УДК 621.01

Ф.А. ДОРОНИН

К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ УГЛОВЫХ СКОРОСТЕЙ ЗВЕНЬЕВ ЗАМКНУТЫХ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

В литературе по механике неоднократно поднимался вопрос о статико-кинематических аналогиях. Множество учебников по теоретической механике (например, [1, 2]) содержат информацию о том, что векторы угловых скоростей в сложном движении и силы, действующие на некоторое твёрдое тело, являются скользящими векторами. Это даёт возможность применять к тому и другому случаям теорию скользящих векторов и, следовательно, использовать результаты, полученные в статике, для решения задач кинематики, и наоборот. Достаточно подробно об этом написано в книге [3], в которой приведено несколько ссылок на существующую литературу. В работах [4-6] на основе статико-кинематической аналогии проанализирована работа различных пространственных механизмов, а также рассмотрено применение этой аналогии при решении задачи о моделировании фрагментов кристаллических структур.

В статье рассматривается применение статико-кинематической аналогии к расчёту некоторых замкнутых кинематических цепей.

1. Определение угловых скоростей звеньев плоского шарнирного четырёхзвенника

Изучению свойств плоского шарнирного четырёхзвенника с разных точек зрения посвящено достаточно много работ. Например, в статьях [7-10].рассмотрены кинематические соотношения, особые положения и колебания двухкоромыслового четырёхзвенника. Кинематика особого положения этого механизма с использованием ускорений высшего порядка исследована в работах [11, 12]. В статьях [13-15] изложены вопросы, связанные с изучением устойчивости и малых колебаний плоского четырёхзвенника.

Используем статико-кинематическую аналогию для определения угловых скоростей звеньев плоского шарнирного четырёхзвенника.

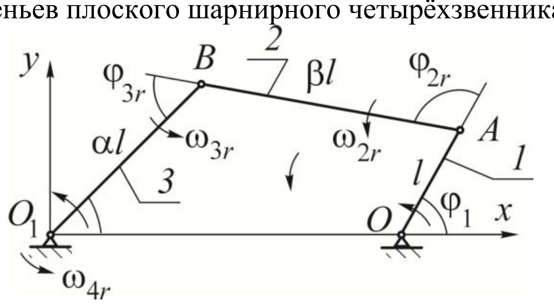


Рис. 1

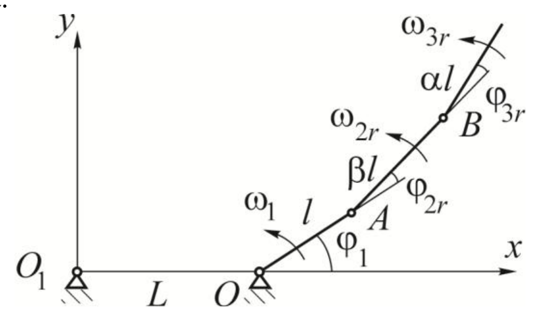


Рис. 2

Рассмотрим шарнирный четырёхзвенник $OABO_1$, представленный на рис. 1. Предположим, что известны длины звеньев $OA=l$, $AB=\beta l$, $O_1B=\alpha l$, расстояние $O_1O=L$ между шарнирами O_1 и O, а также угол поворота $\varphi_1=60°$ ведущего звена OA и его угловая скорость $\omega_1=2$ с$^{-1}$ в данный момент времени ($\alpha=1{,}575$, $\beta=1{,}425$, $l=4$ м, $L=8$ м). Поставим задачу определить относительные и абсолютные угловые скорости остальных звеньев в данном положении механизма.

На первом этапе разберём шарнир O_1 (рис. 2), введём избыточные координаты φ_{2r} и φ_{3r} и составим уравнения связей:

$$\begin{cases} l\cos(\varphi_1)+\beta l\cos(\varphi_1+\varphi_{2r})+\alpha l\cos(\varphi_1+\varphi_{2r}+\varphi_{3r})+L=0; \\ \sin(\varphi_1)+\beta\sin(\varphi_1+\varphi_{2r})+\alpha l\sin(\varphi_1+\varphi_{2r}+\varphi_{3r})=0, \end{cases} \tag{1}$$

где φ_{2r} и φ_{3r} – углы относительного поворота второго звена относительно первого и третьего относительно второго, соответственно.

Для определения значений избыточных координат в заданном положении механизма решим систему нелинейных уравнений (1) с помощью математического пакета Mathcad и получим значения углов между звеньями механизма при заданной их сборке: φ_{2r} =109,409°, φ_{3r}=56,328°.

