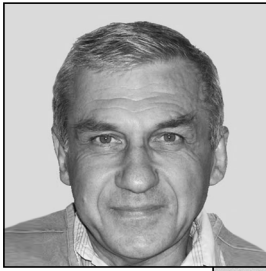


УДК 62-742
DOI 10.5862/TMM.28.1

Поступила в редакцию 16.04.2015

После доработки 24.09.2015

Принята к печати 24.11.2015



ДИНАМИКА ПРОВОДА ЛЭП С РОБОТОМ-ИНСПЕКТОРОМ ПРИ ОГРАНИЧЕННОЙ МОЩНОСТИ ДВИГАТЕЛЯ

В.В. Елисеев, М.Р. Бахрами

В.В. Елисеев – доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Машиноведение и основы конструирования» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.

М.Р. Бахрами – аспирант кафедры «Машиноведение и основы конструирования» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.

Рассматривается влияние ограниченности мощности двигателя диагностического робота-инспектора при движении по проводам ЛЭП. Разработана методика математического моделирования динамических процессов на основе лагранжевой механики твердых и упругих тел с применением компьютерной математики. Исследованы возникающие пилообразные колебания и их зависимость от характеристик двигателя робота.

Ключевые слова: диагностика проводов ЛЭП, колебания, лагранжева механика, момент и мощность двигателя, компьютерная математика.

Для проверки состояния проводов линий электропередач (ЛЭП) создаются специальные диагностические машины (роботы-инспекторы) [1]. На рис. 1 показана новая машина [2], включающая в себя моторизованные ведущие колеса, механизм подвеса с пружинами, руку с захватом и центральную коробку. Машина способна переходить через различные препятствия на проводах (амортизаторы, зажимы, предупреждающие шары). Колеса-шкивы прижаты пружинами к проводу, но могут расходить для обхода препятствий.

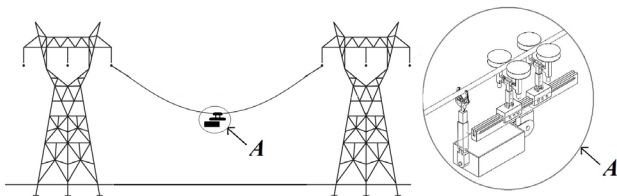


Рис. 1. Робот-инспектор на проводе ЛЭП

Натурными испытаниями, а также математическим моделированием [3, 4] установлено, что даже при медленном равномерном движении машины могут возникнуть интенсивные пилообразные колебания проводов. Возникает опасность для персонала, а инерционные нагрузки могут привести к отказам или даже разрушению. Математическое

моделирование движения машины по проводам позволяет выбрать безопасные варианты конструкции и закона движения.

В работах [3, 4] закон движения машины по проводу считался заданной (произвольной) функцией времени. Для этого мощность двигателя должна быть неограниченной. Однако отдаваемая двигателем энергия может расходоваться не только на полезное движение, но и на раскачку проводов. В случае же ограниченной мощности можно ожидать, что интенсивных колебаний не будет. Исследование этого вопроса в качественном и количественном отношении – цель данной работы. **Методом исследования** является математическое моделирование. Для машины на проводах составляются уравнения лагранжевой механики, решаемые далее средствами компьютерной математики (Mathcad).

Колебания систем при ограниченной мощности двигателя («системы с ограниченным возбуждением») рассматривались многими авторами [5–12]. Но применение традиционных методов исследования, в том числе асимптотических, было очень трудоемким. В настоящее же время ситуация с моделированием радикально улучшилась благодаря компьютерной математике.

Пилообразные колебания

Как показано в работе [3], провисающие провода линий электропередач (ЛЭП) можно рассматривать как натянутые струны. Допустим сначала, что действие диагностического робота на провод сводится к заданной силе веса, и движение происходит в вертикальной плоскости $x.y$ (рис. 2).

