

О ЛИНЕАРИЗАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Линеаризация малых колебаний механических систем в ряде случаев приводит к существенному упрощению решения дифференциальных уравнений, описывающих их движение, и облегчению анализа колебательных процессов. Совместное использование аналитических и численных методов позволяет успешно решать многие задачи анализа и синтеза различных механизмов. Вопросы, связанные с этой работой, постоянно являются предметом обсуждения на страницах журнала [1-8]. В упомянутых статьях приводятся примеры применения математических программ (*Mathcad*, *Matlab*, *Maple* и др.) для выполнения кинематического и динамического анализа рычажных механизмов, визуализации результатов расчетов, решения векторных и нелинейных алгебраических уравнений.

Данная работа посвящена применению кинематического способа линеаризации дифференциальных уравнений свободных колебаний нелинейных механических систем.

При описании колебательных движений различных механизмов часто применяется линеаризация дифференциальных уравнений, описывающих эти движения. При этом широко используется способ разложения нелинейных функций, входящих в уравнения, в ряды по степеням обобщенных координат и обобщенных скоростей. Однако, встречаются случаи, когда указанный способ линеаризации по разным причинам оказывается неудобным, либо весьма трудоемким.

Альтернативой методу разложения в ряды может служить кинематический способ линеаризации дифференциальных уравнений, описывающих свободные колебания механических систем.

1. Определение коэффициентов жесткости линеаризованной механической системы

Как известно, потенциальная энергия Π линейной или линеаризованной механической системы с s степенями свободы в матричной форме записывается в виде:

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{C} \mathbf{q},$$

где $\mathbf{q}^T = (q_1, \dots, q_s)$ – вектор-строка обобщенных координат, T – знак транспонирования,

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{s1} & c_{s2} & \dots & c_{ss} \end{pmatrix}$ – матрица жесткости системы, c_{ij} – коэффициенты жесткости, обычно определяемые по формуле: $c_{ij} = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0$, в которой вторая производная от потенциальной энергии вычисляется при значениях обобщенных координат q_i и q_j , соответствующих положению равновесия системы.

Обобщенная сила, соответствующая j -й обобщенной координате, по определению может быть найдена следующим образом:

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^n \vec{P}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j},$$

где \vec{P}_k – сила, приложенная к k -й точке системы, \vec{r}_k – радиус-вектор k -й точки, n – число точек системы.

Производную $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j}$ от потенциальной энергии можно представить в виде:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \right) = -\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} = -\frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum_{k=1}^n \vec{P}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right) = -\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \vec{P}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} + \vec{P}_k \cdot \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_i \partial q_j} \right). \quad (1)$$

Если связи, наложенные на систему, стационарны, то радиус-вектор k -й точки не зависит от времени и является функцией только обобщённых координат: $\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, \dots, q_s)$. В этом случае ускорение \vec{a}_k k -й точки определяется по формуле:

$$\vec{a}_k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \ddot{q}_j. \quad (2)$$

Дифференцируя выражение (2) по \ddot{q}_j , а также по \dot{q}_i и \dot{q}_j , получаем:

$$\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{a}_k}{\partial \ddot{q}_j}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_i \partial q_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \vec{a}_k}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}. \quad (4)$$

Подставляя (3) и (4) в (1), запишем:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j} = -\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \vec{P}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{a}_k}{\partial \ddot{q}_j} + \frac{1}{2} \vec{P}_k \cdot \frac{\partial^2 \vec{a}_k}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right).$$

С учетом этого результата коэффициенты жесткости c_{ij} принимают вид:

$$c_{ij} = -\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \vec{P}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{a}_k}{\partial \ddot{q}_j} + \frac{1}{2} \vec{P}_k \cdot \frac{\partial^2 \vec{a}_k}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right). \quad (5)$$

Для системы с одной степенью свободы это выражение упрощается:

$$c = -\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \vec{P}_k}{\partial q} \cdot \frac{\partial \vec{a}_k}{\partial \ddot{q}} + \frac{1}{2} \vec{P}_k \cdot \frac{\partial^2 \vec{a}_k}{\partial \dot{q}^2} \right). \quad (6)$$

В качестве примера рассмотрим малые свободные колебания механизма, расположенного в вертикальной плоскости и показанного на рис. 1 в положении покоя. Механизм состоит из двух ползунов A и D массами m_A и m_D , невесомых стержней AB длиной l_1 и BD длиной l_2 , а также материальной точки массы m_B , совмещённой с шарниром B . Ползуны A и D соединены с горизонтальными линейными пружинами 1 и 2 с коэффициентами жёсткости c_1 и c_2 .