Вычислим относительные угловые скорости звеньев механизма. Так как мгновенные оси относительных поворотов звеньев механизма параллельны друг другу и оси z, перпендикулярной плоскости чертежа, то векторы угловых скоростей ω_{2r}, ω_{3r}, ω_{4r} образуют систему параллельных векторов в пространстве (ω_{4r} – относительная угловая скорость вращения неподвижного звена O_1O по отношению к звену O_1B). Для рассматриваемой замкнутой кинематической цепи главный мотор этих векторов относительно начала O_1 системы координат равен нулю:

$$M^{*}_{O1}\left(\vec{\omega}_i\right)=\vec{0}.$$

В более подробной записи получаем:

$$\left\{\sum\vec{\omega}_i;\sum\vec{r}_{O1i}\times\vec{\omega}_i\right\}=\vec{0}.$$

Один из вариантов этого выражения, записанного в проекциях на оси координат, принимает вид:

$$\begin{cases} \omega_1+\omega_{2r}+\omega_{3r}+\omega_{4r}=0; \\ \omega_{2r}l\left[\alpha\sin(\varphi_1+\varphi_{2r}+\varphi_{3r}-\pi)-\beta\sin(\varphi_1+\varphi_{2r})\right]+\omega_{3r}\alpha l\sin(\varphi_1+\varphi_{2r}+\varphi_{3r}-\pi)=0; \\ \omega_{2r}l\left[\alpha\cos(\varphi_1+\varphi_{2r}+\varphi_{3r}-\pi)-\beta\cos(\varphi_1+\varphi_{2r})\right]+\omega_{3r}\alpha l\cos(\varphi_1+\varphi_{2r}+\varphi_{3r}-\pi)+ \\ \qquad +\left[\alpha\cos(\varphi_1+\varphi_{2r}+\varphi_{3r}-\pi)+\beta\cos(\varphi_1+\varphi_{2r})-\cos\varphi_1\right]\omega_1=0. \end{cases}$$

Здесь: ω_{ir} – угловая скорость вращения i-го звена по отношению к (i-1)-му звену.

Полученную систему линейных относительно неизвестных угловых скоростей ω_{ir} уравнений перепишем в матричной форме:

$$A\cdot\omega=B,$$

где

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha\sin(\varphi_1+\varphi_{2r}+\varphi_{3r}-\pi)-\beta\sin(\varphi_1+\varphi_{2r}) & \alpha\sin(\varphi_1+\varphi_{2r}+\varphi_{3r}-\pi) & 0 \\ \alpha\cos(\varphi_1+\varphi_{2r}+\varphi_{3r}-\pi)-\beta\cos(\varphi_1+\varphi_{2r}) & \alpha\cos(\varphi_1+\varphi_{2r}+\varphi_{3r}-\pi) & 0 \end{pmatrix};$$

$$B=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -\left[\alpha\cos(\varphi_1+\varphi_{2r}+\varphi_{3r}-\pi)+\beta\cos(\varphi_1+\varphi_{2r})-\cos\varphi_1\right] \end{pmatrix}\omega_1;\ \omega=\begin{pmatrix}\omega_{2r}\\ \omega_{3r}\\ \omega_{4r}\end{pmatrix}.$$

Хорошо известно, что полученная система уравнений имеет решение только при условии, что определитель матрицы A коэффициентов при неизвестных не равен нулю ($|A|\neq 0$).

При рассматриваемых исходных данных: φ_1=60°, φ_2=109,409°, φ_3=56,328°, ω_1=2 с$^{-1}$ получаем следующие значения относительных угловых скоростей звеньев: ω_{2r}=–2,415 с$^{-1}$, ω_{3r}=1,855 с$^{-1}$, ω_{4r}=–1,439 с$^{-1}$.

Если же $|A|=0$, то система уравнений не имеет решения. Условие $|A|=0$ позволяет найти особые положения механизма.

Раскроем определитель $|A|$:

$$\left[\alpha\sin\left(\varphi_1+\varphi_{2r}+\varphi_{3r}-\pi\right)-\beta\sin\left(\varphi_1+\varphi_{2r}\right)\right]\cos(\varphi_1+\varphi_{2r}+\varphi_{3r}-\pi)-$$
$$-\sin\left(\varphi_1+\varphi_{2r}+\varphi_{3r}-\pi\right)\left[\alpha\cos\left(\varphi_1+\varphi_{2r}+\varphi_{3r}-\pi\right)-\beta\cos\left(\varphi_1+\varphi_{2r}\right)\right]=0$$

или

$$\sin\left(\varphi_{3r}\right)=0. \qquad (2)$$

Корни этого уравнения φ_{3r}=0 и $\varphi_{3r}=\pm\pi$ определяют особые положения рассматриваемого механизма.