Постановки задачи для прогиба струны $u(x, t)$ известна [3, 13]:

$$Tu'' + G\delta(x - \xi(t)) = \rho\ddot{u};$$

$$x = 0, l: u = 0; t = 0: u = 0, \dot{u} = 0. \tag{1}$$

Обозначено: T – сила натяжения струны, $G = mg$ – вес машины, ρ – погонная масса, l – длина струны; штрих и точка означают дифференцирование по координате x и времени t (рис. 1). Дельта-функция $\delta(\dots)$ определяет сосредоточенную силу – подвижную нагрузку [14]. Закон движения нагрузки $\xi(t)$ задан, причем $\xi(0) = 0$.

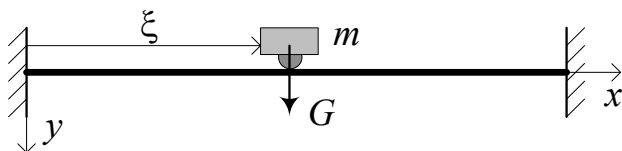


Рис. 2. Струна с подвижной нагрузкой

Это упрощенная постановка, поскольку в динамике нагрузка на струну отличается от G и колеблющаяся струна выйдет из вертикальной плоскости.

Задача (1) решается методом разложения в ряд Фурье [3, 13]:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\varphi_n(x), \varphi_n = \sqrt{2/l} \sin \lambda_n x, \lambda_n = n\pi/l;$$

$$\int_0^l \varphi_n \varphi_k dx = \delta_{kn} \Rightarrow u_n = \int_0^l u \varphi_n dx. \tag{2}$$

Для функций $u_n(t)$ получаются обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ), если умножить уравнение (1) на функцию $\varphi_n(x)$ и проинтегрировать по длине:

$$\ddot{u}_n + \omega_n^2 u_n = G\varphi_n(\xi(t))/\rho, \omega_n = \lambda_n c, c = \sqrt{T/\rho},$$

$$u_n(t) = \frac{G}{\rho\omega_n} \int_0^t \varphi_n(\xi(\tau)) \sin \omega_n(t - \tau) d\tau.$$

Здесь решение ОДУ записано в виде интеграла Дюамеля.

При постоянной скорости $\dot{\xi} = v$ после вычисления интегралов получим

$$u_n(t) = \frac{G}{\lambda_n(v^2 - c^2)} \sqrt{\frac{2}{T\rho l}} (v \sin \lambda_n ct - c \sin \lambda_n vt). \tag{3}$$

Подставив это выражение в ряд Фурье (2), найдем решение $u(x, t)$.

Основной интерес представляет прогиб под силой $u(vt, t)$. На рис. 3 представлен график этой функции при следующих значениях параметров: $T = 10$ кН, $m = 100$ кг, $\rho = 5$ кг/м, $l = 200$ м, $v = 1$ м/с. Вычисления проделаны средствами Mathcad [15]. Видим резко выраженные пилообразные колебания с прогибом порядка 5 м. Интервал времени (80 – 120 с.) соответствует проходу центральной части длиной 40 м. Число членов ряда Фурье $N = 100$.

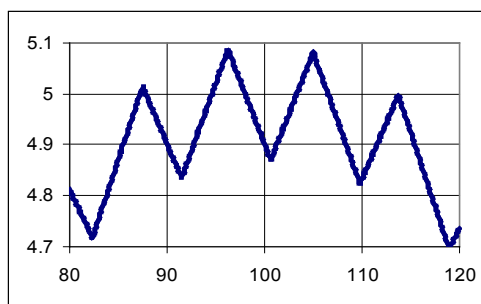


Рис. 3. Пилообразные колебания провода

В целях дальнейшего анализа рассмотрим другой подход к той же задаче о струне – вариационный метод Лагранжа-Ритца-Канторовича [16, 17], основанный на уравнениях Лагранжа 2-го рода:

$$\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i}\right) \cdot - \frac{\partial K}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i \tag{4}$$

Кинетическая энергия системы $K(\dot{q}_i, q_i, t)$ должна быть представлена как функция обобщенных координат, скоростей и (иногда) явно входящего времени; $\Pi(q_i, t)$ – потенциальная энергия. Обобщенные силы Q_i определяются из выражения виртуальной работы $\delta A = \sum Q_i \delta q_i$ тех сил, которые не связаны с потенциалом Π .