Определим частоты и формы свободных колебаний механизма при следующих исходных данных: $m_A=m_D=20$ кг, $m_B=40$ кг, $l_1=2$ м, $l_2=3$ м, $h=0,4$ м, $c_1=2000$ Н/м, $c_2=4000$ Н/м, $\alpha=60^\circ$. Сопротивлением движению пренебрежём.

За обобщённые координаты рассматриваемой механической системы с двумя степенями свободы примем горизонтальные смещения x_A и x_D ползунов A и D . Разобьём механизм на две части AB и BD (рис. 2) и запишем выражения для координат точек B_1 и B_2 :

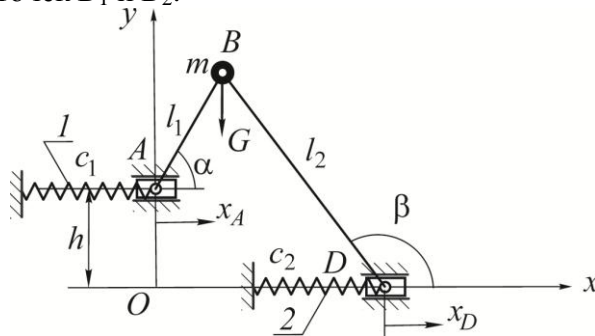


Рис. 1.

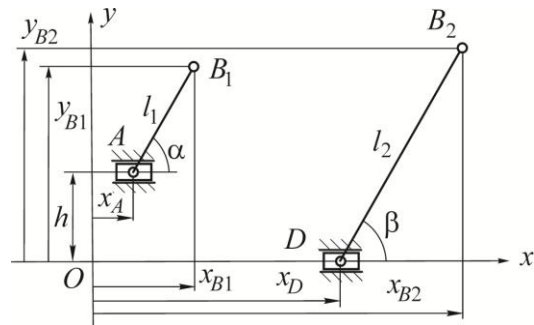


Рис. 2.

$$\begin{aligned} x_{B1} &= x_A + l_1 \cos \alpha; & y_{B1} &= h + l_1 \sin \alpha; \\ x_{B2} &= x_D + l_2 \cos \beta; & y_{B2} &= l_2 \sin \beta. \end{aligned} \quad (7)$$

Приравняв координаты точек B_1 и B_2 , получим уравнения связей:

$$\begin{cases} x_A + l_1 \cos \alpha - x_D - l_2 \cos \beta = 0; \\ h + l_1 \sin \alpha - l_2 \sin \beta = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Из этих уравнений находим:

$$\sin \beta = \frac{h}{l_2} + \frac{l_1}{l_2} \sin \alpha; \quad \cos \beta = -\sqrt{1 - \sin^2 \beta}.$$

Из уравнений равновесия сил, действующих на механизм, нетрудно определить статические деформации $f_{ст1}$ и $f_{ст2}$ пружин 1 и 2:

$$f_{ст1} = \frac{G}{c_1 (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)}; \quad f_{ст2} = \frac{G}{c_2 (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)}.$$

Продифференцируем по времени уравнения (8):

$$\begin{cases} \dot{x}_A - l_1 \dot{\alpha} \sin \alpha - \dot{x}_D - l_2 \dot{\beta} \sin \beta = 0; \\ l_1 \dot{\alpha} \cos \alpha - l_2 \dot{\beta} \cos \beta = 0. \end{cases}$$

Отсюда определяем угловые скорости стержней AB и BD :

$$\dot{\alpha} = \frac{(\dot{x}_A - \dot{x}_D) \cos \beta}{l_1 \sin(\alpha - \beta)} = k_1 (\dot{x}_A - \dot{x}_D); \quad \dot{\beta} = \frac{(\dot{x}_A - \dot{x}_D) \cos \alpha}{l_2 \sin(\alpha - \beta)} = k_2 (\dot{x}_A - \dot{x}_D), \quad (9)$$

где обозначено $k_1 = \frac{\cos \beta}{l_1 \sin(\alpha - \beta)}$; $k_2 = \frac{\cos \alpha}{l_2 \sin(\alpha - \beta)}$.

