

УДК 621.01:534.1
DOI 10.5862/TMM.25.1

Поступила в редакцию 16.01.2015
Принята к печати 24.03.2015



К ПРОБЛЕМЕ КВАЗИСТАЦИОНАРНОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЦИКЛОВЫХ МЕХАНИЗМОВ

И.И. Вульфсон

Заслуженный деятель науки РФ, доктор технических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной механики Санкт-Петербургского государственного университета технологии и дизайна.

При анализе колебаний в цикловых механизмах широко применяется линеаризация нелинейной функции положения в окрестности программного движения, что позволяет практически без ущерба для точности расчётов трансформировать нелинейные связи в нестационарные и воспользоваться принципом суперпозиции. При этом, однако, возможны нежелательные динамические эффекты, свойственные реономным системам. Подавление этих эффектов обычно требует повышения уровня диссипации, что не всегда осуществимо. В статье исследован новый способ реализации условий квазистационарности, при котором собственные частоты сохраняют постоянное или мало меняющееся значение на протяжении всего кинематического цикла. Эффективность данного способа показана на примере приводов, образующих колебательные системы решётчатой структуры. Получены скорректированные условия динамической устойчивости при учёте квазистационарности.

Ключевые слова: цикловые механизмы, динамика машин, колебания в цикловых механизмах

1. Вводные замечания

В колебательных системах цикловых механизмов кинематические характеристики являются не только источником возмущений, но и формируют нестационарные динамические связи, которые могут привести к нарушению динамической устойчивости. Наиболее известным примером подобного проявления нестационарных связей является параметрический резонанс, при котором на определённых частотных диапазонах система приобретает способность накапливать энергию. Однако в машинах с цикловыми механизмами обычно имеет место медленное изменение параметров. При этом реализуемый частотный диапазон параметрического возбуждения существенно удалён от наиболее опасного главного параметрического резонанса, а параметрические резонансы высших порядков оказываются подавленными даже при малых диссипативных силах. В практике это нередко приводит к ложному выводу, что влиянием нестационарных связей можно пренебречь.

Одной из возможных причин подобных заблуждений является традиционное представ-

ление об источниках возбуждения свободных колебаний, согласно которому эти колебания возникают лишь из-за начальных условий и относительно быстро затухают за счёт диссипативных сил. При этом не принимаются во внимание так называемые сопровождающие колебания. Этот термин был впервые использован И.М. Бабаковым [1] для случая, когда возбуждаемые колебания происходят с собственной частотой, но, в отличие от свободных колебаний амплитуда, этих колебаний зависит не от начальных условий, а от нарушений непрерывности частного решения и её производной. В цикловых механизмах такие нарушения чаще всего возникают при кинематическом возбуждении согласно заданному закону движения ведомого звена, причём не только при $t = 0$, но и на протяжении всего кинематического цикла. Таким образом, сопровождающие колебания в общем случае нельзя считать быстро затухающими.

Особую роль сопровождающие колебания приобретают в системах с переменными параметрами. С этой проблемой приходится сталкиваться

при решении современных динамических задач цикловых механизмов, т.е. механизмов с нелинейной функцией положения $\Pi(\varphi)$. При линеаризации этой функции в окрестности программного движения в системе возникают нестационарные связи вида: $\Pi(\varphi_* + q) \approx \Pi(\varphi_*) + \Pi'(\varphi_*)q$, где $\varphi_* = \omega t$, $\Pi' = d\Pi / d\varphi$ – первая передаточная функция механизма (аналог скорости), q – динамическая ошибка, возникающая при колебаниях. Нестационарные связи могут быть важным источником повышения виброактивности в цикловых механизмах. В частности, в этом случае эффективный коэффициент диссипации существенно снижается и даже может стать отрицательным, что, вопреки традиционным представлениям, приводит к увеличению амплитуд колебаний. Условия подавления этого эффекта могут быть квалифицированы как условия квазистационарности [2–8]

2. Математическое описание сопровождающих колебаний

Сначала рассмотрим систему с одной степенью свободы и постоянными параметрами, описываемую дифференциальным уравнением $\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = W(t)$. (1)

Разделим ось времени на участки, в пределах которых функция $W(t)$ непрерывна и дифференцируема. Тогда, для участка $i + 1$

$$q_i = e^{-n(t-t_i)} [C_{1i} \cos k(t-t_i) + C_{2i} \sin k(t-t_i)] + Y_{i+1}(t) \quad (t > t_i). \quad (2)$$

Частное решение $Y_{i+1}(t)$ определяется формулой Дюамеля

$$Y_{i+1}(t) = \frac{1}{k} \int_{t_i}^t W(u) \exp[-n(t-u)] \sin k(t-u) du. \quad (3)$$

В формуле (3) слагаемые, описывающие сопровождающие колебания, в явном виде отсутствуют и выявляются только после процедуры интегрирования. Это приводит при решении задач динамического анализа и синтеза к очевидным затруднениям, для устранения которых в работах [2–8] была использована процедура последовательного интегрирования по частям.

$$Y_{i+1}^* \approx \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} (-1)^{0,5(m-1)} w_m(t), \quad (4)$$

где $w_m = \frac{1}{k^{m+1}} \frac{d^{m-1}W}{dt^{m-1}}$; Y_{i+1}^* новая форма частного решения, в которой полностью исключены

сопровождающие колебания.

