УДК 621.01
DOI 10.5862/TMM.27.3

Поступила в редакцию 05.08.2015
После доработки 17.08.2015
Принята к печати 22.10.2015

ИССЛЕДОВАНИЕ КИНЕМАТИКИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО МЕХАНИЗМА ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ В СРЕДЕ MATHCAD

Ф.А. Доронин

Кандидат технических наук, доцент кафедры «Теоретическая механика» Петербургского государственного университета путей сообщения Императора Александра I.
Московский пр., д. 9, г. Санкт-Петербург, Россия, 190031.

Приведен краткий обзор литературы, связанной с изучением движения механизмов параллельной структуры (МПС), и рассмотрено решение в матричной форме прямой и обратной задач кинематики пространственного МПС в среде Mathcad.

Ключевые слова: механизмы параллельной структуры, матричный способ, прямая и обратная задачи кинематики.

Почти шестьдесят лет назад, в 1956 году, была опубликована статья В.Е. Гью (В.Е. Гофа) [1], а затем в 1965 году – статья Д. Стюарта [2], в которых были описаны принципиально похожие устройства, представляющие собой неподвижное основание, к которому шестью стержневыми опорами прикреплена подвижная платформа. При изменении длины опорных стержней платформа изменяет свое положение в пространстве. Впоследствии эти устройства в научной литературе стали называться платформами Гью-Стюарта (гексаподами), а также «механизмами параллельной структуры» («параллельными механизмами»).

Механизмы параллельной структуры (МПС) обладают рядом полезных свойств (относительно малый вес, повышенная грузоподъемность, жесткость и высокая точность) и поэтому рассматриваются как весьма перспективные в таких областях современного машиностроения, как приборостроение, автомобилестроение, измерительная техника, изготовление тренажеров и устройств позиционирования, подводные и космические исследования, прецизионное станкостроение, а также для выполнения работ в экстремальных условиях. Одним из важных преимуществ механизмов параллельной структуры является то, что они в отличие от традиционных манипуляторов содержат замкнутые кинематические цепи и поэтому воспринимают нагрузку подобно пространственным фермам.

В работах [3–5] проанализированы геометрия и рабочие характеристики плоских и пространственных МПС, их структура и кинематические схемы, и на основе этого анализа проведена систематизация механизмов с попыткой учета их особых положений.

Дж. П. Мерле в своих трудах [6, 27, 28] представил подробную библиографию, связанную с конструированием и исследованием кинематики и динамики МПС, изучением их особых положений с привлечением геометрии Грассмана. В работах [7,8] помимо изложения основных положений теории винтов содержатся результаты исследования кинематики, критерии особых положений и винтовой алгоритм силового анализа МПС,все особенности разбиты на три группы в зависимости от свойств матриц Якоби этих цепей.

В статьях [9-13] рассмотрены вопросы применения винтового исчисления к изучению статики, кинематики и динамики роботов последовательной и параллельной структур, а в книге одного из основателей развивающейся областичисленно-алгебраическойгеометрии [14] используется алгебро-геометрический подход кчисленному решениюсистемполиномиальных уравнений, возникающих в теории механизмов.

Работа [15] связана с применением винтового исчисления к моделированию и анализу движения опорно-двигательного аппарата живых существ.

Статья В.А. Глазунова [16] посвящена определению кинематических винтов, переводящих МПС в особое положение. Для исключения сингулярных конфигураций требуется определить градиент кинематического винта, который соответствует движению механизма по самой близкой к желаемой траектории.

В трактате [17] приведено множество примеров применения механизмов параллельной структуры в современных приборах и устройствах, используемых в различных областях техники, произведен анализ кинематических цепей МПС с различным числом степеней свободы (введено понятие «структура движения») и вкратце приводится методика синтеза кинематических цепей, основанная на применении теории групп перемещений. По мнению авторов, трактат может быть весьма полезен исследователям как пример успешного приложения теории винтов к изучению движения механизмов.

Работа [18] представляет собой одну из первых книг по робототехнике, в которых изучается движение несвязанных и полностью изотропных параллельных манипуляторов и перечислены методы их структурного синтеза, включая теорию винтов. В первой части изложена методика структурного синтеза механизмов, во второй части – представлены параллельные роботы различной топологии, порожденные предложенным автором системным подходом.

В статье [19] на основе использования винтового исчисления решается задача о выводе МПС из особых положений, а также моделируются фрагменты кристаллических структур в виде механизмов параллельной структуры с избыточными связями.

Вопросы, связанные с изучением движения параллельных манипуляторов с различным числом степеней свободы, рассмотрены в работах [20-22,25].

М. Чекарелли в ряде своих работ, в том числе в трактате [23] и статье [24], приводит обзор существующих методов изучения кинематики манипуляторов, которые могут бытьусловно разбиты на три группы, а именно, модификации методов, используемых присинтезе-механизмов, применение винтового исчисления, а также3Dкинематики(теории группЛи, дуальных чисел, кватернионов, геометрия Грассмана).

В работе [26] путем применения винтового исчисления составлены математические модели для описания движения механизмов челюсти животного из семейства кошачьих.

В статье [29] показано, как решается прямая и обратная задачи кинематики для гексапода Гью-Стюарта в среде MathCAD путем применения кватернионов. Это позволило понизить порядок системы кинематических уравнений с девяти до трех по сравнению со случаем использования однородных координат.

В.А Глазунов в работе [30] предложил подход к синтезу параллельных манипуляторов с шестью степенями свободы, основанный на использовании плюккеровых координат кинематических и силовых винтов, связанных с кинематическими цепями. Использование групп винтов позволило получить все кинематические винты движущейся платформы и все силовые винты реакций связей, приложенные со стороны кинематических цепей без составления каких-либо уравнений.

Кинематика механизмов параллельной структуры исследована в статьях [31, 32], в которых методами винтового исчисления изучены особые положения, а также приведены результаты решения прямой и обратной задачи кинематики этих механизмов. Показано, что использование аппарата групп винтов дает возможность упростить уравнения по сравнению с традиционным подходом.

Хейло С.В. в статье [33] сравнивает трудоемкость решения прямой и обратной задач кинематики плоского манипулятора параллельной структуры способом, предложенным GosselinC.M., AngelesJ. в [7], и способом, основанным на применении винтового исчисления. К сожалению, в этой работе присутствуют ошибки и значительное количество неточностей и опечаток.

