

О ЛОКАЛИЗАЦИИ ДИНАМИЧЕСКОГО ГАШЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ И ПО ЧАСТОТЕ

Явление динамического гашения хорошо известно: присоединяя к конструкции осциллятор (гаситель), можно подавить колебания в точке его установки. Объясняется это тем, что кинематического возбуждения колебаний гасителя на его собственной (парциальной) частоте не должно быть, поскольку резонанс возможен только на собственных частотах всей конструкции. О теории и практической реализации динамического гашения написано во многих книгах [1-6].

Но эффект гашения локализован по частоте – частота воздействия должна совпадать с парциальной частотой гасителя. Он локализован и в пространстве – вне места установки колебаний остаются и могут даже быть больше, чем без гасителя. Эти обстоятельства, ограничивающие эффективность гашения, и рассматриваются в данной работе.

О гашении в дискретных системах общего вида

Рассмотрим вынужденные гармонические колебания конструкции с матрицами жесткости и инерции C, M , столбцом u (из n обобщенных координат) и вынуждающей силой F с частотой ω :

$$Cu + M\ddot{u} = F(t) \Rightarrow (C - \omega^2 M)u = F \Rightarrow u = (C - \omega^2 M)^{-1} F. \quad (1)$$

Второе уравнение (система линейных алгебраических уравнений, СЛАУ) – для амплитуд. Матрица этой системы определяет динамическую жесткость конструкции. Решения СЛАУ через определители являются отношениями двух полиномов от ω^2 – степени n и $n-1$. Знаменатель равен нулю на собственных частотах – это резонансы. Числители же обращаются в ноль на антирезонансах. Именно антирезонанс имеет место при динамическом гашении [1-6].

Резонансные частоты не зависят от воздействия, на них как бы исчезает динамическая жесткость. Но антирезонансные частоты, очевидно, не обладают такой универсальностью: они зависят от нагрузки и от рассматриваемой обобщенной координаты. Эта зависимость распространяется и на эффект гашения.

Однако можно развить эти представления. Опишем присоединение гасителя следующими уравнениями:

$$Cu + \sigma v - \omega^2 (Mu + \mu v) = F, \quad \sigma^T u + \sigma_0 v - \omega^2 (\mu^T u + \mu_0 v) = f. \quad (2)$$

Здесь появились дополнительные величины: обобщенная координата гасителя v (амплитуда), жесткости σ (столбец) и σ_0 (скаляр), инерционные параметры μ, μ_0 и сила f . Исключая координату гасителя, получим

$$\left[C - \omega^2 M - \frac{(\sigma - \omega^2 \mu)(\sigma - \omega^2 \mu)^T}{\sigma_0 - \omega^2 \mu_0} \right] u = F - \frac{(\sigma - \omega^2 \mu) f}{\sigma_0 - \omega^2 \mu_0}. \quad (3)$$

Нагрузка f на гаситель обычно отсутствует. Матрица в левой части определяет изменившуюся динамическую жесткость системы. Она бесконечно возрастает на частичной частоте гасителя $\omega_0 = \sqrt{c_0/\mu_0}$. В общем уравнении (3) не просматривается зависимость эффекта гашения от рассматриваемой обобщенной координаты, как и пространственная локализация. Необходим анализ конкретных моделей.

Колебания консольной балки с гасителем

Рассмотрим вынужденные колебания консольной балки с распределенной по всей длине нагрузкой (рис. 1).