Обобщенные координаты $q_i \equiv U_i (i = 1, \dots, n)$ вводятся аппроксимацией прогиба

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^n U_i(t)\varphi_i(x) = U(t)^T \varphi(x) \tag{5}$$

(в матричных обозначениях). Тогда для кинетической и потенциальной энергий получим

$$K = \frac{1}{2} \int_0^l \rho \dot{u}^2 dx = \frac{1}{2} \dot{U}^T M \dot{U}, M = \int_0^l \rho \varphi \varphi^T dx;$$

$$\Pi = \frac{T}{2} \int_0^l u'^2 dx = \frac{1}{2} U^T C U, C = T \int_0^l \rho \varphi' \varphi'^T dx. \tag{6}$$

Далее определяем обобщенные силы (по виртуальной работе) $\delta A = \delta U^T Q$ и составляем уравнения Лагранжа (4):

$$Q(t) = G\varphi(\xi(t)) = M\dot{U} + CU. \quad (7)$$

Таков итог перехода к дискретной модели – система ОДУ (линейная, с постоянными коэффициентами). Она представляется в виде

$$\begin{cases} \dot{U} = V, \\ \dot{V} = M^{-1}(-CU + Q(t)) \end{cases} \quad (8)$$

и решается средствами компьютерной математики. Здесь применяется специальный метод Radau (Mathcad) для жестких систем ОДУ [15].

Расчет того же случая, что и на рис. 3, дал полностью идентичные результаты. Использовались координатные функции из (3); число степеней свободы $n = 15$. Получили подтверждение эффективности вариационного метода (Лагранжа-Ритца-Канторовича) [16, 17], на что далее и сошлемся.

Уравнения Лагранжа для провода с роботом

Расчетная схема сохраняется в виде рис. 2. Прогиб струны $u(x, t)$ аппроксимируется выражением (5) с обобщенными координатами U_i . Но закон движения $\xi(t)$ не задан, координата ξ является дополнительной обобщенной. Декартовы координаты в плоскости и скорость робота как точечной массы следующие:

$$x = \xi(t), \quad y = u(\xi(t), t) \Rightarrow \dot{x} = \dot{\xi}, \quad \dot{y} = u' \dot{\xi} + \dot{u}.$$

Кинетическая энергия (удвоенная):

$$2K = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \rho \int_0^l \dot{u}^2 dx = m\dot{\xi}^2 + \dot{U}^T [M + \mu(\xi)] \dot{U} + 2\dot{\xi} U^T \eta(\xi) \dot{U} + \dot{\xi}^2 U^T \sigma(\xi) U.$$

Введены дополнительные матрицы инерции: $\mu = m\varphi\varphi^T$, $\sigma = m\varphi'\varphi'^T$, $\eta = m\varphi'\varphi^T$. Потенциальная энергия определяется выражениями

$$\Pi = \frac{1}{2} T \int_0^l u'^2 dx - Gu(\xi, t) = \frac{1}{2} U^T CU - GU^T \varphi(\xi),$$

где матрица C имеет вид (6).

Далее найдем обобщенные силы по виртуальной работе:

$$\begin{aligned} \delta A &= -\delta \Pi + H\delta\xi/r = Q^T \delta U + Q_\xi \delta\xi \Rightarrow \\ \Rightarrow Q &= -CU + G\varphi, \quad Q_\xi = GU^T \varphi'(\xi) + H/r. \end{aligned}$$

Появился новый силовой фактор H – суммарный момент двигателей. Он считается функцией угло-

вой скорости вращения колес: $H = H(\omega)$, $\omega = \dot{\xi}/r$ (r – радиус колеса).