Работы [34, 42] иллюстрируют использование дуальных направляющих косинусов, бикватернионов и бикватернионных матриц для получения кинематических уравнений выходного звена роботаманипулятора. Проведенное исследование доказывает эффективность применения бикватернионной теории кинематического управления для решения обратной задачи кинематики.

Монография [35] посвящена структурному синтезу МПС, основанному на винтовом исчислении. В ней приводится обобщенная процедура анализа подвижности параллельных механизмов.

В.А. Глазунов в работе [36] использовал теорию винтов для определения скоростных и силовых критериев близости МПС к особым положениям трех типов (в соответствии с классификацией сингулярностей, представленной в [7]).

Винтовое исчисление оказалось весьма удобным при исследовании колебаний сферического механизма параллельной структуры с тремя степенями свободы [37].

В статье [38] на примере робота I.Ca.Ro. (InnovativeCArtesianRObot), разработанного на кафедре механики политехническогоуниверситетаМарке из города Анкона (Италия), обсуждается проблема повышения эффективности численных динамических расчетов, решение которой существенно зависит от принятой математической модели МПС. Использованный в статье метод, основанный на применении винтового исчисления, позволил улучшить рабочие характеристики робота I.Ca.Ro.

В работах [39, 40] предложены некоторые нетрадиционные способы статического, кинематического и динамического расчета МПС.

В обзорной статье [41] авторы обсуждают достоинства механизмов параллельной структуры, способы описания движения МПС и среди этих способов выделяют метод винтов, который позволяет создавать удобные универсальные и компактные алгоритмы анализа механизмов, и вместе с тем дает возможность получить качественные характеристики, связанные с исключением особых положений и повышением точности позиционирования МПС.

Приведенный краткий обзор литературы позволяет сделать вывод об интересе к изучению движения как плоских, так и пространственных МПС,и актуальностиисследования свойств этих механизмов.

1.Определение положения звеньев пространственного МПС

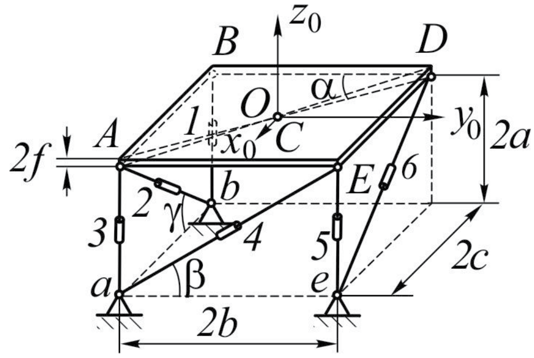

Рис. 1

В качестве примера рассмотрим решение задач кинематики механизма параллельной структуры, представленного на рис. 1. Однородная прямоугольная платформа поддерживается в пространстве шестью стержневыми опорами *1-6*, в каждой из которых имеется линейный двигатель, шарниры Кардана на нижних концах и сферические шарниры в точках *A, B, D* и *E*. Центры сферических шарниров попарно совпадают (попарно совпадают также центры шарниров Кардана). Система имеет шесть степеней свободы. За обобщенные координаты примем удлинения *s1-s6* опорных стержней. Будем считать, что в начальномположении платформа горизонтальна.

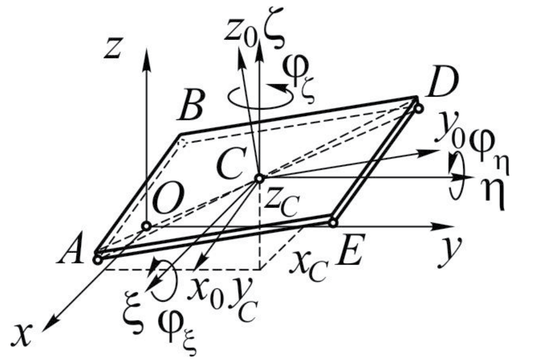

Рис. 2

Для решения задачи воспользуемся матричным способом, подробно изложенным в пособиях [43, 44]. Разберем шарниры *A, B, D, E* и рассмотримдвижение платформы и опорных стержней по отдельности. Платформа совершает свободное, а каждый из стержней – сферическое движение. Для описания системы выберем неподвижную (глобальную) систему координат *Oxyz* (рис. 2), начало которой совпадает с начальным положением *O* центра масс *C* платформы, а оси направлены вдоль ее главных центральных осей инерции. С платформой свяжем две системы координат: сопровождающую $C\xi\eta\zeta$, оси которой перемещаются, оставаясь параллельными соответствующим осям глобальной системы координат O*xyz*, и локальную систему $Cx_0y_0z_0$, жестко связанную с платформой, причем в исходном положении оси глобальной, сопровождающей и локальной систем координат совпадают. За обобщенные координаты платформы примем координаты x_C, y_C, z_C ее центра масс и углы φ_x, φ_yи φ_zповорота пластины по отношению к сопровождающей системе координат $C\xi\eta\zeta$.

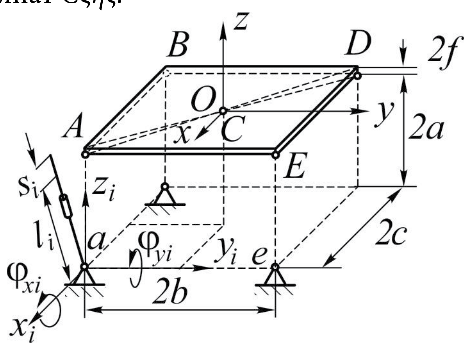

Рис. 3

Для описания движения шести стержневых опор свяжем с каждой из них подвижную локальную систему координат $x_iy_iz_i$ (i=1…6). За обобщенные координаты примем углы φ_{xi}, φ_{yi}поворота локальных систем координат $x_iy_iz_i$ относительно осей, параллельных осям глобальной системы $Ox_0y_0z_0$ (рис. 3).

Вращение стержневых опор вокруг их продольных осей запрещено наложенными связями.

Таким образом, после декомпозиции движение системы задается шестью основными и восемнадцатью избыточнымиобобщенными координатами (система имеет 24 степени свободы).