При отсутствии разрывов непрерывности функции положения и первой передаточной функции механизма имеем

$$q_i = D_i \exp[-n(t-t_i)] \sin[k(t-t_i) + \alpha_i] + Y_{i+1}^*. \quad (5)$$

Здесь $D_i = \sqrt{C_{1i}^2 + C_{2i}^2}$; $\cos \alpha_i = C_{2i} / D_i$;

$$C_{1i} = - \sum_{m=1, 3, \dots}^{\infty} (-1)^{0,5(m-1)} \Delta w_{im};$$

$$C_{2i} = - \sum_{m=2, 4, \dots}^{\infty} (-1)^{0,5m-1} \Delta w_{im};$$

$$\Delta w_{im} = w_m(t_i + 0) - w_m(t_i - 0).$$

При установившемся режиме ($t \rightarrow \infty$)

$$D_i \rightarrow D_i^* = \chi D_i,$$

$$\chi = 1 / \sqrt{1 - 2e^{-9N} \cos 2\pi N + e^{-29N}}, \quad (6)$$

где $N = k / \omega$; \mathfrak{D} – логарифмический декремент; ω – угловая скорость входного звена.

Согласно формуле (5) при постоянных параметрах важным свойством сопровождающих колебаний является их затухающий характер на каждом участке возбуждения. Далее рассмотрим системы с переменными параметрами, где это свойство может быть нарушено.

Дифференциальное уравнение системы с медленно меняющимися коэффициентами имеет вид $a(t)\ddot{q} + b(t)\dot{q} + c(t)q = Q(t)$. (7)

Введём безразмерное время $\Phi(t) = \int_0^t k dt$, где

$k(t) = \sqrt{c(t) / a(t)}$ – переменная «собственная» частота, и новую переменную

$$y = q \sqrt{a(t)k(t) / [a(0)k(0)]}. \quad (8)$$

В новых координатах (8) принимает вид дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами [2, 4, 5, 7, 8].

$$\frac{d^2y}{d\Phi^2} + 2\delta_0 \frac{dy}{d\Phi} + (1 + \delta_0^2)y = L(\Phi). \quad (9)$$

Здесь $\delta_0 = \mathfrak{D} / (2\pi)$ – диссипативный коэффициент; $L = \sqrt{k(t) / k(0)} Q(t) / c(t)$.

Таким образом, задача сведена к случаю, рассмотренному выше. Возвращаясь к исходной координате, решение может быть представлено для участка $i + 1$ в виде

$$q_i = D_i \exp[-\delta_0 \int_{t_i}^t k(\xi) d\xi] \sqrt{\frac{a(t_i)k(t_i)}{a(t)k(t)}} \sin \left[\int_{t_i}^t k(\xi) d\xi + \alpha_i \right] + \frac{1}{\sqrt{k(t)}} \int_{t_i}^t \frac{W(u)}{\sqrt{k(u)}} \exp \left[-\delta \int_u^t (\xi) d\xi \right] \sin \left[\int_u^t k(\xi) d\xi \right] du, \quad (10)$$

где $W = Q/a$; $\delta = \delta_0 + \delta_g$;
 $\delta_g(\varphi) = -0,5a(\varphi)^{-1}p(\varphi)^{-1}a'(\varphi)$.

Зависимость (10) соответствует ВКБ-приближению первого порядка [11]. Это решение является частным случаем, полученным на базе метода условного осциллятора, использование которого не лимитируется медленным изменением параметров [2–10]. Применяя приведенную выше процедуру, получаем частное решение в форме ряда, аналогичного формуле (4), и следующие приближённые зависимости:

$$Y^* \approx \frac{W}{k^2} + \frac{4\dot{W}\dot{k}}{k^5} - \frac{\ddot{W}}{k^4}; \quad \dot{Y}^* \approx \frac{\dot{W}}{k^2} - \frac{2W\dot{k}}{k^3} + \frac{4\ddot{W}\dot{k}}{k^5}.$$

Если динамическая модель имеет H степеней свободы, то система уравнений в матричной форме может быть представлена как

$$\mathbf{a}(\varphi)\mathbf{q}'' + \tilde{\mathbf{b}}(\varphi)\mathbf{q}' + \tilde{\mathbf{c}}(\varphi)\mathbf{q} = \tilde{\mathbf{Q}}(\varphi). \quad (11)$$

Здесь в целях удобства анализа осуществлён переход к «безразмерному времени» $\varphi = \omega t$. При этом $(\cdot)' = d/d\varphi$, $\mathbf{q}' = \dot{\mathbf{q}}/\omega$ и $\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b}/\omega$, $\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c}/\omega^2$, $\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}/\omega^2$ (в дальнейшем будут использованы эти нормированные значения). Некоторые затруднения могут возникнуть при определении матрицы $\mathbf{b}(\varphi)$. Дело в том, что при позиционных силах сопротивления, собственных механизмах, диссипация имеет частотно независимый характер и определяется на базе экспериментальных данных, полученных при моногармонических колебаниях. Поэтому для этих сил, равно, как и для гироскопических составляющих, приходится использовать процедуру приведения к определённой форме колебаний. При этом мы располагаем диагональной матрицей приведенных коэффициентов \mathbf{b}^* , на базе которой определяем матрицу \mathbf{b} (подробнее см. [7, 8, 12,13])

$$\mathbf{b} = (\boldsymbol{\beta}^T)^{-1} \mathbf{b}^* (\boldsymbol{\beta})^{-1}. \quad (12)$$

Здесь $\boldsymbol{\beta}$ матрица коэффициентов форм колебаний.

