

СИЛОВОЙ АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ И МЕХАНИЗМОВ С ПОМОЩЬЮ ПАКЕТА MATHCAD

На страницах журнала регулярно рассматриваются вопросы, связанные с разными аспектами кинематического и силового анализа плоских механизмов [1-11]. В упомянутых работах авторы подчёркивают, что широко распространённые графоаналитические методы анализа во многом утратили свою актуальность, уступив место различным аналитическим методам с использованием компьютерных технологий. Для кинематического и динамического анализа механизмов часто используются разнообразные математические компьютерные программы (*Mathcad*, *Matlab*, *Maple*, *Mathematica* и др.). Большое количество публикаций в журнале [2-5,7,8,10] свидетельствует о значительной популярности пакета *Mathcad* при решении перечисленных задач.

В работах [3,4,5] приводятся примеры использования векторных операций, зашитых в *Mathcad*'е, для решения векторных уравнений при кинематическом и силовом анализе различных плоских механизмов.

В статье показан способ силового расчёта некоторой статически определимой шарнирно-стержневой пространственной системы с использованием среды *Mathcad*.

1. Определение опорных реакций пространственной конструкции

Рассмотрим равновесие сил, приложенных к системе, представленной на рис. 1. Жёсткая прямоугольная горизонтальная пластина поддерживается шестью стержнями 1-6, прикреплёнными к пластине и земле сферическими шарнирами. Известны размеры конструкции: $a=4$ м, $b=3$ м, $c=3$ м. Требуется определить усилия, возникающие в опорных стержнях от действия силы тяжести $G=400$ Н и горизонтальной силы $P=200$ Н, направленной вдоль прямой OA .

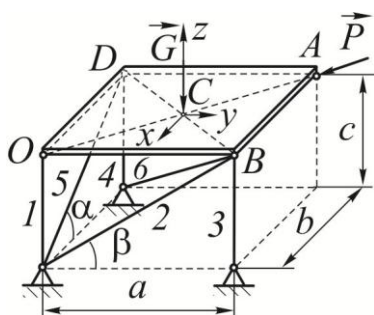


Рис. 1

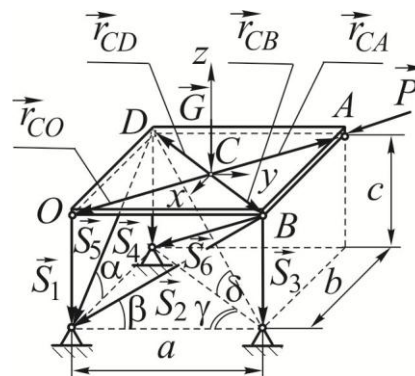


Рис. 2

Мысленно разрежем опорные стержни и покажем силы упругости S_1-S_6 , приложенные к пластине, причём все стержни считаем растянутыми (рис. 2). Выберем систему координатных осей $Sxyz$ и запишем условия равновесия системы сил, действующих на пластину.

Как известно, в случае равновесия произвольной пространственной системы сил её главный вектор и главный момент относительно произвольного полюса должны быть равны нулю. Примем за полюс центр масс C пластины и получим два векторных равенства:

$$\sum_{i=1}^n \vec{P}_i = \vec{0}; \quad \sum_{i=1}^n \vec{M}_{Ci} = \vec{0}.$$

В развёрнутой форме эти условия в данном случае принимают вид:

$$\begin{cases} \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3 + \vec{S}_4 + \vec{S}_5 + \vec{S}_6 + \vec{P} + \vec{G} = \vec{0}; \\ \vec{r}_{CO} \times \vec{S}_1 + \vec{r}_{CB} \times \vec{S}_2 + \vec{r}_{CB} \times \vec{S}_3 + \vec{r}_{CB} \times \vec{S}_6 + \vec{r}_{CD} \times \vec{S}_4 + \vec{r}_{CD} \times \vec{S}_5 + \vec{r}_{CA} \times \vec{P} = \vec{0}. \end{cases} \quad (1)$$