Запишем выражения для радиус-векторов центров сферических шарниров платформы:

$$r_{OA} = r_C + H_x(-\varphi_x)\cdot H_y(-\varphi_y)\cdot H_z(-\varphi_z)\cdot r_{1A};$$
$$r_{OB} = r_C + H_x(-\varphi_x)\cdot H_y(-\varphi_y)\cdot H_z(-\varphi_z)\cdot r_{1B};$$
$$r_{OD} = r_C + H_x(-\varphi_x)\cdot H_y(-\varphi_y)\cdot H_z(-\varphi_z)\cdot r_{1D};$$
$$r_{OE} = r_C + H_x(-\varphi_x)\cdot H_y(-\varphi_y)\cdot H_z(-\varphi_z)\cdot r_{1E}$$

и центров сферических шарниров стержневых опор:

$$r_{OB1} = r_{Ob} + H_x(-\varphi_{x1})\cdot H_y(-\varphi_{y1})\cdot r_1(s_1);$$
$$r_{OA2} = r_{Ob} + H_x(-\varphi_{x2})\cdot H_y(-\varphi_{y2})\cdot r_2(s_2);$$
$$r_{OA3} = r_{Oa} + H_x(-\varphi_{x3})\cdot H_y(-\varphi_{y3})\cdot r_3(s_3);$$
$$r_{OE4} = r_{Oa} + H_x(-\varphi_{x4})\cdot H_y(-\varphi_{y4})\cdot r_4(s_4);$$
$$r_{OE5} = r_{Oe} + H_x(-\varphi_{x5})\cdot H_y(-\varphi_{y5})\cdot r_5(s_5);$$
$$r_{OD6} = r_{Oe} + H_x(-\varphi_{x6})\cdot H_y(-\varphi_{y6})\cdot r_6(s_6),$$

где $r_C^T = \begin{pmatrix} x_C & y_C & z_C \end{pmatrix}$; $r_{1A}^T = \begin{pmatrix} c & -b & -f \end{pmatrix}$;

$r_{1B}^T = \begin{pmatrix} -c & -b & -f \end{pmatrix}$; $r_{1D}^T = \begin{pmatrix} -c & b & -f \end{pmatrix}$;

$r_{1E}^T = \begin{pmatrix} A & 8 & -f \end{pmatrix}$; $r_{Ob}^T = \begin{pmatrix} -c & -b & -2a-f \end{pmatrix}$;

$r_{Oa}^T = \begin{pmatrix} A & -b & -2a-f \end{pmatrix}$;

$r_{Oe}^T = \begin{pmatrix} A & b & -2a-f \end{pmatrix}$; $r_1(s_1)^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & l_1+s_1 \end{pmatrix}$;

$r_2(s_2)^T = \begin{pmatrix} (l_2+s_2)\cos\gamma & 0 & (l_2+s_2)\sin\gamma \end{pmatrix}$;

$r_3(s_3)^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & l_3+s_3 \end{pmatrix}$;

$r_4(s_4)^T = \begin{pmatrix} 0 & (l_4+s_4)\cos\beta & (l_4+s_4)\sin\beta \end{pmatrix}$;

$r_5(s_5)^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & l_5+s_5 \end{pmatrix}$;

$r_6(s_6)^T = \begin{pmatrix} -(l_6+s_6)\cos\delta & 0 & (l_6+s_6)\sin\delta \end{pmatrix}$;

T – индекс транспонирования;

$$H_x(-\varphi_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_x & \sin\varphi_x \\ 0 & -\sin\varphi_x & \cos\varphi_x \end{pmatrix};$$

$$H_y(-\varphi_y) = \begin{pmatrix} \cos\varphi_y & 0 & -\sin\varphi_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi_y & 0 & \cos\varphi_y \end{pmatrix};$$

$$H_z(-\varphi_z) = \begin{pmatrix} \cos\varphi_z & \sin\varphi_z & 0 \\ -\sin\varphi_z & \cos\varphi_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Составим уравнения связей:

$$f_1 = r_{OB1} - r_{OB} = 0;\quad f_2 = r_{OA2} - r_{OA} = 0;$$
$$f_3 = r_{OA3} - r_{OA} = 0;$$
$$f_4 = r_{OE4} - r_{OE} = 0;\quad f_5 = r_{OE5} - r_{OE} = 0;$$
$$f_6 = r_{OD6} - r_{OD} = 0. \qquad (2)$$

Решение системы уравнений (2) позволяет определить восемнадцать неизвестных значений обобщенных координат из двадцати четырех (шесть значений оставшихся обобщенных координат следует задать). В зависимости от того, какие обобщенные координаты считаются заданными, решается либо фрагмент первой (прямой), либо второй (обратной) задачи кинематики. Так, если известными считаются удлинения *s1-s6*опорных стержней (входные координаты), то из уравнений (2) можно определить выходные координаты (обобщенные координаты x_C, y_C, z_C, φ_ξ, φ_ηи φ_ζ, определяющие положение выходного звена – платформы), то есть решить первую задачу кинематики.В случае, когда задаются выходные координаты, из уравнений (2) определяются входные координаты – решается вторая задача кинематики-механизма.

Систему уравнений (2) можно решить в среде MathCADпутемиспользования вычислительного блокаGiven/Find.

В качестве примера решим фрагмент прямой задачи кинематики, связанный с определением выходных координат, описывающих положение платформы рассматриваемого механизма,при следующих исходных данных: a=1 м; b=1,5 м; c=2 м; f=0,1 м – заданные параметры; s_1=0,5 м; $s_2=s_3=s_4=s_5=s_6$=0 –значения входных координат. В результате решения системы уравнений (2) получаем следующие значения выходных координат: x_C=0,549 м, y_C=0,495 м, z_C=0,602 м, φ_x=0,043 рад., φ_y=0,341 рад.и φ_z= –0,081 рад.

Для решения обратной задачи кинематики зададим выходные координаты механизма:

x_C=0,396 м, y_C=0,705 м, z_C=0,539 м, φ_x=0,081 рад., φ_y=0,303 рад.и φ_z= –0,346 рад. Решение системы уравнений (2) позволяет определить входные координаты механизма: s_1=1,5 м; s_2= –0,3 м; $s_3=s_4=s_5=s_6$=0.