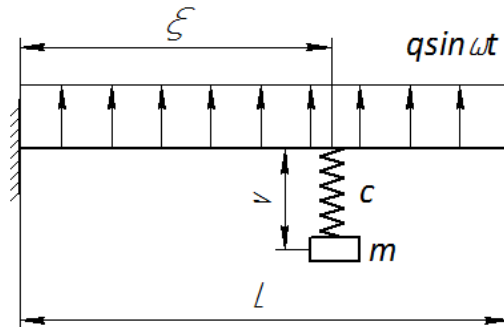


Рис. 1. Балка с распределенной нагрузкой и гасителем

Постановка задачи для амплитуд перерезывающей силы Q , изгибающего момента M , угла поворота θ и прогиба u такова [7]:

$$\begin{aligned} Q' + \hat{q} &= 0, \quad M' + Q = 0, \quad \theta' = AM, \quad u' = \theta; \\ \hat{q} &= \omega^2 \rho u + q(x) + F\delta(x - \xi); \quad u(0) = 0, \quad \theta(0) = 0, \quad Q(l) = 0, \quad M(l) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь A – изгибная податливость, ρ – погонная масса, ω – частота, q – заданная внешняя нагрузка, F – сила натяжения пружины гасителя, присоединенного к балке в точке ξ . Для гасителя имеем:

$$F = cv, \quad -m\omega^2(u + v) = -cv \Rightarrow F = c_d(\omega)u, \quad c_d(\omega) = \frac{m\omega^2}{1 - (\omega/\omega_0)^2}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}. \quad (5)$$

По отношению к балке гаситель играет роль пружины с жесткостью $-c_d(\omega)$. Эта жесткость стремится к бесконечности на частичной частоте ω_0 . На этой частоте точка крепления ξ становится неподвижной.

Поставленная краевая задача для амплитуд решается посредством *Mathcad* методом стрельбы с процедурой *sbsval-rkfixed* при произвольных зависимостях $A(x)$, $\rho(x)$, $q(x)$. Дельта-функцию аппроксимируем ступенчатой:

$$\delta(x) = \Phi(x) = \begin{cases} \varepsilon^{-1}, & |x| < \varepsilon/2 \\ 0, & |x| \geq \varepsilon/2 \end{cases}, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (6)$$

На рис. 2 показан результат расчета прогиба $u(x)$ для стальной балки квадратного сечения со стороной 0.05 м , длиной $l=2\text{ м}$ на частоте $\omega=30.0005\text{ с}^{-1}$ при нагрузке $q=500\text{ Н/м}$ и параметрах гасителя $\xi=1.35\text{ м}$, $m=1\text{ кг}$, $c=900\text{ Н/м}$. В аппроксимации (6) принято $\varepsilon=0.01$.

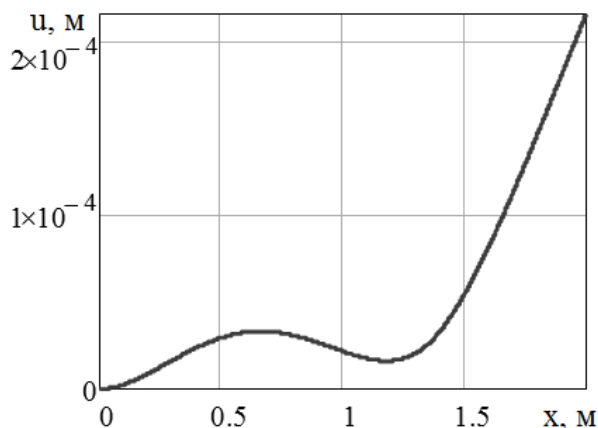


Рис. 2. Амплитуда прогиба балки с гасителем

Видно, что колебания в точке с гасителем погашены не полностью, хотя частоты ω и ω_0 очень близки и масса гасителя не мала. Это проявление вычислительных погрешностей.