Решение системы уравнений (1) удобно провести в среде *Mathcad* путём использования блока *Given-Find*:

$$\begin{aligned} &\text{Given } S1(N1) + S2(N2) + S3(N3) + S4(N4) + S5(N5) + S6(N6) + P + G = 0; \\ & r_{CO} \times S1(N1) + r_{CB} \times S2(N2) + r_{CB} \times S3(N3) + r_{CB} \times S6(N6) + r_{CD} \times S4(N4) + \\ & + r_{CD} \times S5(N5) + r_{CA} \times P = 0; \\ & N := \text{Find}(N1, N2, N3, N4, N5, N6), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{где } S1(N1) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} N1; \quad S2(N2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos\beta \\ -\sin\beta \end{pmatrix} N2; \quad S3(N3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} N3; \quad S4(N4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} N4; \\ S5(N5) &= \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ 0 \\ -\sin\alpha \end{pmatrix} N5; \quad S6(N6) = \begin{pmatrix} -\cos\delta\sin\gamma \\ -\cos\delta\cos\gamma \\ -\sin\delta \end{pmatrix} N6; \quad r_{CO} = \begin{pmatrix} 0,5b \\ -0,5a \\ 0 \end{pmatrix}; \quad r_{CA} = \begin{pmatrix} -0,5b \\ 0,5a \\ 0 \end{pmatrix}; \\ r_{CB} &= \begin{pmatrix} 0,5b \\ 0,5a \\ 0 \end{pmatrix}; \quad r_{CD} = \begin{pmatrix} -0,5b \\ -0,5a \\ 0 \end{pmatrix}; \quad P = \begin{pmatrix} 200\sin\gamma \\ -200\cos\gamma \\ 0 \end{pmatrix}; \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -400 \end{pmatrix}; \quad N_i - \text{значения усилий в} \end{aligned}$$

опорных стержнях (знак плюс соответствует растянутому, а минус – сжатому стержням).

После решения системы уравнений получаем следующий результат:

$$N_1 = 0 \text{ Н}; \quad N_2 = -200 \text{ Н}; \quad N_3 = -80 \text{ Н}; \quad N_4 = -80 \text{ Н}; \quad N_5 = -169,7 \text{ Н}; \quad N_6 = 0 \text{ Н}.$$

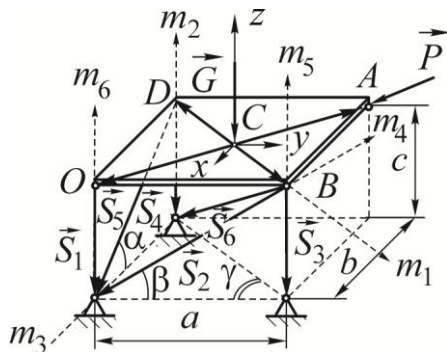


Рис. 3

Отметим одну особенность рассматриваемой конструкции. Каждое из неизвестных усилий в опорных стержнях можно определить независимо от других, составив только одно уравнение равновесия. Например, для определения усилия в стержне 4 достаточно составить уравнение моментов сил, действующих на пластину, относительно моментной оси m_4 (рис. 3). Это уравнение можно составить либо в алгебраической форме:

$$\sum M_{m4i} = 0; \quad P \cos\gamma \sin\beta \cdot b - G \frac{b}{2} \cos\beta - S_4 \cos\beta \cdot b = 0,$$

либо в матричном изображении:

$$\sum M_{m4i} = 0; P^T \cdot \hat{m}_4 \cdot r_{BA} + G^T \cdot \hat{m}_4 \cdot r_{BC} + S_4^T \cdot \hat{m}_4 \cdot r_{BD} = 0,$$

где $\hat{m}_4 = \begin{pmatrix} 0 & -\sin\beta & \cos\beta \\ \sin\beta & 0 & 0 \\ -\cos\beta & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – кососимметричная матрица орта наклонной оси m_4 ;

$r_{BA} = \begin{pmatrix} -b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $r_{BD} = \begin{pmatrix} -b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$; $r_{BC} = \begin{pmatrix} -0,5b \\ -0,5a \\ 0 \end{pmatrix}$ – матрицы-столбцы радиус-векторов точек при-

ложения сил.

Решая любое из этих двух уравнений, находим: $S_4 = -80 \text{ Н}$.

На рис. 3 показаны моментные оси m_1-m_3 , m_5-m_6 , которые можно использовать для составления уравнений равновесия (сумм моментов сил относительно указанных осей) при определении

усилий в опорных стержнях S_1-S_3 , S_5-S_6 .

В некоторых случаях закрепления пластины вместо уравнения моментов сил относительно какой-то оси следует составлять уравнение проекций всех сил на одну из осей координат.

Обратим внимание на то, что оси системы координат, применяемые при решении задачи, не обязательно являются ортогональными и могут быть скрещивающимися прямыми. При этом на выбор осей накладываются условия, перечисленные в работе [13].