2. Определение обобщенных скоростей

Перейдем к определению обобщенных скоростей МПС. Для этого потребуется определить производные по времени от уравнений связей (2). Предварительно найдем производные от матриц поворота (1):

$$\dot{H}_x(-\varphi_x)=\dot{\varphi}_x\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-\sin\varphi_x&\cos\varphi_x\\0&-\cos\varphi_x&-\sin\varphi_x\end{pmatrix}=\omega_x Q_x\cdot H_x(-\varphi_x);$$

$$\dot{H}_y(-\varphi_y)=\dot{\varphi}_y\begin{pmatrix}-\sin\varphi_y&0&-\cos\varphi_y\\0&0&0\\\cos\varphi_y&0&-\sin\varphi_y\end{pmatrix}=\omega_y Q_y\cdot H_y(-\varphi_y);$$

$$\dot{H}_z(-\varphi_z)=\dot{\varphi}_z\begin{pmatrix}-\sin\varphi_z&\cos\varphi_z&0\\-\cos\varphi_z&-\sin\varphi_z&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\omega_z Q_z\cdot H_z(-\varphi_z),$$

где $Q_x=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$; $Q_y=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$;

$Q_z=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ – вспомогательные матрицы;

$\omega_x=\dot{\varphi}_x$; $\omega_y=\dot{\varphi}_y$; $\omega_z=\dot{\varphi}_z$.

Искомые производные от уравнений связей имеют вид:

$$\begin{aligned}
\dot{f}_1&=\left[\omega_{x1}Q_x+\omega_{y1}H_x(-\varphi_{x1})Q_yH_x(\varphi_{x1})\right](r_{OB1}-r_{Ob})+\\
&+H_x(-\varphi_{x1})H_y(-\varphi_{y1})v_1(\dot{s}_1)-v_C-Om\cdot(r_{OB}-r_C)=0;\\
\dot{f}_2&=\left[\omega_{x2}Q_x+\omega_{y2}H_x(-\varphi_{x2})Q_yH_x(\varphi_{x2})\right](r_{OA2}-r_{Ob})+\\
&+H_x(-\varphi_{x2})H_y(-\varphi_{y2})v_2(\dot{s}_2)-v_C-Om\cdot(r_{OA}-r_C)=0;\\
\dot{f}_3&=\left[\omega_{x3}Q_x+\omega_{y3}H_x(-\varphi_{x3})Q_yH_x(\varphi_{x3})\right](r_{OA3}-r_{Oa})+\\
&+H_x(-\varphi_{x3})H_y(-\varphi_{y3})v_3(\dot{s}_3)-v_C-Om\cdot(r_{OA}-r_C)=0;\\
\dot{f}_4&=\left[\omega_{x4}Q_x+\omega_{y4}H_x(-\varphi_{x4})Q_yH_x(\varphi_{x4})\right](r_{OE4}-r_{Oa})+\\
&+H_x(-\varphi_{x4})H_y(-\varphi_{y4})v_4(\dot{s}_4)-v_C-Om\cdot(r_{OE}-r_C)=0;\\
\dot{f}_5&=\left[\omega_{x5}Q_x+\omega_{y5}H_x(-\varphi_{x5})Q_yH_x(\varphi_{x5})\right](r_{OE5}-r_{Oe})+\\
&+H_x(-\varphi_{x5})H_y(-\varphi_{y5})v_5(\dot{s}_5)-v_C-Om\cdot(r_{OE}-r_C)=0;\\
\dot{f}_6&=\left[\omega_{x6}Q_x+\omega_{y6}H_x(-\varphi_{x6})Q_yH_x(\varphi_{x6})\right](r_{OD6}-r_{Oe})+\\
&+H_x(-\varphi_{x6})H_y(-\varphi_{y6})v_6(\dot{s}_6)-v_C-Om\cdot(r_{OD}-r_C)=0,
\end{aligned}\tag{3}$$

где

$$Om=\omega_xQ_x+\omega_yH_x(-\varphi_x)Q_yH_x(\varphi_x)+$$
$$+\omega_zH_x(-\varphi_x)H_y(-\varphi_y)Q_zH_x(\varphi_x)H_y(\varphi_y);$$

$\omega_{xi}=\dot{\varphi}_{xi}$; $\omega_{yi}=\dot{\varphi}_{yi}$; $v_1(\dot{s}_1)=\begin{pmatrix}0\\0\\\dot{s}_1\end{pmatrix}$;

$v_2(\dot{s}_2)=\begin{pmatrix}\dot{s}_2\cos\gamma\\0\\\dot{s}_2\sin\gamma\end{pmatrix}$; $v_3(\dot{s}_3)=\begin{pmatrix}0\\0\\\dot{s}_3\end{pmatrix}$;

$v_4(\dot{s}_4)=\begin{pmatrix}0\\\dot{s}_4\cos\beta\\\dot{s}_4\sin\beta\end{pmatrix}$; $v_5(\dot{s}_5)=\begin{pmatrix}0\\0\\\dot{s}_5\end{pmatrix}$;

$v_6(\dot{s}_6)=\begin{pmatrix}-\dot{s}_6\cos\delta\\0\\\dot{s}_6\sin\delta\end{pmatrix}$.

Система уравнений (3) состоит из шести матричных (восемнадцати скалярных) уравнений, которые при известных значениях обобщенных координат содержатдвадцать четыре обобщенные скорости, шесть из которых должны быть заданы.

Зададимся значениями входных обобщенных координат (s_1=0,1 м; s_2=0; s_3=0,8 м; s_4=0,6 м; $s_5=s_6$=0) и обобщенных скоростей ($\dot{s}_1$=0; $\dot{s}_2$=0,4 м/с; $\dot{s}_3=\dot{s}_4$=0; $\dot{s}_5$=0,9 м/с; $\dot{s}_6$=0) и, решая систему (3) путем применения пакета MathCAD, определим значения выходных обобщенных координат и скоростей: x_C= –0,396 м, y_C=0,852 м, z_C= –0,168 м, φ_x= –0,279 рад., φ_y= –0,181 рад., φ_z= –0,045 рад, v_{Cx}=0,350 м/с, v_{Cy}= –0,752 м/с, v_{Cz}= 0,905 м/с, ω_x= 0,334 c^{-1}, ω_y= 0,013c^{-1}, ω_z= 0,064c^{-1}.