Отметим, что если представить систему уравнений (1) в виде:

$$\begin{cases} f_1(\varphi_{2r},\varphi_{3r})=l\cos\left(\varphi_1\right)+\beta l\cos\left(\varphi_1+\varphi_{2r}\right)+\alpha l\cos\left(\varphi_1+\varphi_{2r}+\varphi_{3r}\right)+L=0; \\ f_2(\varphi_{2r},\varphi_{3r})=\sin\left(\varphi_1\right)+\beta\sin\left(\varphi_1+\varphi_{2r}\right)+\alpha l\sin\left(\varphi_1+\varphi_{2r}+\varphi_{3r}\right)=0, \end{cases}$$

затем составить матрицу Якоби

$$J=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(\varphi_{2r},\varphi_{3r})}{\partial\varphi_{2r}} & \dfrac{\partial f_1(\varphi_{2r},\varphi_{3r})}{\partial\varphi_{3r}} \\ \dfrac{\partial f_2(\varphi_{2r},\varphi_{3r})}{\partial\varphi_{2r}} & \dfrac{\partial f_2(\varphi_{2r},\varphi_{3r})}{\partial\varphi_{3r}} \end{pmatrix},$$

то, приравняв к нулю её определитель, мы придём к уравнению $\sin\left(\varphi_{3r}\right)=0$, полностью совпадающему с уравнением (2).

Абсолютные угловые скорости ω_2 и ω_3 второго и третьего звеньев вычислим по формулам: $\omega_2=\omega_1+\omega_{2r}=-0,415$ с$^{-1}$; $\omega_3=\omega_1+\omega_{2r}+\omega_{3r}=1,429$ с$^{-1}$.

2. Определение угловых скоростей звеньев плоского шарнирного двухподвижного механизма

В статье [10] в качестве примера рассмотрена задача об определении угловых скоростей и угловых ускорений звеньев плоского шарнирного пятизвенника в его заданном положении, представленном на рис. 3. Предполагается, что известны длины звеньев: l_1=3 см, $l_2=2\sqrt{2}$ см, l_3=1 см, l_4=2 см, а также абсолютные угловые скорости первого и четвёртого звеньев ω_1=2 с$^{-1}$ и ω_4=–4 с$^{-1}$.

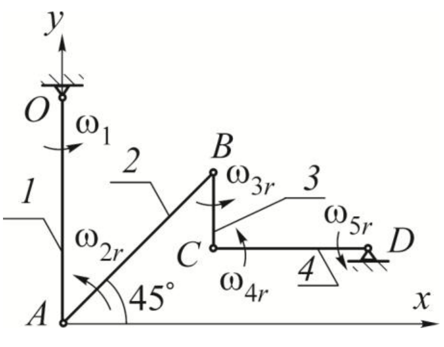


Рис. 3

Применим статико-кинематическую аналогию для определения угловых скоростей звеньев этого пятизвенника.

Введём в рассмотрение относительные угловые скорости ω_{ir} звеньев (как и в предыдущем параграфе, ω_{ir} – угловая скорость вращения i-го звена по отношению к (i–1)-му звену). Для рассматриваемой замкнутой кинематической цепи главный мотор векторов угловых скоростей относительно начала A системы координат равен нулю. Так как векторы относительных угловых скоростей звеньев образуют систему параллельных векторов в пространстве, в проекциях на оси координат получаем:

$$\begin{cases} \sum Z_i = 0; \quad \omega_1 + \omega_{2r} + \omega_{3r} + \omega_{4r} + \omega_{5r} = 0; \\ \sum M_{xi} = 0; \quad \omega_1 \cdot 3 + \omega_{3r} \cdot 2 + \omega_{4r} \cdot 1 + \omega_{5r} \cdot 1 = 0; \\ \sum M_{yi} = 0; \quad \omega_{3r} \cdot 2 + \omega_{4r} \cdot 2 + \omega_{4r} \cdot 4 = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Эта система из трёх уравнений содержит четыре неизвестные величины. Получим недостающее уравнение, выразив известную абсолютную угловую скорость 4-го звена через угловые скорости других звеньев:

$$\omega_1 + \omega_{2r} + \omega_{3r} + \omega_{4r} = \omega_4 \ . \tag{4}$$

Запишем уравнения (3) и (4) в матричной форме и, решив их с помощью пакета Mathcad, находим значения относительных угловых скоростей звеньев механизма: ω_{2r}=2 с$^{-1}$, ω_{3r}=–2 с$^{-1}$, ω_{4r}=–6 с$^{-1}$, ω_{5r}=4 с$^{-1}$.