2. Некоторые определения

Совокупность векторов, формально удовлетворяющую однократно продифференцированным по времени уравнениям стационарных геометрических связей, наложенных на механическую систему, назовём *псевдоскоростями* $\vec{\mathcal{V}}_i$ точек этой системы.

Возможными скоростями \vec{v}_i будем называть скорости точек системы, удовлетворяющие как уравнениям геометрических связей, так и всем совокупностям ограничений, возникающих при m -кратном дифференцировании уравнений связей ($m=1,2,\dots,\infty$).

Возможными перемещениями называются воображаемые бесконечно малые перемещения $\delta\vec{r}_i$, допускаемые наложенными на систему связями. Следуя Суслову [14], можем записать:

$$\delta\vec{r}_i = \vec{v}_i \cdot \Delta t,$$

где Δt – бесконечно малый промежуток времени.

Псевдоскорости и возможные скорости подчинены теореме о скоростях точек твёрдого тела. Так для псевдоскоростей будем иметь:

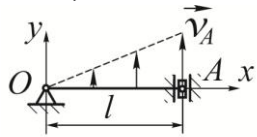
$$\vec{\mathcal{V}}_i = \vec{\mathcal{V}}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_{Oi},$$

где $\vec{\mathcal{V}}_i$ – псевдоскорость i -й точки тела; $\vec{\mathcal{V}}_O$ – псевдоскорость произвольного полюса O ; $\vec{\omega}$ – угловая псевдоскорость тела; \vec{r}_{Oi} – радиус-вектор, проведённый из полюса O в i -ю точку тела.

Механическая система называется *псевдоизменяемой*, если на её точки наложены связи, допускающие η_1 независимых ненулевых псевдоскоростей ($\eta_1 > 0$) и запрещающие возможные скорости точек.

Можно утверждать, что множество векторов возможных скоростей является подмножеством множества векторов псевдоскоростей точек системы. Кроме того, множество векторов псевдоскоростей точек не порождает множество возможных перемещений.

В качестве примера рассмотрим псевдоизменяемую систему, показанную на рис. 4. Связи, наложенные на систему, в рамках модели абсолютно твёрдого тела допускают рас-



пределение псевдоскоростей, изображённое на рис. 4, но система не может иметь ни возможных скоростей, ни возможных перемещений. В этом легко убедиться, написав уравнения связей:

$$s=0 \quad \eta_1=1 \quad \eta_2=0$$

$$x_A^2 + y_A^2 = l^2; \quad x_A = l.$$

Рис. 4

Продифференцировав эти равенства по времени, находим:

$$2x_A \dot{x}_A + 2y_A \dot{y}_A = 0; \quad \dot{x}_A = 0. \quad (2)$$

Отсюда получаем, что, так как $\dot{x}_A = 0$, то $y_A \dot{y}_A = 0$. Это возможно в двух случаях:

1. $y_A \neq 0$; $\dot{y}_A = 0$; условие $y_A \neq 0$ противоречит гипотезе абсолютно твёрдого тела (длина стержня OA оказывается не равной l);

2. $y_A = 0$; $\dot{y}_A \neq 0$; это означает, что связи не допускают возможных перемещений точки A , но допускают существование псевдоскорости этой точки $\mathcal{V}_A = \dot{y}_A$. При этом возможная скорость точки A не существует. Чтобы показать это, продифференцируем по времени уравнение (2):

$$\dot{x}_A^2 + x_A \ddot{x}_A + \dot{y}_A^2 + y_A \ddot{y}_A = 0; \quad \ddot{x}_A = 0.$$

Решая полученную систему уравнений, приходим к тому, что $\dot{y}_A = 0$ (это противоречит исходному предположению, что $\dot{y}_A \neq 0$), то есть скорость \dot{y}_A не удовлетворяет двукратно продифференцированным по времени уравнениям связей, наложенных на систему, и по определению не является возможной скоростью.

Если распределение псевдоскоростей точек системы полностью описывается совокупностью η_1 независимых обобщённых псевдоскоростей (линейных или угловых), будем говорить, что рассматриваемая система имеет η_1 степеней псевдосвободы l ранга.

Совокупность векторов, формально удовлетворяющую $(k+1)$ -кратно продифференцированным по времени уравнениям стационарных геометрических связей, наложенных на механическую систему, назовём псевдоускорениями k -го порядка $\vec{\mathcal{V}}_i^k$ точек этой системы ($k \geq 1$).

Псевдоускорения k -го порядка удовлетворяют условию:

$$\vec{\mathcal{V}}_i^{(k)} = D^{(k)} \vec{\mathcal{V}}_i, \quad (2)$$

где $D^{(k)}$ – оператор k -кратного дифференцирования по t .