Вычисляем производные

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{U}} = (M + \mu)\dot{U} + \dot{\xi}\eta^T U, \quad \frac{\partial K}{\partial U} = \dot{\xi}\eta\dot{U} + \dot{\xi}^2 \sigma U,$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\xi}} = \dot{\xi}(m + U^T \sigma U) + U^T \eta \dot{U},$$

$$\frac{\partial K}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \dot{U}^T \mu' \dot{U} + \dot{\xi} U^T \eta' \dot{U} + \frac{1}{2} \dot{\xi}^2 U^T \sigma' U$$

и записываем уравнения Лагранжа

$$\begin{aligned} (\partial K / \partial \dot{U})^* - \partial K / \partial U &= Q, \quad (\partial K / \partial \dot{\xi})^* - \partial K / \partial \xi = Q_\xi: \\ \begin{cases} (M + \mu)\ddot{U} + \dot{\xi}\eta^T U + 2\dot{\xi}\eta^T \dot{U} + (C + \dot{\xi}^2 \kappa)U = G\varphi, \\ \dot{\xi}(m + U^T \sigma U) + U^T \eta \ddot{U} + 2\dot{\xi} U^T \sigma \dot{U} + \\ + \frac{1}{2} (\dot{\xi}^2 U^T \sigma' U + \dot{U}^T (\eta' - \eta') \dot{U}) - GU^T \varphi' = H/r. \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

Учтено, что $\eta'^T - \sigma = \kappa = m\varphi\varphi'^T$, $\mu' = \eta + \eta'^T$.

Перепишем уравнения (9) в виде

$$(M + \mu)\ddot{U} + \dot{\xi}\eta^T U = S^U, \quad \dot{\xi}(m + U^T \sigma U) + U^T \eta \ddot{U} = S^\xi,$$

$$S^U \equiv G\varphi - 2\dot{\xi}\eta^T \dot{U} - (C + \dot{\xi}^2 \kappa)U,$$

$$S^\xi \equiv H/r + GU^T \varphi' + \frac{1}{2} [\dot{U}^T (\eta^T - \eta) \dot{U} - \dot{\xi}^2 U^T \sigma' U] - 2\dot{\xi} U^T \sigma \dot{U}$$

и разрешим их относительно вторых производных:

$$\ddot{\xi} = \lambda(S^\xi - U^T \eta \ddot{U}) \equiv \Sigma^\xi, \quad \lambda \equiv (m + U^T \sigma U)^{-1},$$

$$\ddot{U} = \Lambda(S^U - \lambda S^\xi \eta^T U) \equiv \Sigma^U,$$

$$\Lambda \equiv (M + \mu - \lambda \eta^T U U^T \eta)^{-1}. \quad (10)$$

Количество уравнений в этой системе ОДУ равно $n + 1$, и каждое второго порядка.

Алгоритм и результаты численного моделирования

Вводя производные $\dot{U} = V$, $\dot{\xi} = \nu$, приведем (10) к каноническому виду системы ОДУ порядка $2n + 2$ для последующего численного интегрирования:

$$Y = \begin{pmatrix} U \\ V \\ \xi \\ \dot{\xi} \end{pmatrix}, \quad \dot{Y} = D(Y) = \begin{pmatrix} D^{(1)}(Y) \\ D^{(2)}(Y) \\ d^{(1)}(Y) \\ d^{(2)}(Y) \end{pmatrix},$$

$$D^{(1)}(Y) = V, \quad D^{(2)}(Y) = \Sigma^U,$$

$$d^{(1)}(Y) = \nu, \quad d^{(2)}(Y) = \Sigma^\xi. \quad (11)$$

Используя Mathcad, элементы столбца Y опреде-

лим операцией submatrix [15]. Для интегрирования системы ОДУ как жесткой применим специальный метод Radau.

Поскольку целью работы является учет ограниченности мощности двигателя, примем следующее соотношение для момента:

$$H(\omega) = \underline{H_0 - H_1\omega - H_r}. \tag{12}$$

Подчеркнутые слагаемые – как при моделировании эффекта Зоммерфельда [5, 14]. Третье слагаемое – момент трения качения (можно включить в H_0). Разумеется, это выражение может быть использовано только при не слишком больших скоростях, поскольку $H > 0$. При зависимости (12) мощность двигателя $M(\omega) = (H_0 - H_1\omega)\omega$ максимальна на скорости $H_0/2H_1$.

Несмотря на высокий порядок, сложность и жесткость системы (11), вычисления проходят без затруднений. Были приняты те же параметры натянутого провода и машины, как и выше. Дополнительные характеристики: $H_0=100$, $H_1=20$, $H_r=1$, $r=0.2$ (в системе СИ). Начальная скорость $\dot{\xi}(0) = v_0 = 1$. Как и везде в данной работе, $\xi(0) = 0$.