Но рассмотрим другой способ решения задачи – вариационный. Постановка с ОДУ

$$\begin{aligned} (a(x)u'')'' &= q(x) + \omega^2 \rho(x)u + \delta(x - \xi)c_d(\omega)u; \\ u(0) &= 0, u'(0) = 0, u''(l) = 0, (au'')'(l) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

эквивалентна следующей вариационной:

$$\delta \mathcal{E} = \delta A = \int_0^l q \delta u dx, \quad \mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_0^l (au''^2 - \omega^2 \rho u^2) dx - c_d(\omega)u(\xi)^2 \quad (8)$$

Применим метод Ритца с аппроксимацией координатными функциями $\varphi_i(x)$ и варьируемыми параметрами α_i :

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i(x), \quad \varphi_i(0) = 0, \varphi_i'(0) = 0 \Rightarrow \mathcal{E} = \frac{1}{2} \alpha^T C \alpha, \quad C \alpha = p; \\ C_{ik} &= \int_0^l (a \varphi_i'' \varphi_k'' - \omega^2 \rho \varphi_i \varphi_k) dx - c_d(\omega) \varphi_i(\xi) \varphi_k(\xi), \quad p_i = \int_0^l q \varphi_i dx. \end{aligned} \quad (9)$$

Надо сформировать и решить подчеркнутую СЛАУ. В качестве координатных функций примем $\varphi_n(x) = x^{n+1}$ ($n=1, 2, \dots, N$).

На рис. 3 представлен результат расчета с 7-ю координатными функциями (для $\omega=30.0001$).

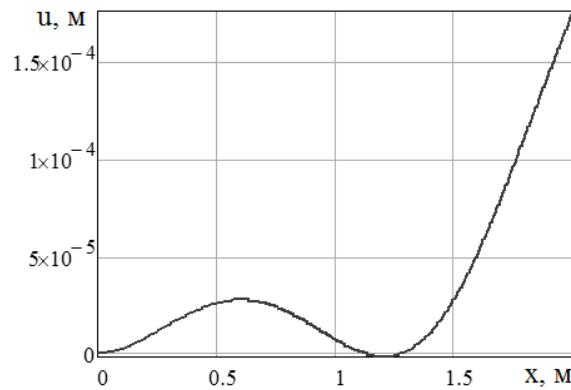


Рис. 3. Результаты метода Рунца

На графике прогиба видно, что динамическое гашение вполне реализовалось. Дискретная модель дала более достоверные результаты, чем непрерывная!

С вариационной методикой (9) нетрудно рассмотреть произвольный набор гасителей и оптимизировать их параметры для максимального эффекта гашения.

Нелинейный гаситель

Известно, что нелинейность упругой характеристики качественно меняет поведение системы; например, ограничиваются резонансные амплитуды. Рассмотрим влияние нелинейности на частотную локализацию эффекта гашения.

Обратимся к простейшей двухмассовой системе. В исходной системе с одной степенью свободы (без гасителя) имеем перемещение u и массу M_0 , жесткость пружины C_0 и нагрузку $P(t)$. Масса гасителя m , сила в нелинейной пружине f является функцией относительного перемещения v . Уравнения выражают 2-ой закон Ньютона:

$$M_0 \ddot{u} + C_0 u = P(t) + f(v), \quad m(\ddot{v} + \ddot{u}) + f(v) = 0. \quad (10)$$

Для вынужденных колебаний при нагрузке $P(t) = P \sin \omega t$ применим метод гармонической линеаризации, заменив нелинейную (нечетную) функцию линейной:

$$v \approx a \sin \varphi \quad (\varphi = \omega t), \quad f(v) \approx k(a)v, \quad k(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi. \quad (11)$$

Формально имеем линейную систему для амплитуд. Решаем ее:

$$u = \frac{P(k - \omega^2 m)}{\Delta}, \quad v = \frac{P\omega^2 m}{\Delta}, \quad \Delta = k[C_0 - \omega^2(M_0 + m)] - \omega^2 m(C_0 - \omega^2 M_0). \quad (12)$$

Но это еще не ответ; предстоит найти амплитуду a :

$$a = \frac{P\omega^2 m}{\left| k(a)[C_0 - \omega^2(M_0 + m)] - \omega^2 m(C_0 - \omega^2 M_0) \right|}. \quad (13)$$

Решив (численно), найдем амплитуду a .