Если же задаться значениями выходных обобщенных координат и скоростей (x_C=–0,520 м, y_C=–0,109 м, z_C= –0,094 м, φ_x= –0,239 рад., φ_y= –0,152 рад., φ_z= –0,122 рад, v_{Cx}=0,230 м/с, v_{Cy}=0,667 м/с, v_{Cz}=–0,002 м/с, ω_x=–0,173c^{-1}, ω_y=–0,053c^{-1}, ω_z= –0,339 c^{-1}), то не составляет труда определение значений входных координат и скоростей: s_1=0; s_2= –0,3 м; s_3=0,7 м; s_4= –0,3 м; $s_5=s_6$=0, $\dot{s}_1$=0; $\dot{s}_2$=0; $\dot{s}_3$=0,5 м/с; $\dot{s}_4$=0; $\dot{s}_5$=0,9 м/с; $\dot{s}_6$= –0,9 м/с.

3. Определение обобщенных ускорений

Для вычисления обобщенных ускорений определим вторые производные по времени от уравнений связей (2) и получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&Eps_1\cdot(r_{OB1}-r_{Ob})+Om_1\cdot v_1(\dot{s}_1)+\\
&+H_x(-\varphi_{x1})H_y(-\varphi_{y1})a_1(\ddot{s}_1)-\\
&-a_C-Eps\cdot(r_{OB}-r_C)=0;\\
&Eps_2\cdot(r_{OA2}-r_{Ob})+Om_2\cdot v_2(\dot{s}_2)+\\
&+H_x(-\varphi_{x2})H_y(-\varphi_{y2})a_2(\ddot{s}_2)-\\
&-a_C-Eps\cdot(r_{OA}-r_C)=0;\\
&Eps_3\cdot(r_{OA3}-r_{Oa})+Om_3\cdot v_3(\dot{s}_3)+\\
&+H_x(-\varphi_{x3})H_y(-\varphi_{y3})a_3(\ddot{s}_3)-\\
&-a_C-Eps\cdot(r_{OA}-r_C)=0;\\
&Eps_4\cdot(r_{OE4}-r_{Oa})+Om_4\cdot v_4(\dot{s}_4)+\\
&+H_x(-\varphi_{x4})H_y(-\varphi_{y4})a_4(\ddot{s}_4)-\\
&-a_C-Eps\cdot(r_{OE}-r_C)=0;\\
&Eps_5\cdot(r_{OE5}-r_{Oe})+Om_5\cdot v_5(\dot{s}_5)+\\
&+H_x(-\varphi_{x5})H_y(-\varphi_{y5})a_5(\ddot{s}_5)-\\
&-a_C-Eps\cdot(r_{OE}-r_C)=0;\\
&Eps_6\cdot(r_{OD6}-r_{Oe})+Om_6\cdot v_6(\dot{s}_6)+\\
&+H_x(-\varphi_{x6})H_y(-\varphi_{y6})a_6(\ddot{s}_6)-\\
&-a_C-Eps\cdot(r_{OD}-r_C)=0,
\end{aligned}\tag{4}$$

где

$$\begin{aligned}
&Eps_i=\varepsilon_{xi}Q_x+\omega_{xi}^2Q_x^2+\\
&+\left(2\omega_{xi}\omega_{yi}Q_x+\varepsilon_{yi}\right)H_x(-\varphi_{xi})Q_yH_x(\varphi_{xi})+\\
&+\omega_{yi}^2Q_y^2H_x(-\varphi_{xi})Q_y^2H_x(\varphi_{xi});\\
&Om_i=2\left(\omega_{xi}Q_x+\omega_{yi}H_x(-\varphi_{xi})Q_yH_x(\varphi_{xi})\right);
\end{aligned}$$

i=1…6;

$$\begin{aligned}
&\mu_{xi}=\ddot{\varphi}_{xi};\ \mu_{yi}=\ddot{\varphi}_{yi};\ a_1(\ddot{s}_1)^T=\begin{pmatrix}0 & 0 & \ddot{s}_1\end{pmatrix};\\
&a_2(\ddot{s}_2)^T=\begin{pmatrix}\ddot{s}_2\cos\gamma & 0 & \ddot{s}_2\sin\gamma\end{pmatrix};\\
&a_3(\ddot{s}_3)^T=\begin{pmatrix}0 & 0 & \ddot{s}_3\end{pmatrix};\\
&a_4(\ddot{s}_4)^T=\begin{pmatrix}0 & \ddot{s}_4\cos\beta & \ddot{s}_4\sin\beta\end{pmatrix};\\
&a_5(\ddot{s}_5)^T=\begin{pmatrix}0 & 0 & \ddot{s}_5\end{pmatrix};\\
&a_6(\ddot{s}_6)^T=\begin{pmatrix}-\ddot{s}_6\cos\delta & 0 & \ddot{s}_6\sin\delta\end{pmatrix};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&Eps=\varepsilon_xQ_x+\varepsilon_yH_x(-\varphi_x)Q_yH_x(\varphi_x)+\\
&+\varepsilon_zH_x(-\varphi_x)H_y(-\varphi_y)Q_zH_y(\varphi_y)H_x(\varphi_x)+\\
&+\omega_x^2Q_x^2+\omega_y^2H_x(-\varphi_x)Q_y^2H_x(\varphi_x)+\\
&+\omega_z^2H_x(-\varphi_x)H_y(-\varphi_y)Q_z^2H_y(\varphi_y)H_x(\varphi_x)+\\
&+2\omega_x\omega_yQ_xH_x(-\varphi_x)Q_yH_x(\varphi_x)+\\
&+2\omega_x\omega_zQ_xH_x(-\varphi_x)H_y(-\varphi_y)Q_zH_y(\varphi_y)H_x(\varphi_x)+\\
&+2\omega_y\omega_zH_x(-\varphi_x)Q_yH_y(-\varphi_y)Q_zH_y(\varphi_y)H_x(\varphi_x).
\end{aligned}$$

Система матричных уравнений (2–4) позволяет полностью решить как прямую, так и обратную задачи кинематики рассматриваемого пространственного МПС. Применение математического пакета Mathcadдает возможность построить хронограммы как обобщенных координат (основных и избыточных), обобщенных скоростей и ускорений, так и фазовый портрет системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gough, V. E., Contribution to discussion of papers on research in Automobile Stability, Control and Tire performance, Proc. Auto Div. Inst. Mech. Eng., pages 392—394, 1956—1957.