Таким образом, для определения \mathbf{b}^* и $\boldsymbol{\beta}$ требуется предварительный частотный и модальный анализ, что нетрудно осуществить, принимая во внимание, что при медленном изменении параметров «собственные» частоты и нестационарные формы колебаний могут быть получены как собственные значения и собственные векторы матрицы $\Gamma(\varphi) = \mathbf{a}(\varphi)^{-1}\mathbf{c}(\varphi)$, т.е. при $\mathbf{b} \equiv 0$.

Существенным дополнительным источником

периодического возбуждения колебаний нередко являются соударения при переключке в зазорах и динамические эффекты, связанные с псевдоударом [7, 8, 14–19].

3. Условия квазистационарности

Система уравнений (11) в квазинормальных координатах $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\beta}^{-1}\mathbf{q}$ имеет вид

$$a_r^*(\varphi)\eta_r'' + b_r^*(\varphi)\eta_r' + c_r^*(\varphi)\eta_r = M_r(\varphi) \quad (r = 1, \dots, H), \quad (13)$$

где a_r^*, c_r^* – соответствующие элементы диагональных матриц $\mathbf{a}^* = \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{a} \boldsymbol{\beta}$, $\mathbf{c}^* = \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{c} \boldsymbol{\beta}$.

Тогда

$$\eta_r'' + 2n_r(\varphi)\eta_r' + p_r^2(\varphi)\eta_r = W_r \quad (r = 1, \dots, H), \quad (14)$$

где $n_r(\varphi) = \delta_r(\varphi)p_r(\varphi)$;

$$\delta_r(\varphi) = \delta_{0r} + \delta_{gr} = \delta_{0r} - 0,5a_r(\varphi)^{-1} \times \\ \times p_r(\varphi)^{-1} a_r'(\varphi). \quad (15)$$

Здесь и ниже использовано безразмерное нормированное значение частоты (см. выше); $p_r = \sqrt{(\tilde{c}_r^*/a_r^*) - n_r^2 - n_r'} \approx \sqrt{\tilde{c}_r^*/a_r^*}$.

Переход к квазинормальным координатам при медленном изменении параметров соответствует описанию кинетической энергии с точностью до первого порядка малости [20].

Как показано в работах [2–10], в системах с переменными параметрами даже при их медленном изменении возможны локальные нарушения условий динамической устойчивости на конечном отрезке времени. В этом случае, несмотря на то, что зона нарастания колебаний чередуется с зоной затухания, уровень возникающей амплитудной модуляции может быть весьма значительным и существенно повысить виброактивность всей системы.

Отметим, что знак n_r (или δ_r) не позволяет ещё судить о характере изменения амплитуды A_r сопровождающих колебаний. Действительно, при $n_r = 0$ на уровне ВКБ-приближения первого порядка имеем

$$A_r(\varphi) = A_r(0) \sqrt{p_r(\varphi_i)/p_r(\varphi)}. \quad (16)$$

С учётом (16) условие, при которых для формы колебаний r обеспечивается затухающий характер возбуждаемых сопровождающих колебаний, принимает вид

$$\delta_{0r} > \delta_r^*(\varphi), \quad (17)$$

где $\delta_{0r} = \vartheta_{0r} / (2\pi) = \psi_{0r} / (4\pi)$ – приведенные к форме r значения логарифмического декремента и коэффициента рассеяния, $\delta_r^*(\varphi) = \delta_{gr}(\varphi) + \delta_{pr}(\varphi)$. Здесь функция

$$\delta_{pr}(\varphi) = 0,5 p_r(\varphi)^{-2} \frac{dp_r(\varphi)}{d\varphi} \tag{18}$$

отражает влияние переменности «собственной» частоты колебаний. Максимальное значение функции δ_r^* соответствует критическому уровню возбуждения.

Неравенство (17) можно трактовать как условие динамической устойчивости на произвольном отрезке времени, соблюдение которого обеспечивает затухающий характер возбуждаемых свободных колебаний [2–10]. Это неравенство совпадает с результатами, полученными на основании прямого метода Ляпунова, устанавливающего достаточное условие динамической устойчивости [2, 7, 8]. Можно показать, что при медленно меняющихся параметрах оно является также и необходимым.

На основании (10), (15), (16), (18) с учётом диссипации, гироскопических сил и переменности «собственных» частот амплитуда сопровождающих колебаний для формы r , возбуждённых при $t = t_i$ ($\varphi = \varphi_i$), описывается зависимостью

$$A_{ri}(\varphi) = A_r(\varphi_i) \exp \left[- \int_{\varphi_i}^{\varphi} (\delta_{0r} - \delta_r^*) p_r d\varphi \right] = A_r(\varphi_i) \exp \left[- \int_{\varphi_i}^{\varphi} \delta_{0r} p_r d\varphi \right] \sqrt{\frac{a_r^*(\varphi_i) p_r(\varphi_i)}{a_r^*(\varphi) p_r(\varphi)}} \tag{19}$$

4. Динамический синтез квазистационарных режимов

Следует отметить, что «управлять» диссипативными характеристиками практически достаточно сложно, поскольку установка специальных регулируемых демпферов нежелательно из-за сопутствующего роста энергетических потерь и соответствующего уменьшения коэффициента полезного действия. К тому же требуемый уровень диссипации δ_{0r} может оказаться весьма высоким, а иногда даже нереализуемым. Поэтому представляет интерес поиск других способов выполнения условий квазистационарности. Сначала проанализируем зависимость условий квазистационарности от инерционных и квазиупругих коэффициентов.