При $k=1$ выражение (2) представляет собой теорему о псевдоускорениях первого порядка или просто псевдоускорениях точек твёрдого тела:

$$\dot{\mathcal{V}}_i = \dot{\mathcal{V}}_O + \dot{\bar{\epsilon}} \times \bar{r}_{O_i} + \dot{\bar{\omega}} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_{O_i}). \quad (3)$$

Здесь: $\dot{\mathcal{V}}_O$ – псевдоускорение полюса O ; $\dot{\bar{\epsilon}} = \dot{\bar{\omega}}$ – угловое псевдоускорение тела.

При $k=2$ выражение (2) есть не что иное, как теорема о псевдоускорениях второго порядка (псевдорывках) точек твёрдого тела:

$$\ddot{\mathcal{V}}_i = \ddot{\mathcal{V}}_O + \dot{\bar{\epsilon}} \times \bar{r}_{O_i} + 2\bar{\epsilon} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_{O_i}) + \bar{\omega} \times (\dot{\bar{\epsilon}} \times \bar{r}_{O_i}) + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_{O_i})), \quad (4)$$

где $\ddot{\mathcal{V}}_O$ – псевдорывок полюса O .

Если существует такая ненулевая совокупность векторов псевдоускорений первого порядка точек псевдоизменяемой механической системы, которая соответствует совокупности из η_2 независимых ненулевых обобщённых псевдоскоростей и не существует ненулевой совокупности псевдоускорений, которой соответствует совокупность из η_2+1 независимых ненулевых обобщённых псевдоскоростей, то псевдоизменяемая механическая система имеет η_2 степеней псевдосвободы 2 ранга.

Очевидно, что в псевдоизменяемых системах число степеней свободы $s=0$, а число степеней псевдосвободы $\eta_1 \geq 1$. Например, у системы, представленной на рис. 4, число степеней свободы равно нулю ($s=0$), число степеней псевдосвободы первого ранга равно единице ($\eta_1=1$), а число степеней псевдосвободы второго ранга равно нулю ($\eta_2=0$).

Аналогично можно дать определение механической системы, имеющей число степеней псевдосвободы k -го ранга.

В табл. 1 приведены схемы и введённые выше характеристики некоторых псевдоизменяемых систем.

Для псевдоизменяемых систем постановка задач статики абсолютно твёрдого тела об определении опорных реакций корректна в том и только в том случае, когда активные силы отвечают принципу Журдена для псевдоскоростей: сумма псевдомощностей всех активных сил на любой системе псевдоскоростей равна нулю (под псевдомощностью силы понимается скалярное произведение вектора силы на вектор псевдоскорости её точки приложения):

$$\sum_{i=1}^n \bar{P}_i \cdot \bar{\mathcal{V}}_i = \bar{0}.$$

Если активные силы не отвечают принципу Журдена для псевдоскоростей, то ни одна задача об изучении покоя псевдоизменяемой системы не может быть поставлена в рамках модели абсолютно твёрдого тела. Корректными оказываются только задачи динамики, сформулированные для заданного положения псевдоизменяемой системы.

3. О геометрической неизменяемости конструкций

В литературе представлены аналитические, геометрические и кинематические способы анализа геометрической неизменяемости плоских шарнирно-стержневых конструкций [12]. Однако, для пространственных конструкций встречаются только формулы, позволяющие подсчитать число степеней свободы кинематической цепи, а способы геометрического и кинематического анализов таких конструкций описаны недостаточно подробно.

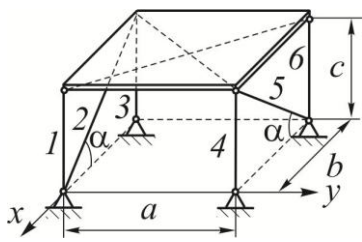


Рис. 5

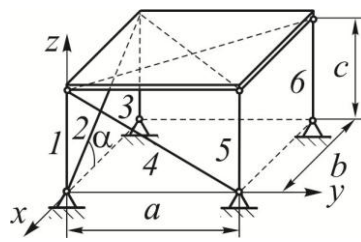


Рис. 6

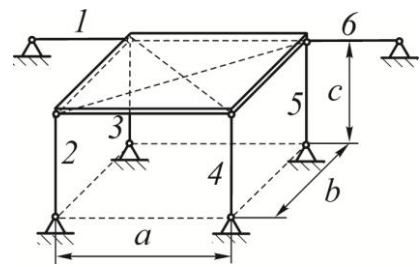


Рис. 7

Известно, что твёрдое тело можно закрепить в пространстве с помощью шести стержневых опор ($n=6$, где n – количество опорных стержней) (множество других способов закрепления тела в пространстве здесь не рассматривается). Условие совпадения количества опорных стержней с числом уравнений равновесия твёрдого тела в пространстве является необходимым, но не достаточным. При некотором расположении стержней ($n=6$) задача может оказаться статически неопределимой, а конструкция – механизмом (рис. 5) или мгновенно изменяемой системой (рис. 6 и 7).