Абсолютные угловые скорости звеньев механизма определим по формулам, справедливым для случая сложного движения твёрдого тела, вращающегося вокруг параллельных осей:

$$\omega_2 = \omega_1 + \omega_{2r} = 4 \text{ с}^{-1}, \ \omega_3 = \omega_1 + \omega_{2r} + \omega_{3r} = 2 \text{ с}^{-1}, \ \omega_4 = \omega_1 + \omega_{2r} + \omega_{3r} + \omega_{4r} = -4 \text{ с}^{-1},$$

$$\omega_5 = \omega_1 + \omega_{2r} + \omega_{3r} + \omega_{4r} + \omega_{5r} = 0.$$

3. Определение угловых скоростей звеньев пространственного шарнирного четырёхзвенника

Рассмотрим пространственный шарнирный четырёхзвенник с вращательными парами, находящийся в положении, изображённом на рис. 4 (все звенья, а также оси вращательных пар расположены в плоскости чертежа). Предположим, что в данном положении известна угловая скорость ω_1=4 с$^{-1}$ ведущего звена *1* и размеры a=1 см, b=2см. Определим угловые скорости оставшихся звеньев в рассматриваемом положении четырёхзвенника, который представляет собой особый механизм с избыточными связями.

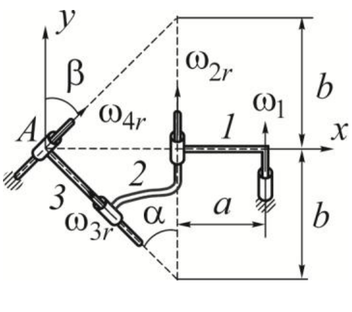


Рис. 4

Выберем направления векторов относительных угловых скоростей звеньев (см. рис. 4). Для изучаемой замкнутой кинематической цепи главный мотор векторов относительных угловых скоростей по отношению к началу A системы координат равен нулю ($M_A^*\left(\vec{\omega}_i\right) = \vec{0}$). В данном случае векторы относительных угловых скоростей образуют произвольную систему векторов на плоскости, поэтому в проекциях на оси координат получаем систему из трёх уравнений:

$$\begin{cases} \sum X_i = 0; \ \omega_{4r} \sin\beta - \omega_{3r} \sin\alpha = 0; \\ \sum Y_i = 0; \ \omega_1 + \omega_{2r} + \omega_{4r} \cdot \cos\beta + \omega_{3r} \cdot \cos\alpha = 0; \\ \sum M_{Ai} = 0; \ \omega_{2r} \cdot b \cdot \text{tg}\alpha + \omega_1 \cdot \left(a + b \cdot \text{tg}\alpha\right) = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений при $\alpha=\beta=\pi/4$, находим значения относительных угловых скоростей звеньев: $\omega_{2r}=-6$ с$^{-1}$, $\omega_{3r}=\sqrt{2}$ с$^{-1}$, $\omega_{4r}=\sqrt{2}$ с$^{-1}$. Если записать матрицы угловых скоростей в виде:

$$\omega_1=\begin{pmatrix}0\\ \omega_1\\ 0\end{pmatrix};\ \omega r_2=\begin{pmatrix}0\\ \omega_{2r}\\ 0\end{pmatrix};\ \omega r_3=\begin{pmatrix}-\omega_{3r}\sin\alpha\\ \omega_{3r}\sin\alpha\\ 0\end{pmatrix};\ \omega r_4=\begin{pmatrix}\omega_{4r}\sin\beta\\ \omega_{4r}\cos\beta\\ 0\end{pmatrix},$$

то матрицы абсолютных скоростей звеньев четырёхзвенника определяются по формулам:

$$\omega_2=\omega_1+\omega_{2r}=\begin{pmatrix}0\\ \omega_1\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ \omega_{2r}\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \omega_1+\omega_{2r}\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -2\\ 0\end{pmatrix};$$

$$\omega_3=\omega_2+\omega_{3r}=\begin{pmatrix}0\\ \omega_1+\omega_{2r}\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\omega_{3r}\sin\alpha\\ \omega_{3r}\sin\alpha\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 0\end{pmatrix};$$

$$\omega_4=\omega_3+\omega_{4r}=\begin{pmatrix}-\omega_{3r}\sin\alpha\\ \omega_1+\omega_{2r}+\omega_{3r}\sin\alpha\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\omega_{4r}\sin\beta\\ \omega_{4r}\cos\beta\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Модули абсолютных угловых скоростей звеньев соответственно равны: $\omega_2=2$ с$^{-1}$, $\omega_3=\sqrt{2}$ с$^{-1}$, $\omega_4=0$ с$^{-1}$.

4. Определение угловых скоростей звеньев пространственного шарнирного многозвенника

На рис. 5 изображён пространственный многозвенник, звенья которого соединены вращательными одноподвижными парами пятого класса. Предположим, что известна угловая скорость ω_1 ведущего звена *1* и некоторые размеры *a, b, c* многозвенника. Поставим задачу определить абсолютные угловые скорости остальных звеньев механизма в его заданном положении.