В таблице приведены соответствующие зави-

симости, полученные в квазикоординатах для формы r в трёх случаях. (Для упрощения записи в формулах опущены обозначения номера формы и звездочки, отвечающей квазикоординатам.) Следует подчеркнуть, что только в первом случае при $p = \text{const}$ приведенные условия инвариантны относительно выбора обобщённых координат. Остановимся на этом случае подробнее. Во-первых, возникает естественное сомнение в принципиальной возможности реализации постоянства частоты свободных колебаний при нестационарных связях. Как показал анализ, в динамических системах цепной структуры осуществить малые изменения «собственной» частоты удаётся лишь посредством малой пульсации инерционных и упругих характеристик. В то же время, это оказалось принципиально возможным применительно к цикловым системам, которые схематизированы в виде динамических решёток. Анализ решётчатых конструкций, образующих регулярные колебательные системы посвящён ряд работ Л.Я Банах [21, 22]

Таблица 1

Характеристика уровня возбуждения

| Условие | Колебания δ_* | Виброускорения δ_* |
|--------------------|---|--|
| $p = \text{const}$ | $-0,5 a' / \sqrt{a\tilde{c}}$ | $-0,5 a' / \sqrt{a\tilde{c}}$ |
| $c = \text{const}$ | $-0,25 a' / \sqrt{a\tilde{c}}$ | $-2,5 a' / \sqrt{a\tilde{c}}$ |
| $a = \text{const}$ | $-0,25 a^{0,5} \tilde{c}^{-1,5} \tilde{c}'$ | $0,75 a^{0,5} \tilde{c}^{-1,5} \tilde{c}'$ |

Подобные системы встречаются во многих современных машинах текстильной, полиграфической, лёгкой и ряда других отраслей промышленности, когда технологические операции выполняются длинными исполнительными органами, совершающими заданное программное движение [4, 5, 7, 8, 23–32]. Для обеспечения достаточной жёсткости системы исполнительные органы в таких машинах приводятся в движение многократно сдублированными цикловыми механизмами. При этом колебательная система имеет структуру решётки, в которой каждый повторяющийся элемент образует замкнутый

контур, отображающий инерционные и упруго-диссипативные характеристики главного вала, исполнительного органа и циклового механизма. Для данного класса систем ввиду идентичности цикловых механизмов критический уровень возбуждения на основании (15), (17), (18) также может быть определён следующим образом:

$$\delta_r^* = 0,5 \Pi^n \left(\nu \frac{\partial p_r}{\partial \Pi'} p_r^{-2} - \frac{\partial a_r}{\partial \Pi'} p_r^{-1} \right), \quad (19)$$

где $\nu = -1$ соответствует амплитуде колебаний, $\nu = 1$ – виброскоростей, $\nu = 3$ – виброускорений.

На рис. 1, а показаны два механизма, связывающие главный вал с исполнительным органом, схематизированные в виде динамической модели, приведенной на рис. 1, б.

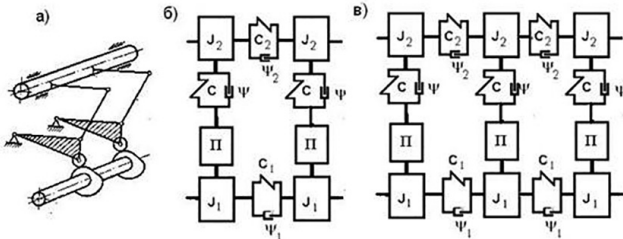


Рис. 1. Схема и динамические модели привода решётчатой структуры

На рис. 1, а показаны два механизма, связывающие главный вал с исполнительным органом, схематизированные в виде динамической модели, приведенной на рис. 1, б. Примем следующие условные обозначения: J_j – момент инерции; C_j – коэффициенты жёсткости; Ψ_j – коэффициенты рассеяния; Π – оператор, соответствующий функции положения циклового механизма $\Phi_{2j} = \Pi_j(\Phi_{1j})$, где Φ_{1j}, Φ_{2j} – углы поворота входного и выходного звеньев; j – номер механизма. В общем случае эта модель отображает один из модулей динамической модели кольцевой структуры многосекционного привода.

В целях большей наглядности физических предпосылок для реализации условий квазистационарности сначала определим частотные характеристики одиночного модуля ($j_{\max} = 2$) в предположении жёсткого привода ($\Phi_{11} = \omega t$), жёсткого механизма ($c = \infty$) и отсутствии связей с другими подсистемами. В этом случае динамическая модель трансформируется в систему, состоящую из вала с приведенным коэффициентом

том крутильной жёсткости $c_* = c_1 + c_2 \Pi'^2(\Phi_*)$ и исполнительного органа с приведенным моментом инерции $J_* = J_1 + J_2 \Pi'^2(\Phi_*)$. Эта система имеет две степени свободы, причём одна из обобщённых координат является циклической. Тогда единственная частота свободных колебаний («собственная» частота) определяется как

$$p(\Phi_*) = \sqrt{c_*(\Phi_*) / J_*(\Phi_*)} = k_1 \sqrt{[1 + \zeta \Pi'^2(\Phi_*)] / [1 + \mu \Pi'^2(\Phi_*)]}, \quad (20)$$

где $k_1 = \sqrt{c_1 / J_1}$; $\zeta = c_2 / c_1$; $\mu = J_2 / J_1$.

Из-за переменности функции $\Pi'(\Phi_*)$ «собственная» частота p в общем случае также оказывается переменной, однако при $\zeta = \mu$ имеем $p = \text{const}$. Легко заметить, что условие $\mu = \zeta$, совпадает с равенством парциальных частот $\sqrt{c_1 / J_1} = \sqrt{c_2 / J_2}$. Для другого предельного случая при относительно малой динамической жёсткости привода получаем качественно аналогичный результат $p \approx k_1 \sqrt{2} = \text{const}$.