Таблица 1

№ п/п	Механическая система	Число степеней свободы s	Число степеней псевдосвободы 1 ранга η_1	Число степеней псевдосвободы 2 ранга η_2
1		$s=0$	$\eta_1=1$	$\eta_2=0$
2		$s=0$	$\eta_1=2$	$\eta_2=0$
3		$s=0$	$\eta_1=2$	$\eta_2=0$
4		$s=0$	$\eta_1=1$	$\eta_2=1^1$

¹ Длина стержня OA равна радиусу кривизны $\rho=4R$ траектории точки A диска в указанном на рисунке положении звеньев механической системы.

Связи, реакции которых не могут быть найдены из уравнений равновесия, будем называть *статически неопределимыми*.

Кинематический признак статически неопределимой связи состоит в том, что снятие этой связи не меняет распределение псевдоскоростей точек в системе. При этом система может превратиться в механизм или остаться псевдоизменяемой. Например, статически неопределимыми являются связи в точках O, A, O_1 (табл. 1, схема 1) и в точках O, A, B, O_1 (табл. 1, схема 2), реакции которых направлены вдоль оси x . Снятие этих связей превращает псевдоизменяемые системы в механизмы (при снятии разных связей получаются различные механизмы), у которых распределение возможных скоростей совпадает с распределением псевдоскоростей в исходных системах.

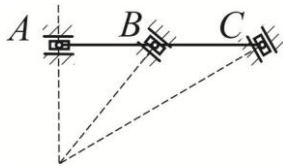


Рис. 8

На рис. 8 представлена псевдоизменяемая система, которая остается псевдоизменяемой после снятия любой из трёх связей A, B или C , причём распределение псевдоскоростей точек системы при снятии каждой связи и сохранении двух других сохраняется. Это означает, что все три связи являются статически неопределимыми.

Исходя из сказанного, псевдоизменяемые системы можно разделить на системы, содержащие статически определимые связи (рис. 4, 5) и системы без статически определимых связей – полностью статически неопределимые системы (рис. 8).

В случае, если количество стержневых опор, поддерживающих одно твёрдое тело, $n < 6$, то механическая система представляет собой пространственный механизм, который может иметь $s \leq 6 - n$ степеней свободы и η_1 степеней псевдосвободы (*лишние степени свободы стержней, связанные с их вращением вокруг собственных осей симметрии, не рассматриваются*).

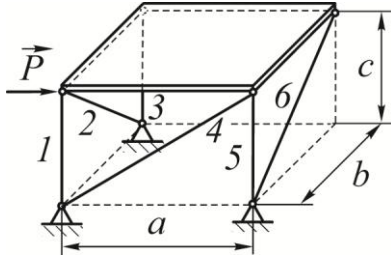


Рис. 9

Закрепление тела в пространстве с помощью стержневых опор можно осуществить способами, которые условно можно разделить на два вида:

1. усилие в каждой стержневой опоре можно определить, независимо от других (все усилия в опорных стержнях конструкции, представленной на рис.1, могут быть определены независимо от усилий в других стержнях);
2. все неизвестные величины (или их часть) определяются путём решения системы связанных уравнений равновесия (в конструкции, показанной на рис. 9, усилие в стержне 1 не может быть найдено независимо от усилий в других стержнях).

Эти виды закрепления кинематически отличаются друг от друга. При удалении любого из опорных стержней в системе первого вида пластина может либо двигаться мгновенно-поступательно, либо вращаться вокруг мгновенной оси вращения, совпадающей с одной из осей моментов m_i , упомянутых выше в п. 1.

При удалении любого из опорных стержней в системе второго вида пластина может либо двигаться мгновенно-поступательно, либо вращаться вокруг мгновенной оси вращения, совпадающей с одной из осей моментов m_i , упомянутых выше в п. 1.

