov S., Kremakov J.** Dynamics Analysis of Starting Regime of the System: Asynchronous Motor-Centrifugal Coupler-Cylinder Card, Механика на машините, №5, 1994.
10. **Holzweibing Fr., Dresing H.** Lehrbuch der Maschinendynamics, VEB Fachbuchverlag, Leipzig, 1979.
11. **Peeken, H., Troeder, Chr.** Elastische Kupplungen, Springer-Verlag, В., 1986.

*Поступила в редакцию 27.10.2003
После доработки 28.12.2003*