Если система состоит из двух секций ($j_{\max} = 3$), то при $\mu = \zeta$, $c \rightarrow \infty$ колебательная система имеет две степени свободы и следующие частотные характеристики:

$$p_1 = k_1 \sqrt{0,5(3 - \sqrt{5})}; \quad p_2 = k_1 \sqrt{0,5(3 + \sqrt{5})}. \quad (21)$$

Этому случаю при $k = 10$, $\Pi = x_0(1 - \cos \Phi_*)$, $x_0 = 1$ на графиках функций $p_r(\Phi_*)$ (рис. 2, а) соответствуют линии 1 (здесь и ниже использованы безразмерные нормированные значения частот, равные их отношению к угловой скорости ω).

Коэффициенты формы также остаются постоянными на всём протяжении кинематического цикла:

$$\beta = 0,5(\sqrt{5} - 1); \quad \beta = -0,5(\sqrt{5} + 1).$$

Нарушение условия $\mu = \zeta$ иллюстрируется на графиках кривыми 2 ($\mu = 1, \zeta = 2$) и 3 ($\mu = 4, \zeta = 1$).

Представляет интерес, сохранится ли выявленное свойство и для моделей более сложной структуры. Методы динамического расчёта и анализа таких моделей, основанные на теории регулярных систем, подробно рассмотрены в монографии [7]. На рис. 2, б приведены ряд графиков $p_r(\Phi_*)$ для модели, которая по сравнению с рассмотренной выше представляет собой динамическую решётку, состоящую из шести секций, в которой учтены упругие характеристики механизмов. При этом приняты следующие исходные данные:

$J_1 = 0,05 \text{ кгм}^2$; $A_1 = A_0 = 2 \cdot 10^3 \text{ Нм}$; $x_0 = 0,75$; $\mu = \zeta = 0,5$; $J_{\max} = 12$. (Здесь, в дополнение к ранее принятым условным обозначениям принято c_0 – приведенный коэффициент жесткости привода). Графики показывают, что и в этом случае с достаточной точностью можно добиться постоянство частот свободных колебаний при переменных параметрах системы. Кривая p_* , отвечающая функции $p_* = \sqrt{c[J_2^{-1} + J_1^{-1}\Pi'^2(\varphi_*)]}$, разделяет спектр частот на две области. Ниже этой кривой форма колебаний описывается тригонометрическими функциями, а выше – комбинацией тригонометрических и гиперболических функций [7, 8].

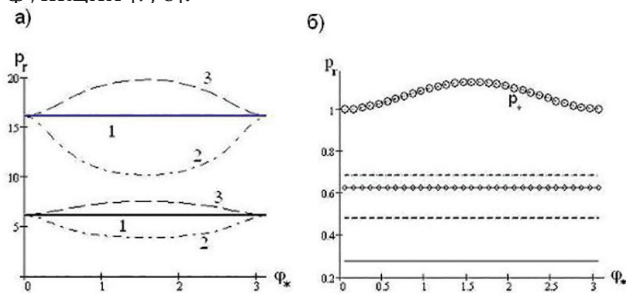


Рис.2. К анализу «собственных» частот при условиях квазистационарности

Из вышеизложенного не следует, что в общем случае возбуждаемые колебания будут затухающими (см. формулу (19) и таблицу). Однако, в то же время, выполнение условия (17), обеспечивающего квазистационарность системы при $p_r \approx \text{const}$ значительно облегчается. Кроме того, это условие не ужесточается для виброускорений (см. таблицу), что весьма существенно при динамическом синтезе цикловых механизмов.

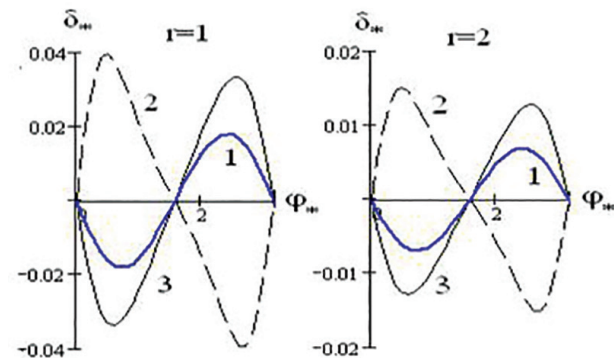


Рис. 3. Графики $\delta_*(\varphi_*)$

На рис. 3. для двухсекционной динамической модели (см. рис. 1, б) приведены графики $\delta_*(\varphi_*)$,

построенные обеих форм колебаний ($r = 1; 2$) при одинаковых инерционных характеристиках ($\mu = 0,25$). Кривые 1 соответствуют критическому уровню возбуждения при $\zeta = 0,25$, что соответствует условию $p_r \approx \text{const}$. Эти условия для колебаний и виброускорений совпадают (см. таблицу). Кривые 2 и 3 отвечают повышенной жёсткости исполнительного органа ($\zeta = 1$). В этом случае критический уровень возбуждения для колебаний (сплошная линия) и виброускорений (штриховая линия) различаются по знаку и величине, причём по абсолютному значению примерно в два раза превосходят результат, полученный при условиях квазистационарности.

При сохранении $p_r \approx \text{const}$ с ростом переменной составляющей инерционных характеристик, как и следовало ожидать, увеличивается критический уровень возбуждения. Для анализа характера затухания возбуждаемых колебаний воспользуемся зависимостью (19). Примем $\varphi_i = 0$ и $A_r(0) = 1$. Тогда функция $A_r(\varphi)$ численно совпадает с безразмерной характеристикой, описывающей отношение текущего значения амплитуды к амплитуде при исходном возмущении. На графиках $A_r(\varphi)$ (рис. 4) наглядно видно, что при диссипации ($\delta_{0r} = 0,02$), несмотря на в целом затухающий характер колебаний, внутри кинематического цикла при повышенных значениях $\mu = \zeta$ имеют место локальные нарушения условий динамической устойчивости. Это связано с тем, что работа гироскопических сил обращается в нуль только на периоде $\varphi_* = 2\pi$ [33].