2. D. Stewart, A Platform with Six Degrees of Freedom, Proc. Inst. Mech. Eng., 1, 15, 1965

3. K.H. Hunt: Kinematic Geometry of Mechanisms (Clarendon, Oxford 1978).

4. К.Х. Хант. Кинематические структуры манипуляторов с параллельным приводом. ASME, Конструирование, 1983, т. 105, №4, с. 201-210.

5. Mohammed M., Duffy J. A Direct Determination of the Instantaneous Kinematics of Fully Parallel Robot Manipulators. / ASME J. Mech., Trans., Autom. Des., 1985, V. 107(2): p.

6. J. P. Merlet, "Singular configurations of parallel manipulators and Grassmann geometry," Int. J. Robotics Research, Vol. 8, No. 5, 1989, pp. 45-56.

7. Gosselin, C.M., Angeles, J., Singularity Analysis of Closed Loop Kinematic Chains, IEEE Trans. on Robotics and Automation, No 6(3), 1990 pp. 281-290.

8. Глазунов В.А., Колискор А.Ш., Крайнев А.Ф. Пространственные механизмы параллельной структуры. М.: Наука, 1991, – 96 с.

9. C. Collins, and G. Long, "On the duality of twist/wrench in serial and parallel chain robot manipulators," Proc. IEEE Int. Conf. Robotics Autom., Nagoya, 1995, pp. 526-531.

10. C. Collins, Singularity analysis and design of parallel manipulators, Ph.D. Thesis, Dept. Mech. Eng., Univ. ofCalif., Irvine, 1997.

11. L. W. Tsai, The Jacobian analysis of a parallel manipulator using reciprocal screws, Proceedings of the 6th International Symposium on Recent Advances in Robot Kinematics, Salzburg, Austria, 1998.

12. L-W. Tsai. Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators (1999). Springer. ISBN-10: 0471325937.

13. J.K. Davidson, K.H. Hunt: Robots and Screw Theory: Applications of Kinematics and Statics to Robotics (Oxford Univ Press, Oxford 2004).

14. A.J. Sommese. The Numerical Solution of Systems of Polynomials: Arising in Engineering And Science (2005). Springer. ISBN-10: 9812561846.

15.M.J. DelSignore, A Screw-Theoretic Framework for Musculoskeletal System Modeling and Analysis, M.S. Thesis, State University of New York at Buffalo, Buffalo, 2005.

16. Glazunov V. Twists of Movements of Parallel Mechanisms Inside Their Singularities. MechanismandMachineTheory. 2006. T. 41. № 10. C. 1185-1195.

17. X. Kong, Cl. Gosselin. Type Synthesis of Parallel Mechanisms (Springer Tracts in Advance-dRobotics) (2008). Springer. ISBN-10: 0849397022.

18. G. Gogu. Structural Synthesis of Parallel Robots. (Solid Mechanics and Its Applications) (2008).Springer. ISBN-10: 0313311900.

19. В.А. Глазунов, С.Д. Костерева, П.О. Данилин, А.Б. Ласточкин. Применение винтового исчисления в современной теории механизмов. Вестник научно-технического развития, №6(84), 2010 г.

20. F. Tahmasebi,L.W. Tsai,Jacobian and stiffness analysis of a novel class of six-DOF parallel minimanipulators, ASME Des. Eng. Division, 47 (1992) 95–102.

21. P. Blanchet, H. Lipkin. New geometric properties for modeled planar vibration. Proceedings of DETC'97 1997 ASME Design Engineering Technical Conferences September 14-17, 1997, Sacramento, California.

22. X. Kong, C. Gosselin,"Type Synthesis of 3-DOF Translational Parallel Manipulators Based on Screw Theory", Journal of Mechanical Design, Vol. 126, pp. 82 -126 January 2004

23. Ceccarelli M., "Fundamentals of Mechanics of Robotic Manipulation", Kluwer,Dordrecht, 2004.

24. Ceccarelli M., "Problems and Procedures for Kinematic Design of Manipulators", Keynote Lecture, Proceedings of Eight National Conference on the Design of Mechanisms and Machines, Taiwan, 2005, pp.c-n.

25. X. Kong, C. Gosselin, "Type synthesis of 4-DOF SP-equivalent parallel manipulators: A virtual chain approach", Mechanism and Machine Theory vol. 41, pp. 1306–1319, 2006