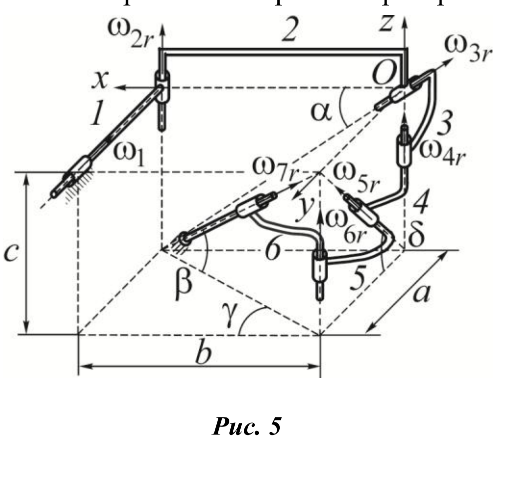


Рис. 5

За обобщённые координаты примем углы относительного поворота звеньев φ_{ir} (i=2,…,7) и выберем направления векторов неизвестных относительных угловых скоростей ω_{ir} (см. рис.5). Многозвенник является замкнутым, поэтому главный мотор векторов относительных угловых скоростей его звеньев относительно начала *O* системы координат *Oxyz* равен нулю:

$$M_O^*\left(\vec{\omega}_i\right)=\vec{0}.$$

Проецируя это выражение на оси выбранной системы координат, для произвольной пространственной системы векторов получаем систему из шести уравнений:

$$\begin{cases} \sum X_i = 0;\ -\omega_{3r}\cos\alpha - \omega_{7r}\cos\beta\cos\gamma = 0; \\ \sum Y_i = 0;\ -\omega_{5r}\cos\delta - \omega_{7r}\cos\beta\sin\gamma + \omega_1 = 0; \\ \sum Z_i = 0;\ \omega_{2r} + \omega_{4r} + \omega_{6r} + \omega_{3r}\sin\alpha + \omega_{5r}\sin\delta + \omega_{7r}\sin\beta = 0; \\ \sum M_{xi} = 0;\ \omega_{6r}\cdot a + \omega_{5r}\sin\delta\cdot\alpha + \omega_{7r}\sin\beta\cdot\alpha = 0; \\ \sum M_{yi} = 0;\ -\omega_{2r}\cdot b = 0; \\ \sum M_{zi} = 0;\ -\omega_1\cdot b + \omega_{7r}\cos\beta\sin\gamma\cdot b = 0, \end{cases} \tag{5}$$

которую запишем в матричной форме:

$$A_1\cdot\Omega = B_1, \tag{6}$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\cos\alpha & 0 & 0 & 0 & -\cos\beta\cos\gamma \\ 0 & 0 & 0 & -\cos\delta & 0 & -\cos\beta\sin\gamma \\ 1 & \sin\alpha & 1 & \sin\delta & 1 & \sin\beta \\ 0 & 0 & 0 & a\cdot\sin\delta & a & a\cdot\sin\beta \\ -b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b\cdot\cos\beta\sin\gamma \end{pmatrix};\ B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}\omega_1;\ \Omega = \begin{pmatrix} \omega_{2r} \\ \omega_{3r} \\ \omega_{4r} \\ \omega_{5r} \\ \omega_{6r} \\ \omega_{7r} \end{pmatrix}.$$

Решение матричного уравнения (6) произведём, применив пакет Mathcad, при следующих исходных данных: ω_1=4 с$^{-1}$, a=3 м, b=4 м, c=2,5 м. В результате получим следующие алгебраические значения относительных угловых скоростей механизма: ω_{2r}=0, ω_{3r}=–6,286 с$^{-1}$, ω_{4r}=3,333 с$^{-1}$, ω_{5r}=0, ω_{6r}=–3,333 с$^{-1}$, ω_{7r}=7,454 с$^{-1}$.