Аналог рис. 3 – рис. 4:

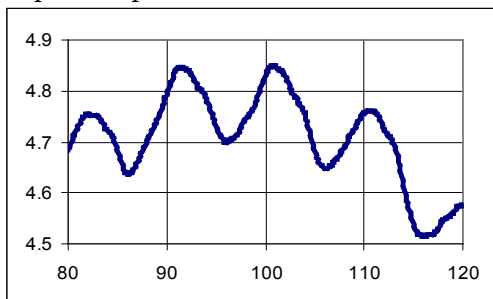


Рис. 4. Прогиб при ограниченной мощности двигателя

Пилообразные колебания сохранились, но произошло сглаживание. Теперь процесс не описыва-

ется одним лишь волновым уравнением (1), когда суперпозиция волн и дает острые пики.

Интересный результат на рис. 5 – закон движения $\xi(t)$.

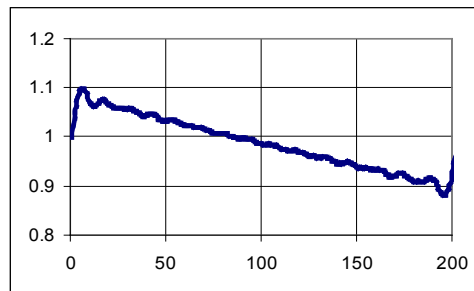


Рис. 5. Скорость движения по проводу

Начальная скорость назначена единичной, как выше при заданном законе движения. Но зависимость момента от скорости вызвала эффект непостоянства: скорость $\dot{\xi} = v(t)$ сначала «подскакивает», а затем медленно снижается. Время прохода t_i находится решением уравнения: $\xi(t_i) = l \Rightarrow t_i = 202.7$ с.

Итак, ограниченность мощности двигателя не привела к тому снижению остроты и амплитуд колебаний, которое ожидалось по энергетическим соображениям.

Однако рассмотрим подробнее распределение кинетической энергии $K(t)$ между частями системы. Имеем $K = K_{m0} + K_{m1} + K_w$, где первое слагаемое – энергия машины со скоростью A , второе – остальная часть энергии машины, а третье – энергия провода:

$$2K_{m0} = mv^2, 2K_{m1} = V^T \mu V + 2vU^T \eta V + v^2 U^T \sigma U, 2K_w = V^T M V. \tag{13}$$

Графики этих слагаемых как функций времени показаны на рис. 6:

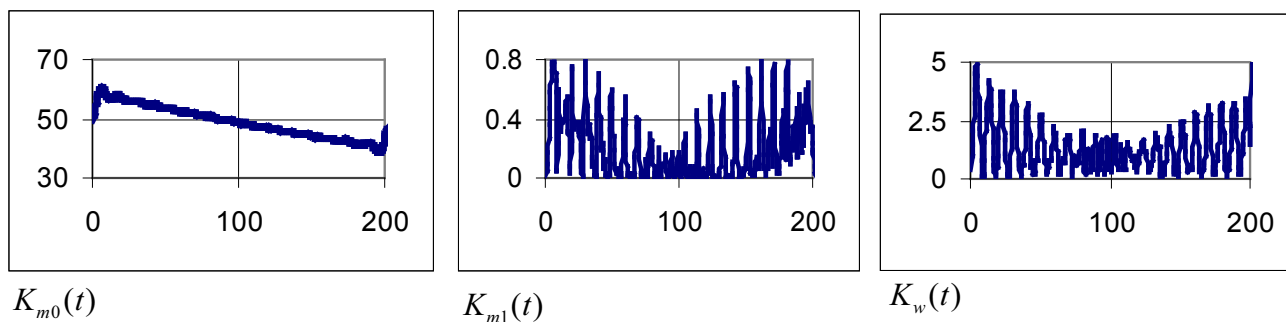


Рис. 6. Зависимость кинетической энергии от времени

Видим, что энергия K_{m0} в формулах (13) на порядок превосходит энергию провода K_w , а «доля колебаний» в энергии массы и вовсе ничтожна. Становится ясно, почему энергетические затраты на раскочку проводов при ограниченной мощности двигателя не сыграли заметной роли.