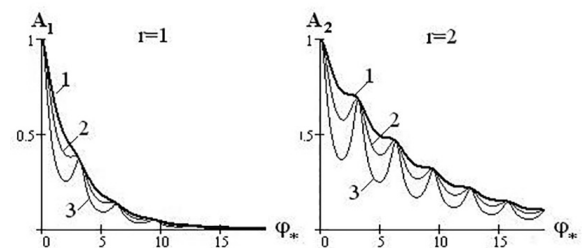


Рис. 4. Графики $A_r(\varphi)$: кривая 1 – $\mu = \zeta = 0,25$; кривая 2 – $\mu = \zeta = 1$; кривая 3 – $\mu = \zeta = 4$

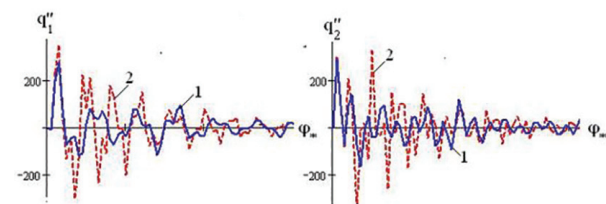


Рис. 5. Графики $q_r''(\varphi_*)$

При $\mu = \zeta$ в силу постоянства «собственной» частоты графики амплитуд виброускорений и виброускорений отличаются от приведенных на *рис. 4* только масштабным фактором. При нарушении этого равенства вид графиков искажается за счёт множителя, пропорционального соответственно первой и второй степени функции $p_r(\varphi_*)$.

После обратного перехода от квазиинормальных координат к исходным обобщённым координатам $\mathbf{q} = \mathbf{B}\boldsymbol{\eta}$ можно проверить эффективность выполнения условий квазистационарности. В качестве иллюстрации на *рис. 5* для рассмотренной выше модели представлены графики изменения виброускорений q_1'' и q_2'' от одиночного возмущения при $\delta_{0r} = 0,02$ и $\mu = \zeta = 4$ (кривая 1), $\mu = 1, \zeta = 4$ (кривая 2). Анализ графиков показывает, что в окрестности зоны большой связанности между главным валом и исполнительным органом ($\varphi_* \approx \pi/2$) использование условий квазистационарности даёт существенный динамический эффект. Однако следует отметить, что при определённых условиях может возникнуть дополнитель-

ное возбуждение, связанное с трансформацией форм колебаний [7, 9]. При этом происходит перераспределение энергии между формами колебаний, которое иногда создаёт иллюзию появления внешнего источника [33].

Относительно последних двух случаев, приведенных в таблице, может показаться сомнительным их практическая ценность из-за зависимости от выбора обобщённых координат. Между тем, именно выбор обобщённых координат во многом определяет целевую направленность при динамическом синтезе. Чаще всего в качестве обобщённых координат выбирают либо абсолютную динамическую ошибку, т.е. отклонение абсолютной координаты от координаты программного движения, либо деформацию упругого элемента. В первом случае минимизация этой координаты свойственна задаче повышения точности позиционирования исполнительного органа, а во втором – снижению динамических нагрузок привода. Более подробный анализ этих случаев требует отдельного рассмотрения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабаков И.М. Теория колебаний. – М.: Наука, 1965.- 560 с.
2. Вульфсон И.И. Динамические расчеты цикловых механизмов. - Л.: Машино–строение, 1976. - 328 с.
3. Вульфсон И.И., Коловский М.З. Нелинейные задачи динамика машин.– Л.:Машиностроение. 1968. -284 с.
4. Вульфсон И.И. Колебания машин с механизмами циклового действия. – Л.: Машиностроение. 1990. - 309 с.
5. Vulfson, I.I. Vibroactivity of branched and ring structured mechanical drives.– New York, London: Hemisphere Publ. Corp. 1988.- 99 p.
6. Dresig, H., Vulfson I.I. Dynamik der Mechanismen.–Wien, New York :Springer, 1989.- 328 S.
7. Вульфсон И.И. Динамика цикловых машин.– СПб.: Политехника. 2013. 425 с.
8. Vulfson, I.I. Dynamics of cyclic machines. (Expanded edition of the monograph [7] translation). – Heidelberg, New York, Dordrecht, London: Springer, 2015. 410 p.
9. Вульфсон И.И. К проблеме динамической устойчивости многосекционных технологических машин в окрестности программного движения исполнительных органов. – Теория механизмов и машин. 2006. №2(8). С. 7-12
10. Вульфсон И.И. О колебаниях систем с параметрами, зависящими от времени. – Прикладная математика и механика.1969. Т.33, №2. С. 331–337.
11. Фреман Н., Фреман П. У. ВКБ-приближение. – М.: Мир, 1967. - 168 с.
12. Вульфсон И.И. Учёт нелинейных диссипативных сил при ограниченной исходной информации. – Теория механизмов и машин. 2003. №1(3). С. 70-77.