26. M. J. Delsignore, V. N. Krovi.Screw-theoretic analysis models for felid jaw mechanisms.Mechanism and

machine theory 43 (2008), p. 147–159.
27. J. P. Merlet (2006). Parallel Robots (Solid Mechanics and Its Applications). Springer. ISBN-10: 1402041322.
28. J.-P. Merlet, Jacobian, manipulability, condition number, and accuracy of parallel robots, ASME J. Mech. Des., 128(1) (2006) , p. 199–206.
29. В.А. Смирнов, В.Б. Федоров. Использование кватернионов при математическом моделировании механизмов с параллельными кинематическими цепями // Вестник ЮУрГУ, Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2008, № 10, С. 23-29.
30. V. Glazunov, Design of decoupled parallel manipulators by means of the theory of screws, Mech. Mach. Theory (2009), doi:10.1016/j.mechmachtheory.2009.09.003
31. Хейло С.В., Глазунов В.А., Во Динь Тунг. Решение задачи о скоростях и особых положениях сферического манипулятора параллельной структуры. // Машиностроение и инженерное образование. 2011. № 1. С. 18–22.
32. Глазунов В.А., Хейло С.В., Ширинкин М.А., Ларюшкин П.А., Ковальчук А.В. Манипулятор параллельной структуры с четырьмя степенями свободы. Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4-2. С. 92-93.
33. Хейло С.В. Решение задачи о скоростях манипулятора с тремя степенями свободы с применением теории винтов.Проблемы машиностроения и автоматизации. 2011. № 1. С. 77-80.
34. Ломовцева Е.И., Челноков Ю.Н. Применение бикватернионов в кинематике стэндфордского робота-манипулятора // Сб. науч. тр. Механика. Математика, Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2012. С. 123-126.
35. Кун С., Госселин К. Структурный синтез параллельных механизмов / Пер. с англ. д.т.н. JI.A. Рыбак, к.т.н. А.В. Чичварина под ред. д.т.н. А.В. Синева. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. - 276 с. - ISBN 978-5-9221-1396-0.
36. Глазунов В.А., Аракелян В., Брно С., Зашоян Г.В. Скоростные и силовые критерии близости к сингулярностям манипуляторов параллельной структуры. Проблемы машиностроения и надежности машин. №3, 2012. С. 10-17.
37. Хейло С.В., Глазунов В.А., Кулемкин Ю.В., Эфрос В.Л. Анализ ускорений и нелинейных колебаний сферического механизма параллельной структуры. Проблемы машиностроения и надежности машин. №3, 2013. С. 9-17.
38. Carbonari, L., Battistelli, M., Callegari, M., and Palpacelli, M.-C.: Dynamic modeling of a 3-CPU parallel robot via screw theory, Mech. Sci., 4, 185-197, doi:10.5194/ms-4-185-2013, 2013.
39. Доронин Ф.А. К вопросу об определении положения мгновенной оси вращения. Бюллетень результатов научных исследований: электронный научный журнал. - СПб.: ПГУПС, 2013. - Вып. 3(8). - С. 23-35.
40. Доронин Ф.А.Силовой анализ некоторых пространственных конструкций и механизмов с помощью пакета Mathcad. Электрон.статья (1 файл 361Кб) Теория механизмов и машин. 2014. Т. 12. № 23. С. 59-69.
41. Каганов Ю.Т., Хейло С.В., Глазунов В.А.Параллельные механизмы - новое направление в машиноведении. Теоретические и прикладные аспекты современной науки. 2014. № 2-1. С. 52-56.
42. Е. И. Ломовцева,Ю. Н. Челноков.Дуальные матричные и бикватернионные методы решения прямой и обратной задач кинематики роботов-манипуляторов на примере стэндфордского манипулятора. Изв. Сарат. ун-та. Нов.сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 1. С. 88-94.
43. Кинематика. Матричное изложение. Часть 1: учебное пособие / В.С. Доев, Ф.А. Доронин, Б.А. Ярцев. – СПб.: Петербургский гос. ун-т путей сообщения, 2007. – 87 с.
44. Кинематика. Матричное изложение. Часть 2: учебное пособие / В.С. Доев, Ф.А. Доронин.– СПб.: Петербургский гос. ун-т путей сообщения, 2009. – 77 с.

DOI 10.5862/TMM.27.3

Article history: Received 05.08.2015
Received in revised form 17.08.2015
Accepted 22.10.2015

RESEARCH OF KINEMATICS OF THE SPATIAL MECHANISM OF PARALLEL STRUC-TURE IN THE ENVIRONMENT OF MATHCAD

F.A. Doronin

Petersburg State Transport University;
9 Moskovsky pr. Sankt-Petersburg RUSSIA 190031.

eng

The brief review of the literature connected with studying of the movement of the mechanisms of parallel structure (MPS) is provided and the decision in a matrix form of direct and inverse problems of kinematics of spatial MPS in the environment of Mathcad is consid-ered.

Key words: mechanisms of parallel structure, matrix method, direct and inverse problems of kinematics

REFERENCES

1. Gough, V.E. Contribution to discussion of papers on research in Automobile Stability, Control and Tire performance, Proc. Auto Div. Inst. Mech. Eng., pages 392—394, 1956—1957.
2. D. Stewart, A Platform with Six Degrees of Freedom, Proc. Inst. Mech. Eng., 1, 15, 1965
3. K.H. Hunt: Kinematic Geometry of Mechanisms (Clarendon, Oxford 1978).
4. K.H. Hunt. Kinematic structures of parallel manipulators with actuation. ASME, Engineering, 1983, vol. 105, No. 4, pp. 201-210.
5. Mohammed M., Duffy J. A Direct Determination of the Instantaneous Kinematics of Fully Parallel Robot Manipulators. / ASME J. Mech., Trans., Autom. Des., 1985, V. 107(2): p.
6. J. P. Merlet, "Singular configurations of parallel manipulators and Grassmann geometry," Int. J. Robotics Research, Vol. 8, No. 5, 1989, pp. 45-56.
7. Gosselin C.M., Angeles J., Singularity Analysis of Closed Loop Kinematic Chains, IEEE Trans. on Robotics and Automation, No 6(3), 1990 pp. 281-290.
8. Glazunov V.A., Kaliskor A.Sh., Krainev A.F. Spatial parallel mechanisms. M.: Nauka, 1991, 96 p.
9. C. Collins and G. Long, "On the duality of twist/wrench in serial and parallel chain robot manipulators," Proc. IEEE Int. Conf. Robotics Autom., Nagoya, 1995, pp. 526-531.
10. C. Collins. Singularity analysis and design of parallel manipulators, Ph.D. Thesis, Dept. Mech. Eng., Univ. of Calif., Irvine, 1997.
11. L. W. Tsai, The Jacobian analysis of a parallel manipulator using reciprocal screws, Proceedings of the 6th International Symposium on Recent Advances in Robot Kinematics, Salzburg, Austria, 1998.
12. L-W. Tsai. Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators (1999). Springer. ISBN-10: 0471325937.
13. J.K. Davidson, K.H. Hunt: Robots and Screw Theory: Applications of Kinematics and Statics to Robotics (Oxford Univ Press, Oxford 2004).
14. A.J. Sommese. The Numerical Solution of Systems of Polynomials: Arising in Engineering And Science (2005). Springer. ISBN-10: 9812561846.
15. M.J. DelSignore, A Screw-Theoretic Framework for Musculoskeletal System Modeling and Analysis, M.S. Thesis, State University of New York at Buffalo, Buffalo, 2005.
16. Glazunov V.A. Twists of Movements of Parallel Mechanisms Inside Their Singularities. Mechanism and Machine Theory. 2006. T. 41. № 10. C. 1185-1195.
17. X. Kong, Cl. Gosselin. Type Synthesis of Parallel Mechanisms (Springer Tracts in Advanced Robotics) (2008). Springer. ISBN-10: 0849397022.
18. G. Gogu. Structural Synthesis of Parallel Robots. (Solid Mechanics and Its Applications) (2008). Springer. ISBN-10: 0313311900.
19. V.A. Glazunov, S.D. Kostereva, P.O. Danilin, A.B. Lastochkin. Application of screw calculus in the modern theory of mechanisms. Bulletin of scientific-technical development, No. 6(84), 2010
20. F. Tahmasebi, L.W. Tsai, Jacobian and stiffness analysis of a novel class of six-DOF parallel minimanipulators, ASME Des. Eng. Division, 47 (1992) 95–102.