Однако эти вычисления – лишь пример расчета. Основной интерес представляет методика моделирования. По ней предстоит провести многовариантные расчеты для заданных параметров робота и его двигателя.

Заключение

В работе представлена новая методика математического моделирования колебаний проводов ЛЭП с движущимся роботом инспектором. Считается заданным момент двигателя на ведущих колесах как функция угловой скорости. Закон движения находится из решения системы ОДУ. Проведенные вычисления выявили количественные, но не качественные изменения в колебаниях проводов от ограниченности мощности двигателя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Toussaint K., Pouliot N., Montambault S. Transmission Line Maintenance Robots Capable of Crossing Obstacles: State-of-the-art Review and Challenges Ahead // Journal of Field Robotics. 2009. 26(5). P. 477–499.
2. Bahrami M.R. A novel design of electrical transmission line inspection machine // Современное машиностроение. Наука и образование. 2014. № 4. С. 292–298.
3. Елисеев В.В., Бахрами М.Р. Диагностическая машина на проводах ЛЭП: устройство и проблемы механики // Научно-техн. ведомости СПбПУ. Сер. Наука и образование. 2015. 1(214). С. 200–207.
4. Елисеев В.В., Бахрами М.Р. Динамика проводов ЛЭП при движении по ним диагностической машины // Известия вузов. Приборостроение. 2015. № 3. Том 58. С. 229–235.
5. Кононенко В.О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. / В.О. Кононенко.– М., 1964. – 256 с.
6. Глухарев К.К., Фролов К.В. К теории колебаний механических систем ограниченного возбуждения // ДАН СССР. 1971. №2. Том 199. С.285–288.
7. Гончаревич И.Ф. Исследование вибрационных транспортирующих машин с ограниченным возбуждением. В кн.: «Нелинейные колебания и переходные процессы в машинах». М.: Наука. 1972. С. 25–38.
8. Вейц В.Л., Кочура А.Е. Эффект ограниченного возбуждения в силовых установках с двигателями внутреннего сгорания // «Вибротехника». 1973. 2(19). Вильнюс. С.139–160.
9. Фролов К.В., Ходжаев К.Ш. Взаимодействие источника возбуждения с колебательной системой. В кн.: «Вибрации в технике». М.: Машиностроение, 1979. С. 191–214.
10. Алифов А.А., Фролов К.В. Взаимодействие нелинейных колебательных систем с источниками энергии / А.А. Алимов, К.В. Фролов. М.: Наука, 1989.– 328 с.
11. Balthazar J.M., Mook D.T., Weber H.I., Brasil R.M., Fenili A., Belato D., Felix J.L.P. An Overview on Non-Ideal Vibrations // 2003. Meccanica. Vol. 38. P. 613–621.
12. Перепелкин Н.В., Михлин Ю.В. Переходные и стационарные режимы в системе с ограниченным возбуждением // Вестник НТУ «ХПИ, Динамика и прочность машин». 2007. Вып. 38. С. 108–117.
13. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. М.: Наука, 1979. – 560 с.
14. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. / Я.Г. Пановко, И.И. Губанова.– М.: Наука, 1979. – 384 с.
15. Кирьянов Д.В. Mathcad 14. / Д.В. Кирьянов.– СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 704 с.
16. Елисеев В.В. Механика деформируемого твердого тела. / В.В. Елисеев.– СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2006. – 231 с.
17. Елисеев В.В., Оборин Е.А. О локализации динамического гашения колебаний в пространстве и по частоте // Теория механизмов и машин. 2014. №1 (23). Том 12. С. 20–26.

DOI 10.5862/TMM.28.1

Article history: Received 16.04.2015

Received in revised form 24.09.2015

Accepted 24.11.2015

DYNAMIC OF ELECTRICAL TRANSMISSION LINES WITH INSPECTION ROBOT ON IT UNDER INFLUENCE OF LIMITED POWER OF ROBOT ENGINE

V.V. Eliseev, M.R. Bahrami

Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University: 29, Polytechnicheskaya st., St.Petersburg, Russia, 195251



The influence of the limited power of the inspection robot engine while moving over the electrical transmission lines has been considered. The technique of mathematical modeling of dynamic processes based on Lagrangian mechanics of solid and elastic bodies by using mathematical software has been developed. Arising saw-tooth oscillations and their dependence on the characteristics of the robot engine has been studied.