Для определения абсолютных угловых скоростей запишем матрицы угловых скоростей звеньев (абсолютной угловой скорости звена *1* и относительных – звеньев *2-7*):

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega_1 \\ 0 \end{pmatrix};\ \omega r_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{2r} \end{pmatrix};\ \omega r_3 = \begin{pmatrix} -\omega_{3r}\cos\alpha \\ 0 \\ \omega_{3r}\sin\alpha \end{pmatrix};$$

$$\omega r_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{4r} \end{pmatrix};\ \omega r_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_{5r}\cos\delta \\ \omega_{5r}\sin\delta \end{pmatrix};\ \omega r_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{6r} \end{pmatrix};\ \omega r_7 = \begin{pmatrix} -\omega_{7r}\cos\beta\cos\gamma \\ \omega_{7r}\cos\beta\sin\gamma \\ \omega_{7r}\sin\beta \end{pmatrix}.$$

Матрицы абсолютных угловых скоростей звеньев *2-7* вычислим по формуле:

$$\omega_i = \omega_1 + \sum_{j=2}^{i}\omega r_j,\ i = 2,\dots,7.$$

Получаем следующие результаты (матрицы абсолютных угловых скоростей звеньев *2−7*):

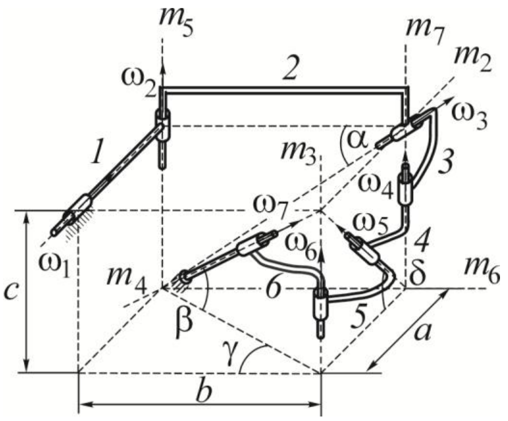


Рис. 6

$$\omega_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix};\ \omega_3 = \begin{pmatrix} 5,333 \\ -4 \\ -3,333 \end{pmatrix};\ \omega_4 = \begin{pmatrix} 5,333 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\omega_5 = \begin{pmatrix} 5,333 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix};\ \omega_6 = \begin{pmatrix} 5,333 \\ -4 \\ -3,333 \end{pmatrix};\ \omega_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Модули абсолютных угловых скоростей равны: ω_2=4 с$^{-1}$, ω_3=7,454 с$^{-1}$, ω_4=6,667 с$^{-1}$, ω_5=6,667 с$^{-1}$, ω_6=7,454 с$^{-1}$, ω_7=0.

Описываемый способ в ряде случаев позволяет определять относительные угловые скорости звеньев независимо друг от друга. При этом система связанных уравнений (5) превращается в систему независимых уравнений, в каждом из которых находится не более одной неизвестной величины.

В рассматриваемом примере такая система уравнений будет включать в себя шесть уравнений моментов векторов угловых скоростей относительно специально подобранных осей m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7 (рис. 6):

$$\begin{cases} \sum M_{m2i} = 0;\ \omega_{2r} \cdot b = 0; \\ \sum M_{m3i} = 0;\ -\omega_{3r} \cos\alpha \cdot a - \omega_1 \cdot b = 0; \\ \sum M_{m4i} = 0;\ \omega_{4r} \cdot b \cdot \cos\beta \sin\gamma - \omega_1 \cdot c \cdot \cos\beta \cos\gamma = 0; \\ \sum M_{m5i} = 0;\ -\omega_{5r} \cdot b \cdot \cos\delta = 0; \\ \sum M_{m6i} = 0;\ -\omega_{6r} \cdot a - \omega_1 \cdot c = 0; \\ \sum M_{m7i} = 0;\ -\omega_1 \cdot b + \omega_{7r} \cos\beta \sin\gamma \cdot b = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Заметим, что моментные оси m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7 в системе (7) должны удовлетворять условиям, сформулированным в [16].

Матрица A_2 коэффициентов системы уравнений (7) является диагональной:

$$A_2 = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a \cdot \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \cdot \cos\beta \sin\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \cdot \cos\delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\beta \sin\gamma \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы имеет вид:

$$|A| = -a^2 b^3 \cos\alpha \cos\delta \cos^2\beta \sin^2\gamma .$$

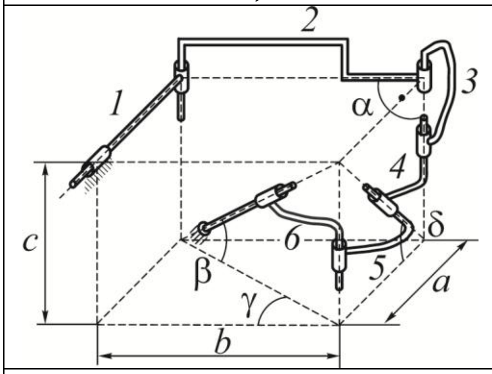
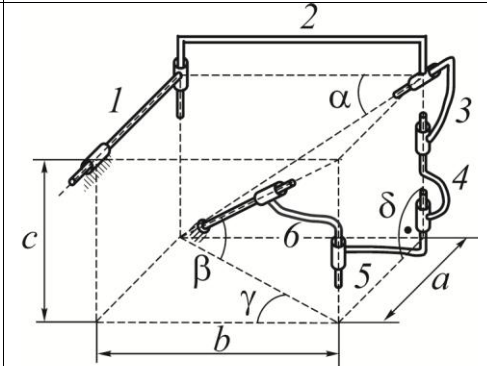
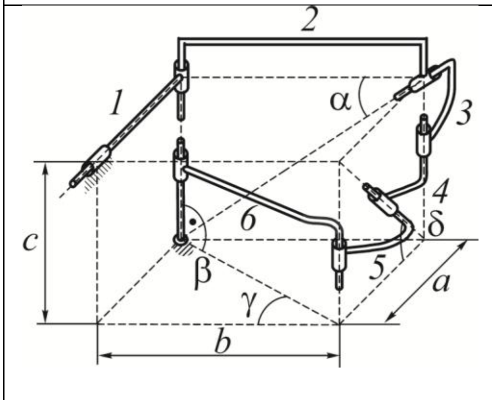
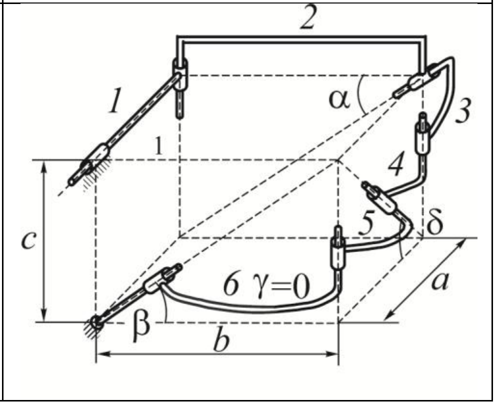
Корни уравнения

$$\cos\alpha\cos\delta\cos^2\beta\sin^2\gamma = 0$$

определяют особые положения пространственного многозвенника.

В табл. 1 представлены некоторые особые положения рассматриваемого замкнутого пространственного механизма.

Таблица 1

<table>
<tr><td>$\cos\alpha=0$, $\alpha=\pi/2$</td><td>$\cos\delta = 0$, $\delta=\pi/2$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$\cos\beta=0$, $\beta=\pi/2$</td><td>$\sin\gamma = 0$, $\gamma=0$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Маркеев А.П.** Теоретическая механика: Учебник для университетов. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2001. – 572 с.
2. **Яковенко Г.Н.** Краткий курс теоретической механики: Учебное пособие. – 3-е изд. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2010. ISBN 5-94774-154-5.
3. **Диментберг Ф.М.** Теория пространственных шарнирных механизмов. –М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982.-336 с.
4. **Н.М. Трухан**. Кинематика: методические указания по решению задач по курсу «Теоретическая механика». – М.: МФТИ, 1991. – 32 с.
5. **Глазунов В.А., Колискор А.Ш., Крайнев А.Ф. Пространственные механизмы параллельной структуры. М.: Наука.** 1991 г. - 95 стр.
6. **В.А. Глазунов, С.Д. Костерева, П.О. Данилин, А.Б. Ласточкин.** Применение винтового исчисления в современной теории механизмов. «Вестник научно-технического развития: Интернет-журнал». № 6 (34), 2010 г. – www.vntr.ru. – ISSN 2070-6847.

7. **Деграве В.С.** Особые положения плоских неассуровых структурных групп с внутренними входами // Теория механизмов и машин. 2006. №2(8). С. 81-85.
8. **Зиборов К.А., Мацюк И.Н., Шляхов Э.М.** Решение векторных уравнений кинематики механизмов с помощью программы MathCad // Теория механизмов и машин. 2008. №1(11). С.64-70.
9. **Слоущ А.В.** Свободное движение двухкоромыслового четырёхзвенника // Теория механизмов и машин. 2011. №1(17). С.62-68.
10. **Кирсанов М.Н.** Уравнения кинематики плоского механизма в координатной форме // Теория механизмов и машин. 2011. №2(18). С.85-89.
11. **Минкин Ю.Г., Доронин Ф.А.** Ускорения высших порядков как средство решения традиционных задач кинематики некоторых голономных систем // Сборник научно-методических статей по теоретической механике. М., 1984, вып. 15.
12. **Доронин Ф. А.** Нетрадиционные случаи определения положения мгновенного центра скоростей // Бюллетень результатов научных исследований: электронный научный журнал. 2012. №2(1) – С.41-50 [Электронный ресурс].
13. **Доронин Ф. А.** Об устойчивости особого положения шарнирного четырехзвенника с упругими связями // Теория механизмов и машин. 2013. №1(21). С.43-46.
14. **Доронин Ф.А.** Свободные колебания шарнирного четырехзвенника около особого положения покоя // Теория механизмов и машин. 2012. №1(19). С.16-23.
15. **Доронин Ф. А.** О линеаризации дифференциальных уравнений свободных колебаний механической системы // Теория механизмов и машин. 2013. №2(22). С.46-54.
16. **Доронин Ф.А., Минкин Ю.Г.** О различных видах систем уравнений равновесия произвольной системы сил в пространстве и однородном представлении векторов. // Сборник научно-методических статей по теоретической механике, 1986, вып. 16.