Находим проекции скорости точки B на оси координат:

$$\begin{aligned} \dot{x}_B &= \dot{x}_A - l_1 \dot{\alpha} \sin \alpha; \\ \dot{y}_B &= l_1 \dot{\alpha} \cos \alpha. \end{aligned} \quad (10)$$

С учётом выражений (9) эти проекции приобретают вид:

$$\dot{x}_B = b_{11} \dot{x}_A + b_{12} \dot{x}_D; \quad \dot{y}_B = b_{10} (\dot{x}_A - \dot{x}_D), \quad (11)$$

где

$$b_{11} = -\frac{\cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}; \quad b_{12} = -\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin(\alpha - \beta)}; \quad b_{10} = \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

Кинетическая энергия системы определяется как сумма:

$$T = \frac{1}{2} m_A \dot{x}_A^2 + \frac{1}{2} m_B (\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2) + \frac{1}{2} m_D \dot{x}_D^2.$$

Это выражение после подстановки в него соотношений (11) может быть приведено к виду:

$$T = \frac{1}{2} a_{11} \dot{x}_A^2 + a_{12} \dot{x}_A \dot{x}_D + \frac{1}{2} a_{22} \dot{x}_D^2, \quad (12)$$

где

$$a_{11} = m_A + m_B (b_{11}^2 + b_{10}^2); \quad a_{12} = m_B (b_{11} b_{12} - b_{10}^2); \quad a_{22} = m_D + m_B (b_{12}^2 + b_{10}^2)$$

коэффициенты инерции механизма.

Для определения коэффициентов жёсткости системы воспользуемся формулой (5), в которую входят ускорения точек приложения сил G , P_1 и P_2 , действующих на систему. Отметим, что эти силы постоянны по направлению.

Перепишем формулу (5) в виде:

$$c_{ij} = - \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial X_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \ddot{x}_k}{\partial \ddot{q}_j} + \frac{\partial Y_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \ddot{y}_k}{\partial \ddot{q}_j} + \frac{1}{2} X_k \cdot \frac{\partial^2 \ddot{x}_k}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} + \frac{1}{2} Y_k \cdot \frac{\partial^2 \ddot{y}_k}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right), \quad (13)$$

где X_k, Y_k – проекции k -й силы на оси координат.

На точки A и D действуют силы \vec{P}_1 и \vec{P}_2 упругости пружин 1 и 2 (рис. 3), также силы тяжести ползунов и вертикальные реакции направляющих, которые на рис. 3 не показаны (эти силы ортогональны обобщённым ускорениям, поэтому скалярные произведения указанных сил на обобщённые ускорения равны нулю). Запишем проекции сил упругости пружин на оси координат: $X_A = P_1 = c_1(f_{cr1} - x_A)$, $Y_A = 0$, $X_D = -P_2 = -c_2(x_D + f_{cr2})$, $Y_D = 0$.

Отметим, что так как на материальную точку B из внешних сил действует только сила тяжести, то $X_B = 0$, а $Y_B = -G$. Отсюда следует, что нет необходимости определять \ddot{x}_B .

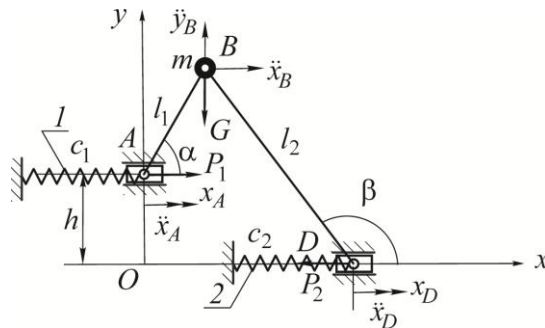


Рис. 3.