13. **Vulfson, I.I., Vulfson M.N.** Refined equivalent linearization of the positional dissipative forces in oscillations with several frequencies. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2004. No 4. Pp. 17-23.
14. **Вульфсон И.И.** Критерии для анализа псевдодара при сохранении кинематического контакта в зазорах шарниров. – *Теория механизмов и машин*. 2007. №1(5). С. 22-37.
15. **Вульфсон И.И.** Оптимизация параметров колебательных систем цикловых механизмов с учетом зазоров.– *Проблемы машиностроения и надёжности машин*.1994. №3. С.62–66.
16. **Dubowsky S.** On predicting the dynamic effects of clearances in planar mechanisms.– *ASME Journal of Engineering for Industry*. 1974.Vol.93, №1. Pp. 317–323.
17. **Wu, C.L.S., Earles S.W.E.** – A determination of contact loss at a bearing of a linkage mechanism. *ASME Journal of Engineering for Industry*. 1977 .Vol. 99, №2.Pp. 375-380.
18. **Haines R.S.** A theory of contact loss at revolute joints with clearance.– *J. Mech.Eng. Sci.* Vol. 22, No3, 1992, Pp.295–303.
19. **Vulfson J.I.** Analytical investigation of the vibrations of mechanisms caused by parametric impulses. *Mech. Mach. Theory*. V.10, No.4. 1973. Pp. 305–313.
20. **Митропольский Ю.А.** – Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. М.: Наука, 1964. – 432 с.
21. **Банах Л.Я.** Исследование динамики регулярных и квазирегулярных систем с помощью теории групп.–*Колебания сложных упругих систем*. М.: Наука, 1981. С. 5-11
22. **Banakh, L., Kempner M.**(2010): *Vibrations of mechanical systems with regular structure*. Springer, New-York, London. 249 p.
23. **Бидерман В.Л.** Теория механических колебаний. – М.: Высш. шк., 1980, 408 с.
24. **Вульфсон И.И.** Снижение нагрузок в многопоточных приводах машин текстильной и легкой промышленности.– *Изв. вузов. Технология текстильной промышленности*. 1993. №5. С. 78-81.
25. **Dresig H. und Vulfson J.I.** Maßnahmen und Beispiele zur dynamischer Probleme bei Verarbeitungsmaschinen.– *Konstruktion*. 1990. H. 11. S. 369-376.
26. **Vulfson, I.I.** A modification of the generalized dynamic model of multiply regular vibratory systems of cyclic machines. – *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2011. V.40, No. 5. Pp. 3-10.
27. **Vulfson J.I.** Zur Methodik der Untersuchung erzwungener Schwingungen in einem verzweigten Mechanismensystem regulärer Struktur .– *Techn. Mech*. 1982. B.3. №1. S. 44-47.
28. **Zur Modellierung von Schwingungssystemen, die periodisch Getriebe Enthalten.** *Technische Mechanik*. 1982. No.3. S. 39-43.
29. **Vulfson, I.I.** On decomposition of regular vibration systems of cycle machines incorporating identical ring-structured modules. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. – 2007. V.36,No. 4. Pp 15-22.
30. **Vulfson, I.I.** Some nonlinear effects of machine dynamics. *Journal of Vibroengineering*. – 2008. V.10. ,No.4. Pp. 442–450.
31. **Вульфсон И.И.** Регулярные крутильные колебательные системы с сосредоточенными параметрами приводов цикловых машин разветвленно-кольцевой структуры.– *Теория механизмов и машин*. 2008. Т.6. №1 (11). С. 48–54.
32. **Vulfson, I.I.** Phase synchronism and space localization of vibrations of cyclic machine tips with symmetrical dynamic structure, *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*.– 2011. V.40, No.1. Pp. 12-18.
33. **Вульфсон И.И.** Перенос энергии в колебательных системах приводов с цикловыми механизмами. – *Проблемы машиностроения и надёжности машин*. 2013. №4. С. 3-11.

DOI 10.5862/TMM.25.1

*Article history: Received 16.01.2015
Accepted 24.03.2015*

ON THE PROBLEM OF DYNAMIC CHARACTERISTICS QUASI-STATIONARITY IN CYCLIC MECHANISMS

I.I. Vulfson*St. Petersburg State University of Technology and Design: ul. Bol'shaya Morskaya, 18, St.Petersburg 191186 Russia*

eng

In the analysis of vibrations in the cyclic mechanisms widely used the linearization of nonlinear position function in the vicinity of the programmed motion. In this case, almost without compromising the accuracy of calculations, the nonlinear relationships are transformed into time-dependent, which allows to use the principle of superposition. But this accompanied by undesirable dynamic effects inherent in rheonomic systems. The article explores the conditions of quasi-stationarity, when the natural frequencies remain constant or varies a little value throughout the kinematic cycle. It has been established that these conditions can be implemented in drives, which forms lattice structured oscillatory systems. The corrected conditions of the dynamic stability by taking into account the quasi-stationarity are obtained.

Keywords: cyclic mechanisms, dynamics of machines, vibrations in the cyclic mechanisms