REFERENCES

1. **Markeev A.P.** Teoreticheskaya mekhanika: Uchebnik dlya universitetov. – Izhevsk: NIC «Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika». 2001. – 572 p. (rus.)
2. **Yakovenko G.N.** Kratkij kurs teoreticheskoj mekhaniki: Uchebnoe posobie. – 3-e izd. – M.: Binom. Laboratoriya znanij, 2010. ISBN 5-94774-154-5.
3. **Dimentberg F.M.** Teoriya prostranstvennyh sharnirnyh mekhanizmov. –M.: Nauka. Glavnaya redakciya fiziko-matematicheskoj literatury, 1982.-336 p. (rus.)
4. **N.M. Truhan**. Kinematika: metodicheskie ukazaniya po resheniyu zadach po kur-su «Teoreticheskaya mekhanika». – M.: MFTI, 1991. – 32 p. (rus.)
5. **Glazunov V.A., Koliskor A.SH., Krajnev A.F.** Prostranstvennye mekha-nizmy parallel'noj struktury. M.: Nauka. 1991 g. - 95 p. (rus.)
6. **V.A. Glazunov, S.D. Kostereva, P.O. Danilin, A.B. Lastochkin.** Primenenie vintovogo ischisleniya v sovremennoj teorii mekhanizmov. «Vestnik nauchno-tekhnicheskogo razvitiya: Internet-zhurnal». № 6 (34), 2010 g. – www.vntr.ru. – ISSN 2070-6847.
7. **Degrave V.S**. Osobye polozheniya ploskih neassurovyh strukturnyh grupp s vnutrennimi vhodami // Teoriya mekhanizmov i mashin. 2006. №2(8). Pp. 81-85 (rus.)
8. **Ziborov K.A., Macyuk I.N., Shlyahov E.M.** Reshenie vektornyh uravnenij kinematiki mekhanizmov s pomoshch'yu programmy MathCad // Teoriya mekhanizmov i mashin. 2008. №1(11). Pp.64-70 (rus.)
9. **Sloushch A.V.** Svobodnoe dvizhenie dvuhkoromyslovogo chetyryohzvennika // Teoriya mekhanizmov i mashin. 2011. №1(17). Pp.62-68 (rus.)
10. **Kirsanov M.N.** Uravneniya kinematiki ploskogo mekhanizma v koordinatnoj forme // Teoriya mekhanizmov i mashin. 2011. №2(18). Pp.85-89 (rus.)
11. **Minkin YU.G., Doronin F.A.** Uskoreniya vysshih poryadkov kak sredstvo resheniya tradicionnyh zadach kinematiki nekotoryh golonomnyh sistem // Sbornik nauchno-metodicheskih statej po teoreticheskoj mekhanike. M., 1984, vyp. 15 (rus.)

12. **Doronin F. A.** Netradicionnye sluchai opredeleniya polozheniya mgnovennogo centra skorostej // Byulleten' rezul'tatov nauchnyh issledovanij: ehlektronnyj nauchnyj zhurnal. 2012. №2(1) – Pp.41-50 [Elektronnyj resurs].
13. **Doronin F. A.** Ob ustojchivosti osobogo polozheniya sharnirnogo chetyrekhzvennika s uprugimi svyazyami // Teoriya mekhanizmov i mashin. 2013. №1(21). Pp.43-46 (rus.)
14. **Doronin F.A.** Svobodnye kolebaniya sharnirnogo chetyrekhzvennika okolo osobogo polozheniya pokoya // Teoriya mekhanizmov i mashin. 2012. №1(19). Pp.16-23 (rus.)
15. **Doronin F. A.** O linearizacii differencial'nyh uravnenij svobodnyh kolebanij mekhanicheskoj sistemy // Teoriya mekhanizmov i mashin. 2013. №2(22). Pp.46-54 (rus.)
16. **Doronin F.A., Minkin YU.G.** O razlichnyh vidah sistem uravnenij ravnovesiya proizvol'noj sistemy sil v prostranstve i odnorodnom predstavlenii vektorov. // Sbornik nauchno-metodicheskih statej po teoreticheskoj mekhanike, 1986, vyp. 16 (rus.)

Поступила в редакцию 20.01.2014
После доработки 09.02.2014