Заметим, что при любом заданном значении a получается уравнение 4-ой степени для $\lambda \square \omega^2$:

$$a^2 \{k(a)[C_0 - \lambda(M_0 + m)] - \lambda m(C_0 - \lambda M_0)\}^2 - (P\lambda m)^2 \square \Pi(\lambda, a) = 0. \quad (14)$$

Mathcad позволяет находить сразу все корни полинома (процедуры *coeffs*, *polyroots*). Задав массив значений a , получим массивы значений λ или ω . Но сначала полезно построить графики для линейной системы, полагая, например, $c = f'(0)$. Для построения амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) вблизи парциальной частоты используем другой алгоритм. Решаем численно (процедура *Given-Find*) уравнение для амплитуды (13) при заданной частоте.

На рис. 4 представлены результаты трудоемких расчетов зависимости $a(\omega)$ при кубической нелинейности $f(v) = \alpha v + \beta v^3$ и следующих значениях параметров: $M_0 = 10, C_0 = 10^3, m = 0.5, P = 1, \alpha = 50, \beta = 5 \cdot 10^4$ (в системе СИ). Пунктиром показана АЧХ с линейным гасителем ($\beta = 0$). Нелинейность сглаживает правый пик АЧХ (рис. 4) и ограничивает амплитуду. Полное гашение наблюдается не на парциальной частоте, а на несколько большей.

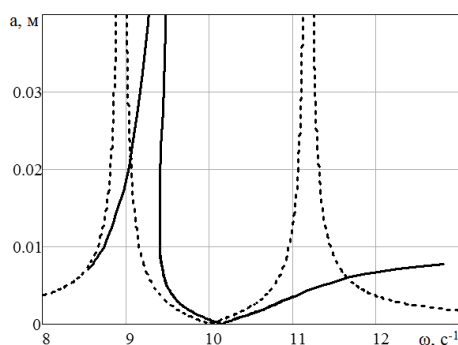


Рис. 4. АЧХ объекта виброзащиты. Нелинейный и линейный гасители

Нелинейность усложнила не только расчет, но и поведение системы в качественном отношении. Избавиться от частотной локализации не удастся.

Небоскреб с присоединенным гасителем

Эффективной иллюстрацией по теме данной работы является маятниковый гаситель на вершине небоскреба Тайбэй 101 (рис. 5).

Исходные уравнения для балки с распределенными параметрами составляются по методике Лагранжа:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k} + Q_k^* \quad (k = 0, \dots, n);$$

$$2T(q_k, \dot{q}_k) = \int_0^L \rho \dot{u}^2 dx + m(\dot{u}(L, t) + l\dot{q}_0)^2, \quad 2\Pi(q_k) = \int_0^L au''^2 dx + mglq_0^2, \quad (15)$$

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^n q_i(t) \varphi_i(x), \quad \varphi_i(0) = \varphi_i'(0) = 0; \quad Q_i^* = \int_0^L p(x, t) \varphi_i(x) dx.$$

Обозначено: $u(x,t)$ – прогиб балки, T, Π – кинетическая и потенциальная энергия, ρ, a, L – погонная масса, изгибная жесткость и длина балки, m, l – масса и длина гасителя. Погонная нагрузка $p(x,t)$ – от ветра; даже при постоянной скорости ветра возникает периодическая нагрузка из-за срыва вихрей. Координатные функции $\varphi_i(x) = x^{i+1}$. Обобщенные координаты q_i определяют прогиб балки, q_0 – угол отклонения маятника.