REFERENCES

1. Babakov I.M. Teoriya kolebanij. – M.: Nauka, 1965.- 560 s.
2. Vulfson I. I. Dinamicheskie raschety ciklovyyh mekhanizmov. - L.: Mashinostroenie, 1976. - 328 s.
3. Vulfson I.I., Kolovskij M.Z. Nelinejnye zadachi dinamika mashin.– L.:Mashinostroenie. 1968. -284 s.
4. Vulfson I.I. Kolebaniya mashin s mekhanizmami ciklovogo dejstviya. – L.: Mashinostroenie. 1990. - 309 s.
5. Vulfson I.I. Vibroactivity of branched and ring structured mechanical drives.– New York, London: Hemisphere Publ. Corp. 1988.- 99 p.
6. Dresig, H., Vulfson I.I. Dynamik der Mechanismen.–Wien, New York :Springer, 1989.- 328 S.
7. Vulfson I.I. Dinamika ciklovyyh mashin.– SPb.: Politekhnik. 2013. 425 s.
8. Vulfson, I.I. Dynamics of cyclic machines. (Expanded edition of the monograph [7] translation). – Heidelberg, New York, Dordrecht, London: Springer, 2015. 410 p.
9. Vulfson I.I. K probleme dinamicheskoy ustojchivosti mnogosekcionnyh tekhnologicheskikh mashin v okrestnosti programmnoy dvizheniya ispolnitel'nyh organov. – Teoriya mekhanizmov i mashin. 2006. №2(8). S. 7-12
10. Vulfson I.I. O kolebaniyah sistem s parametrami, zavisyashchimi ot vremeni. – Prikladnaya matematika i mekhanika.1969. T.33, №2. S. 331–337.
11. Freman N., Freman P. U. VKB - priblizhenie. – M.: Mir, 1967. - 168 s.
12. Vulfson I.I. Uchyot nelinejnyh dissipativnyh sil pri ogranichennoj iskhodnoj informacii. – Teoriya mekhanizmov i mashin. 2003. №1(3). S. 70-77.
13. Vulfson, I.I., Vulfson M.N. Refined equivalent linearization of the positional dissipative forces in oscillations with several frequencies. Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2004. No 4. Pp. 17-23.

14. **Vulfson I.I.** Kriterii dlya analiza psevdoudara pri sohraneni kinematcheskogo kontakta v zazorah sharnirov. – Teoriya mekhanizmov i mashin. 2007. №1(5). S. 22-37.
15. **Vulfson I.I.** Optimizaciya parametrov kolebatel'nyh sistem ciklovyh mekhanizmov s uchetom zazorov.– Problemy mashinostroeniya i nadyozhnosti mashin.1994. №3. S.62–66.
16. **Dubowsky S.** On predicting the dynamic effects of clearances in planar mechanisms.– ASME Journal of Engineering for Industry. 1974.Vol.93, №1. Pp. 317–323.
17. **Wu, C.L.S., Earles S.W.E.** – A determination of contact loss at a bearing of a linkage mechanism. ASME Journal of Engineering for Industry. 1977 .Vol. 99, №2.Pp. 375-380.
18. **Haines R.S.** A theory of contact loss at revolute joints with clearance.– J. Mech.Eng. Sci. Vol. 22, No3, 1992, Pp.295–303.
19. **Vulfson J. I.** Analytical investigation of the vibrations of mechanisms caused by parametric impulses. Mech. Mach. Theory. V.10, No.4. 1973. Pp. 305–313.
20. **Mitropolskij YU. A.** – Problemy asimptoticheskoy teorii nestacionarnykh kolebanij. M.: Nauka, 1964. – 432 s.
21. **Banah L. YA.** Issledovanie dinamiki regulyarnykh i kvaziregulyarnykh sistem s pomoshch'yu teorii grupp.– Kolebaniya slozhnykh uprugih sistem. M.: Nauka, 1981. S. 5-11
22. **Banakh, L., Kempner M.** (2010): Vibrations of mechanical systems with regular structure. Springer, New-York, London. 249 p.
23. **Biderman V.L.** Teoriya mekhanicheskikh kolebanij. – M.: Vyssh. shk., 1980, 408 s.
24. **Vulfson I. I.** Snizhenie nagruzok v mnogopotochnykh privodakh mashin tekstil'noj i legkoj promyshlennosti.– Izv. vuzov. Tekhnologiya tekstil'noj promyshlennosti. 1993. №5. S. 78-81.
25. **Dresig H. und Vulfson J.I.** Manahmen und Beispiele zur dynamischer Probleme bei Verarbeitungs maschinen.– Konstruktion. 1990. H. 11. S. 369-376.
26. **Vulfson, I.I.** A modification of the generalized dynamic model of multiply regular vibratory systems of cyclic machines. – Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2011. V.40, No. 5. Pp. 3-10.
27. **Wulfson J. I.** Zur Methodik der Untersuchung erzwungener Schwingungen in einem verzweigten Mechanismensystem regulärer Struktur. – Techn. Mech. 1982. B.3. №1. S. 44-47.
28. **Rößler J.** Zur Modellierung von Schwingungssystemen, die periodisch Getriebe Enthalten. Technische Mechanik. 1982. No.3. S. 39-43.
29. **Vulfson, I.I.** On decomposition of regular vibration systems of cycle machines incorporating identical ring-structured modules. Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2007. V.36, No. 4. Pp 15-22.
30. **Vulfson, I.I.** Some nonlinear effects of machine dynamics. Journal of Vibroengineering. – 2008. V.10. ,No.4. Pp. 442–450.
31. **Vulfson I.I.** Regulyarnye krutil'nye kolebatel'nye sistemy s sosredotochennymi parametrami privodov ciklovyh mashin razvetvlenno-kol'cevoj struktury.– Teoriya mekhanizmov i mashin. 2008. T.6. №1 (11). C. 48–54.
32. **Vulfson, I.I.** Phase synchronism and space localization of vibrations of cyclic machine tips with symmetrical dynamic structure, Journal of Machinery Manufacture and Reliability.– 2011. V.40, No.1. Pp. 12-18.
33. **Vulfson I.I.** Perenos ehnergii v kolebatel'nyh sistemah privodov s ciklovymi mekhanizmami. – Problemy mashinostroeniya i nadyozhnosti mashin. 2013. №4. S. 3-11.