21. P. Blanchet, H. Lipkin. New geometric properties for modeled planar vibration. Proceedings of DETC'97 1997 ASME Design Engineering Technical Conferences September 14-17, 1997, Sacramento, California.
22. X. Kong, C. Gosselin,"Type Synthesis of 3-DOF Translational Parallel Manipulators Based on Screw Theory", Journal of Mechanical Design, Vol. 126, pp. 82 -126 January 2004
23. Ceccarelli M. "Fundamentals of Mechanics of Robotic Manipulation", Kluwer, Dordrecht, 2004.
24. Ceccarelli M. "Problems and Procedures for Kinematic Design of Manipulators", Keynote Lecture, Proceedings of Eight National Conference on the Design of Mechanisms and Machines, Taiwan, 2005, pp.c-n.
25. X. Kong, C. Gosselin, "Type synthesis of 4-DOF SP-equivalent parallel manipulators: A virtual chain approach", Mechanism and Machine Theory vol. 41, pp. 1306–1319, 2006
26. M.J. Delsignore, V.N. Krovi. Screw-theoretic analysis models for felid jaw mechanisms. Mechanism and machine theory 43 (2008), p. 147–159.
27. J. P. Merlet (2006). Parallel Robots (Solid Mechanics and Its Applications). Springer. ISBN-10: 1402041322.
28. J.-P. Merlet, Jacobian, manipulability, condition number, and accuracy of parallel robots, ASME J. Mech. Des., 128(1) (2006) , p. 199–206.
29. V.A. Smirnov, V.B. Fedorov. The use of quaternions in mathematical modeling of mechanisms with parallel kinematic chains // Bulletin of the South Ural state University, Chelyabinsk: publishing house of the SUSU, 2008, No. 10, Pp. 23-29.
30. V. Glazunov, Design of decoupled parallel manipulators by means of the theory of screws, Mech. Mach. Theory (2009), doi:10.1016/j.mechmachtheory.2009.09.003
31. Heylo S.V., Glazunov V.A., Vo Dinh Tung. The solution of the problem of speeds and special provisions spherical parallel manipulator structure. // Mechanical industry and engineering education. 2011. No. 1. P. 18-22.
32. Glazunov V.A., Heylo S.V., Shirinkin M.A., lariushkin P.A., Kovalchuk A.V. parallel structure Manipulator with four degrees of freedom. Bulletin of the Nizhny Novgorod University. N. I. Lobachevsky. 2011. No. 4-2. P. 92-93.
33. Heylo S.V. Solution of the problem of the velocity of the manipulator with three degrees of freedom using the theory of screws. Problems of mechanical engineering and automation. 2011. No. 1. S. 77-80.
34. Lomovtseva I.E., Chelnokov Ju.N. The application of this in the kinematics of the Stanford manipulator, in proc. scientific. Tr. Mechanics. Mathematics, Saratov: Publishing house of Sarat. University, 2012. S. 123 to 126.
35. Kuhn S., Gosselin C. Structural synthesis of parallel mechanisms / TRANS. angl. D. JI.A. Rybak, Ph. D. A. V. Tshitshvarin under the editorship of D. A. V. Sinev. - M.: FIZMATLIT, 2012. - 276 p. - ISBN 978-5-9221-1396-0.
36. Glazunov V.A., Arakelyan V., Brno S., Zashoyan G.V. Speed and power criteria of closeness to singularities of parallel manipulators patterns. Problems of mechanical engineering and reliability of machines. No. 3, 2012. P. 10-17.
37. Heylo S.V., Glazunov V.A., Kulemkin Y.V., Efros V.L. Analysis of accelerations and nonlinear oscillations of a spherical parallel mechanism structure. Problems of mechanical engineering and reliability of machines. No. 3, 2013. P. 9-17.
38. Carbonari L., Battistelli M., Callegari M., and Palpacelli M.-C.: Dynamic modeling of a 3-CPU parallel robot via screw theory, Mech. Sci., 4, 185-197, doi:10.5194/ms-4-185-2013, 2013.
39. Doronin F. A. To the question about the determination of the position of the instantaneous axis of rotation. Bulletin of research results: electronic scientific journal. - SPb.: PSTU, 2013. - Vol. 3(8). - S. 23-35.
40. Doronin F. A. Power analysis of some spatial structures and mechanisms with the help of Mathcad. Electron. article (1 file KB) Theory of mechanisms and machines. 2014. Vol. 12. No. 23. P. 59-69.
41. Hagan J.T., Heylo S.V., Glazunov V.A. Parallel mechanisms - a new direction in engineering. Theoretical and applied aspects of modern science. 2014. No. 2-1. P. 52-56.
42. I.E. Lomovtseva, Ju. N. Chelnokov. Dual matrix and biquaternion methods for solving direct and inverse problems of kinematics of robotic manipulators on the example of the Stanford manipulator. Izv. Sarat. Univ. New. ser. Ser. Math. Mechanics. Informatics. 2014. Vol. 14, vol. 1. P. 88-94.
43. The kinematics. Matrix presentation. Part 1: tutorial / V.S. Doev, F.A. Doronin, B.A. Yartsev. – SPb.: Petersburg state University of means of communication, 2007. – 87 c.
44. The kinematics. Matrix presentation. Part 2: textbook / V.S. Doev, F.A. Doronin. – SPb.: Petersburg state University of means of communication, 2009. – 77 c.