Key words: Inspection of electrical transmission lines, vibration, Lagrangian mechanics, momentum and power of the engine, mathematical software.

REFERENCES

1. **Toussaint K., Pouliot N., Montambault S.** Transmission line maintenance robots capable of crossing obstacles: state-of-the-art review and challenges ahead // *Journal of Field Robotics*. 2009. 26(5). P. 477–499. DOI: 10.1002/rob.20295
2. **Bahrami M.R.** A novel design of electrical transmission line inspection machine // *Modern Engineering. Science and Education*. 2014. No. 4. P. 292–298.
3. **Eliseev V.V., Bahrami M.R.** A diagnostic machine on power transmission lines: configuration and mechanical challenges // *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Science & Education*. 2015. No. 1(214). P. 200–207. DOI: 10.5862/JEST.214.23
4. **Eliseev V.V., Bahrami M.R.** Dynamics of electrical transmission wires at a diagnostic machine movement along the line // *Journal of Instrument Engineering*. 2015. No. 3. V. 58. P. 229–235. DOI: 10.17586/0021-3454-2015-58-3-229-235
5. **Kononenko V.O.** *Vibrating systems with a limited power supply* / V.O. Kononenko. London: Iliffe, 1969. 245p.
6. **Gluharev K.K., Frolov K.V.** To the theory of oscillations of mechanical systems with a limited power supply // *Reports of Academy of Sciences of USSR*. 1971. No. 2. V. 199. P. 285–288.
7. **Goncharevich I.F.** Study of vibration transport machines with a limited power supply / In.: *Nonlinear oscillations and transient processes in machines*. Moscow: Nauka, 1972. P. 25–38.
8. **Veits V.L., Kochura A.E.** Effect of a limited power supply in propulsion systems with internal combustion engines // *Vibration Technology*. 1973. No. 2(19). P. 139–160.
9. **Frolov K.V., Hodzhaev K.Sh.** Interaction between source of excitation and oscillating system / *Vibrations in technics*. Moscow: Mashinostroenie, 1979. P. 191–214.
10. **Alifov A.A., Frolov K.V.** *Interaction of nonlinear oscillatory systems with energy sources* / A.A. Alifov, K.V. Frolov. Washington: Taylor & Francis, 1990. 352p.
11. **Balthazar J.M., Mook D.T., Weber H.I., Brasil R.M., Fenili A., Belato D., Felix J.L.P.** An Overview on Non-Ideal Vibrations // *Meccanica*. 2003. Vol. 38. P. 613–621. DOI: 10.1023/A:1025877308510
12. **Perepelkin N.V., Mihlin Yu.V.** Transient and stationary modes in system with bounded excitation // *Herald of National Technical University Kharkiv Polytechnic Institute. Dynamics and strength of machines*. 2007. No. 38. P. 108–117.
13. **Tikhonov A.N., Samarskii A.A.** *Equations of mathematical physics* / A.N. Tikhonov, A.A. Samarskii. New York: Dover Publications, 2011. 765p.
14. **Panovko I.G., Gubanova I.I.** *Stability and oscillations of elastic systems: paradoxes, fallacies, and new concepts* / I.G. Panovko, I.I. Gubanova. New York: Consultants bureau, 1965. 291p.
15. **Kiryanov D., Kiryanova E.** *Computational science* / D. Kiryanov, E. Kiryanova. Hingham: Infinity Science Press, 2007. 400p.
16. **Eliseev V.V.** *Mechanics of deformable solids* / V.V. Eliseev. St. Petersburg: St. Petersburg State Polytechn. Univ. Publishing House, 2006. 231 p.
17. **Eliseev V.V., Oborin E.A.** On localization of dynamic damping of oscillations in space and by frequency // *Theory of Mechanisms and Machines*. 2014. No. 1(23). V. 12. P. 20–26.