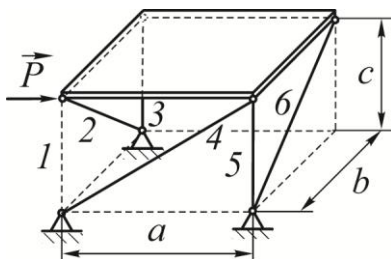


Рис. 10

В системе второго вида положение мгновенной оси вращения сразу известно только при удалении стержней, усилия в которых определяются из независимых уравнений равновесия. При удалении же остальных стержней придётся дополнительно определять положение мгновенной винтовой оси (МВО) пластины. Например, при удалении стержня 1 в конструкции, показанной на рис. 9, она превращается в механизм, представленный на рис. 10. Положение МВО пластины в этом механизме заранее не известно. Для определения положения этой мгновенной

винтовой оси необходимо провести кинематический анализ рассматриваемого механизма, который можно осуществить путём использования теоремы о скоростях точек свободного твёрдого тела с учётом наложенных на систему связей.

Известно, что шарнирно-стержневая пространственная конструкция является геометрически неизменяемой, если матрица коэффициентов при неизвестных усилиях в уравнениях равновесия является неособенной.

Другими словами, при $n=6$ матрица коэффициентов при неизвестных усилиях в уравнениях равновесия становится особенной, если механическая система представляет собой механизм или псевдоизменяемую систему.

Очевидно, что шарнирно-стержневая конструкция оказывается геометрически изменяемой (псевдоизменяемой), если хотя бы одно из уравнений равновесия не содержит неизвестных усилий в опорных стержнях.

Для механической системы, изображённой на рис. 5, все усилия в опорных стержнях не проецируются на ось y (система является статически неопределимым механизмом). У системы, представленной на рис. 6, сумма моментов сил, действующих на неё, относительно оси z не содержит усилий в опорных стержнях (статически неопределимая псевдоизменяемая система).

Иными словами, если выполняется необходимое условия статической определимости системы, но в ней имеются статически неопределимые связи, то система является геометрически- или псевдоизменяемой.

4. Динамический расчёт пространственного механизма

Механическая система, изображённая на рис. 1, является геометрически неизменяемой и относится к конструкциям первого вида. Поставим задачу определить угловые ускорения ε_4 и ε_1 пластины, в момент разрушения либо стержня 4, либо стержня 1.

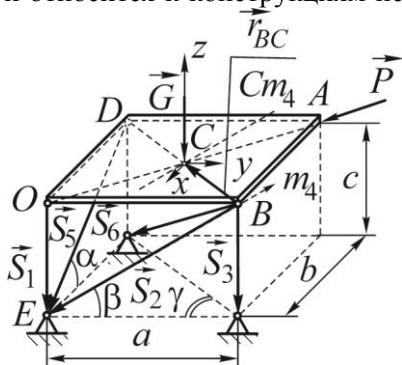


Рис. 11

В случае разрушения (удаления) стержня 4 конструкция превращается в механизм с одной степенью свободы (рис. 11). При этом пластина получает возможность вращаться вокруг оси, которая в данный момент времени совпадает с моментной осью m_4 (точки E и B этой оси неподвижны). В первом приближении пренебрежём толщиной пластины, а также инерционными свойствами всех опорных стержней.

Предварительно определим момент инерции пластины относительно оси вращения m_4 .

Запишем выражение для тензора инерции пластины относительно её центра масс C в главных централь-

ных осях инерции:

$$\mathbf{I}_C = \begin{pmatrix} I_{Cx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Cy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Cz} \end{pmatrix},$$

где I_{Cx} , I_{Cy} , I_{Cz} – моменты инерции пластины относительно осей Cx , Cy и Cz ; $I_{Cx} = m \frac{a^2}{12}$

$$; I_{Cy} = m \frac{b^2}{12}; I_{Cz} = m \frac{(a^2 + b^2)}{12}.$$

Пользуясь теоремой о тензоре инерции тела относительно оси, параллельной центральной, можем записать выражение для тензора инерции пластины относительно точки B :

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{I}_C - m \cdot \hat{r}_{BC}^2,$$

где $\hat{r}_{BC} = \begin{pmatrix} 0 & -z_C & y_C \\ z_C & 0 & -x_C \\ -y_C & x_C & 0 \end{pmatrix}$ – кососимметричная матрица центра масс C в системе координат

$Bx'y'z'$, оси которой параллельны соответствующим осям системы $Cxyz$; $x_C = -0,5b$; $y_C = -0,5a$; $z_C = 0$.