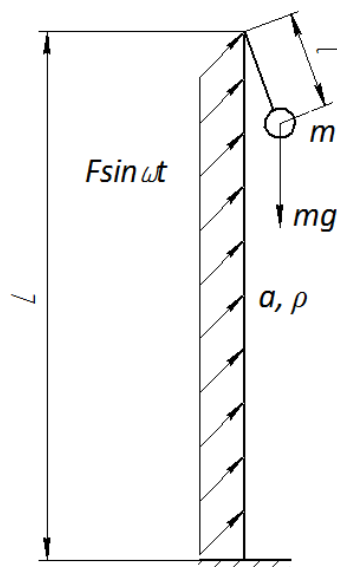


Рис. 5. Модель небоскреба

Получаем систему из $n+1$ дифференциальных уравнений, которая может быть решена с помощью *Mathcad* после приведения к нормальной форме.

Рассматривалась также более сложная модель с малым внутренним трением по Фойгту и нелинейностью у маятника.

Выяснено, что практически возможно уменьшить амплитуды колебаний от периодических сил более чем в 2,5 раза. При изменениях частоты вынуждающей силы от настроенного значения амплитуды увеличиваются незначительно (на 20%). Применение динамических гасителей колебаний в высотных сооружениях позволяет снизить необходимую жесткость конструкции при выполнении норм по амплитудам колебаний перекрытий верхних этажей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вибрации в технике. Справочник. Т. 6. Защита от вибрации и ударов. / Под ред. **К.В. Фролова**. – М.: Машиностроение, 1981. – 456 с.
2. Машиностроение. Энциклопедия. Динамика и прочность машин. Теория механизмов и машин. Т. 1-3. Кн. 1 / **К.С. Колесников, Д.А. Александров, В.К. Асташев** и др. М.: Машиностроение, 1994. – 534 с.
3. **Корнев Б.Г., Резников Л.М.** Динамические гасители колебаний: Теория и технические приложения. – М.: Наука, 1988. – 304 с.
4. **Пановко Я.Г., Губанова И.И.** Устойчивость и колебания упругих систем: Современные концепции, парадоксы и ошибки. – 4-е изд. – М.: Наука, 1987. – 352 с.
5. **Семенов Ю.А.** Механика. Теория механических колебаний. – СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2008. – 345 с.

6. Harris' shock and vibration handbook / **C.M. Harris, A.G. Piersol**. – 5th ed. – New York: McGraw-Hill, 2002. – 620 p.
7. **Елисеев В.В.** Механика деформируемого твердого тела. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2006. – 231 с.

REFERENCES

1. Vibracii v tehnike. Spravochnik. T. 6. Zashhita ot vibracii i udarov. / Pod red. **K.V. Frolova**. – М.: Mashinostroenie, 1981. – 456 p. (rus.)
2. Mashinostroenie. Enciklopediya. Dinamika i prochnost mashin. Teoriya mehanizmov i mashin. T. 1-3. Kn. 1 / **K.S. Kolesnikov, D.A. Aleksandrov, V.K. Astashev i dr.** М.: Mashinostroenie, 1994. – 534 p. (rus.)
3. **Korenev B.G., Reznikov L.M.** Dinamicheskie gasiteli kolebanij: Teoriya i tehicheskie prilozheniya. – М.: Nauka, 1988. – 304 p. (rus.)
4. **Panovko Ya.G., Gubanov I.I.** Ustojchivost i kolebaniya uprugih sistem: Sovremennye koncepcii, paradoksy i oshibki. – 4-e izd. – М.: Nauka, 1987. – 352 p. (rus.)
5. **Semenov Yu.A.** Mehanika. Teoriya mehanicheskikh kolebanij. – SPb.: Izd-vo SPbGPU, 2008. – 345 p. (rus.)
6. Harris' shock and vibration handbook / **C.M. Harris, A.G. Piersol**. – 5th ed. – New York: McGraw-Hill, 2002. – 620 p.
7. **Eliseev V.V.** Mehanika deformiruemogo tverdogo tela. – SPb.: Izd-vo Politexn. un-ta, 2006. – 231 p. (rus.)

*Поступила в редакцию 16.12.2013
После доработки 25.02.2014*