Момент инерции пластины I_{m4} относительно наклонной оси m_4 определим по формуле:

$$I_{m4} = i_{m4}^T \cdot \mathbf{I}_B \cdot i_{m4} = I_{Cy} \cos^2 \beta + I_{Cz} \sin^2 \beta + md^2 = \frac{m}{3(a^2 + c^2)} (a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2),$$

где $i_{m4}^T = (0 \quad \cos \beta \quad \sin \beta)$ – матрица-строка орта оси m_4 .

Дифференциальное уравнение вращения пластины вокруг оси m_4 имеет вид:

$$I_{m4} \ddot{\phi}_4 = M_{m4}^G + M_{m4}^P = P \cos \gamma \sin \beta \cdot b - G \frac{b}{2} \cos \beta.$$

Отсюда находим искомое угловое ускорение ε_4 пластины в рассматриваемом положении механизма:

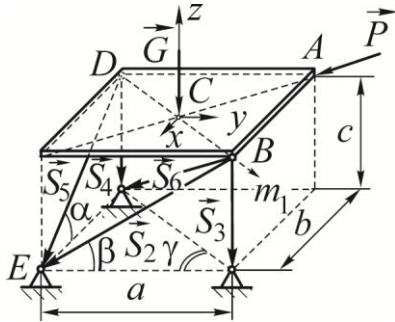


Рис. 12

$$\varepsilon_4 = \ddot{\phi}_4 = \frac{P \cos \gamma \sin \beta \cdot b - G \frac{b}{2} \cos \beta}{I_{m4}} = -0,96 \text{ с}^{-2}.$$

Для определения углового ускорения ε_1 пластины в момент разрушения стержня 1 мысленно удалим этот стержень, восстановив стержень 4 (рис. 12). Система превратится в механизм, причём пластина получит возможность вращаться вокруг оси m_1 .

Составим дифференциальное уравнение вращения пластины вокруг этой оси.

Так как сумма моментов внешних сил, действующих на пластину относительно оси m_1 , равна нулю, получаем, что и угловое ускорение ε_1 пластины в этом положении равно нулю ($\varepsilon_1 = 0$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дворников Л.Т., Стариков С.П. Кинематика и кинетостатика плоской шестизвенной группы Ассур четвертого класса. // Теория механизмов и машин. 2006. №1(7). Том 4. С. 61-65.
2. Евграфов А.Н., Петров Г.Н. Компьютерная анимация кинематических схем в программах Excel и Mathcad. // Теория механизмов и машин. 2008. №1(11). С. 71-80.

3. **Зиборов К.А.** Решение векторных уравнений кинематики механизмов с помощью программы Mathcad. / **К.А. Зиборов, И.Н. Мацюк, Э.М. Шляхов** // Теория механизмов и машин. 2008. №1(11). С. 64-70.
4. **Третьяков В.Н.** Использование программы Mathcad при определении скоростей и ускорений рычажных механизмов. // Теория механизмов и машин. 2009. №2(14). С. 40-48.
5. **Зиборов К.А.** Силовой анализ механизмов с помощью программы Mathcad. / **Зиборов К.А., Мацюк И.Н., Шляхов Э.М.** // Теория механизмов и машин. 2010. №1(15). С. 83-88.
6. **Слоущ А.В.** Свободное движение двухкоромыслового четырёхзвенника // Теория механизмов и машин. 2011. №1(17). С.62-68.
7. **Доронин Ф.А., Доев В.С.** Исследование движения плоского механизма с помощью пакета Mathcad. // Теория механизмов и машин. 2011. №1(17). С. 77-87.
8. **Мацюк И.Н.** Кинематический анализ плоских рычажных механизмов высоких классов в программе Mathcad. / **Мацюк И.Н., Третьяков В.Н., Шляхов Э.М.** // Теория механизмов и машин. 2012. №1(19). С. 65-71.
9. **Мкртычев О.В.** Компьютерное моделирование при кинематическом анализе плоских механизмов. // Теория механизмов и машин. 2012. №1(19). С. 46-53.
10. **Мацюк И.Н., Шляхов Э.М.** Кинестатика плоских стержневых механизмов произвольной структуры // Теория механизмов и машин. 2013. №1(21). Том 11. С. 71-77.
11. **Мкртычев О.В.** Компьютерное моделирование при силовом расчёте плоских механизмов. // Теория механизмов и машин. 2013. №1(21). Том 11. С. 77-84.
12. **Аллахвердов Б.М.** Строительная механика. Примеры и задачи: учебное пособие / А.В. Бенин, Б.Н. Васильев, С.В. Елизаров, Я.К. Кульгавий, В.М. Никитин, Н.Н. Омелова, И.И. Рыбина, Р.А. Шафеев; под редакцией С.В. Елизарова. – СПб.: ПГУПС, 2009. – 461 с.
13. **Доронин Ф.А., Минкин Ю.Г.** О различных видах систем уравнений равновесия произвольной системы сил в пространстве и однородном представлении векторов. //Сборник научно-методических статей по теоретической механике, 1986, вып. 16.
14. **Суслов Г.К.** Основы аналитической механики. Киев. 1901.

REFERENCES

1. **Dvornikov L.T., Starikov S.P.** Kinematika i kinetostatika ploskoj shestizvennoj grupy Assura chetvyortogo klassa. // Teoriya mehanizmov i mashin. 2006. №1(7). Tom 4. Pp. 61-65 (rus.)
2. **Evgrafov A.N., Petrov G.N.** Kompyuternaya animaciya kinematicheskikh shem v programmah Excel i Mathcad. // Teoriya mehanizmov i mashin. 2008. №1(11). Pp. 71-80 (rus.)
3. **Ziborov K.A.** Reshenie vektornyh uravnenij kinematiki mehanizmov s pomoshhyu programmy Mathcad. / K.A. Ziborov, I.N. Masyuk, E.M. Shlyahov // Teoriya mehanizmov i mashin. 2008. №1(11). Pp. 64-70 (rus.)
4. **Tretyakov V.N.** Ispolzovanie programmy Mathcad pri opredelenii skorostej i uskorenij rychazhnyh mehanizmov. // Teoriya mehanizmov i mashin. 2009. №2(14). Pp. 40-48 (rus.)
5. **Ziborov K.A.** Silovoj analiz mehanizmov s pomoshhyu programmy Mathcad. / Ziborov K.A., Masyuk I.N., Shlyahov E.M. // Teoriya mehanizmov i mashin. 2010. №1(15). Pp. 83-88 (rus.)
6. **Sloushh A.V.** Svobodnoe dvizhenie dvuhkoromyslovogo chetyryohzvennika // Teoriya mehanizmov i mashin. 2011. №1(17). Pp.62-68 (rus.)
7. **Doronin F.A., Doev V.S.** Issledovanie dvizheniya ploskogo mehanizma s pomoshhyu paketa Mathcad. // Teoriya mehanizmov i mashin. 2011. №1(17). Pp. 77-87 (rus.)

8. **Macyuk I.N.** Kinematicheskij analiz ploskix rychazhnyx mexanizmov vysokix klassov v programme Mathcad. / Macyuk I.N., Tretyakov V.N., Shlyaxov E.M. // Teoriya mehanizmov i mashin. 2012. №1(19). Pp. 65-71 (rus.)
9. **Mkrtychev O.V.** Kompyuternoe modelirovanie pri kinematicheskom analize ploskix mehanizmov. // Teoriya mehanizmov i mashin. 2012. №1(19). Pp. 46-53 (rus.)
10. **Macyuk I.N., Shlyahov E.M.** Kinetostatika ploskix sterzhnevyyh mehanizmov proizvolnoj struktury // Teoriya mehanizmov i mashin. 2013. №1(21). Tom 11. Pp. 71-77 (rus.)
11. **Mkrtychev O.V.** Kompyuternoe modelirovanie pri silovom raschyote ploskix mehanizmov. // Teoriya mehanizmov i mashin. 2013. №1(21). Tom 11. Pp. 77-84 (rus.)
12. **Allahverdov B.M.** Stroitel'naya mehanika. Primery i zadachi: uchebnoe posobie / A.V. Benin, B.N. Vasilev, S.V. Elizarov, Ya.K. Kulgavij, V.M. Nikitin, N.N. Ometova, I.I. Rybina, R.A. Shafeev; pod redakciej S.V. Elizarova. – SPb.: PGUPS, 2009. – 461 p. (rus.)
13. **Doronin F.A., Minkin Yu.G.** O razlichnyh vidah sistem uravnenij ravnovesiya proizvolnoj sistemy sil v prostranstve i odnorodnom predstavlenii vektorov. //Sbornik nauchno-metodicheskikh statej po teoreticheskoj mehanike, 1986, vyp. 16. (rus.)
14. **Suslov G.K.** Osnovy analiticheskoy mehaniki. Kiev. 1901.

Поступила в редакцию 08.10.2013

После доработки 14.02.2014