Для определения \ddot{y}_B предварительно найдём вторые производные от уравнений связей (8) по времени:

$$\begin{cases} \ddot{x}_A - l_1 \ddot{\alpha} \sin \alpha - l_1 \dot{\alpha}^2 \cos \alpha - \ddot{x}_D + l_2 \ddot{\beta} \sin \beta + l_2 \dot{\beta}^2 \cos \beta = 0; \\ l_1 \ddot{\alpha} \cos \alpha - l_1 \dot{\alpha}^2 \sin \alpha - l_2 \ddot{\beta} \cos \beta + l_2 \dot{\beta}^2 \sin \beta = 0. \end{cases}$$

Из полученных равенств выразим $\ddot{\alpha}$ через обобщённые скорости и обобщённые ускорения системы:

$$\ddot{\alpha} = d_1 \dot{\alpha}^2 + d_2 \dot{\beta}^2 + d_3 (\ddot{x}_A - \ddot{x}_D), \quad (14)$$

где $d_1 = -\frac{l_1 \sin \alpha \sin \beta + l_2 \cos \alpha \cos \beta}{l_2 \sin(\alpha - \beta)}$; $d_2 = -\frac{l_1 \sin^2 \beta + l_2 \cos^2 \beta}{l_1 \sin(\alpha - \beta)}$; $d_3 = -\frac{\cos \beta}{l_1 \sin(\alpha - \beta)}$.

Продифференцируем выражение (10) по времени:

$$\ddot{y}_B = l_1 \ddot{\alpha} \cos \alpha - l_1 \dot{\alpha}^2 \sin \alpha$$

и, подставив в полученный результат соотношения (9) и (14), приходим к равенству

$$\ddot{y}_B = \frac{e}{2}(\dot{x}_A - \dot{x}_D)^2 + (\ddot{x}_A - \ddot{x}_D)l_1d_3 \cos \alpha, \quad e = 2 \left[l_1 \cos \alpha (d_1k_1^2 + d_2k_2^2) - \frac{\cos^2 \beta}{l_1 \sin^2(\alpha - \beta)} \right].$$

Подставим эти соотношения в формулу (12) и определим коэффициенты жёсткости системы:

$$\begin{aligned} c_{11} &= -\sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial X_k}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \ddot{x}_k}{\partial \dot{q}_1} + \frac{\partial Y_k}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \ddot{y}_k}{\partial \dot{q}_1} + \frac{1}{2} X_k \cdot \frac{\partial^2 \ddot{x}_k}{\partial \dot{q}_1^2} + \frac{1}{2} Y_k \cdot \frac{\partial^2 \ddot{y}_k}{\partial \dot{q}_1^2} \right)_0 = \\ &= -\frac{\partial X_A}{\partial x_A} \cdot \frac{\partial \ddot{x}_A}{\partial \dot{x}_A} - \frac{\partial Y_B}{\partial x_A} \cdot \frac{\partial \ddot{y}_B}{\partial \dot{x}_A} - \frac{1}{2} Y_B \cdot \frac{\partial^2 \ddot{y}_B}{\partial \dot{x}_A^2} - + \frac{\partial X_D}{\partial x_A} \cdot \frac{\partial \ddot{x}_D}{\partial \dot{x}_A} = c_1 + eG_B; \\ c_{12} = c_{21} &= -\sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial X_k}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \ddot{x}_k}{\partial \dot{q}_2} + \frac{\partial Y_k}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \ddot{y}_k}{\partial \dot{q}_2} + \frac{1}{2} X_k \cdot \frac{\partial^2 \ddot{x}_k}{\partial \dot{q}_1 \partial \dot{q}_2} + \frac{1}{2} Y_k \cdot \frac{\partial^2 \ddot{y}_k}{\partial \dot{q}_1 \partial \dot{q}_2} \right)_0 = \\ &= -\frac{\partial X_A}{\partial x_A} \cdot \frac{\partial \ddot{x}_A}{\partial \dot{x}_D} - \frac{\partial Y_B}{\partial x_A} \cdot \frac{\partial \ddot{y}_B}{\partial \dot{x}_D} - \frac{1}{2} Y_B \cdot \frac{\partial^2 \ddot{y}_B}{\partial \dot{x}_A \partial \dot{x}_D} - + \frac{\partial X_D}{\partial x_A} \cdot \frac{\partial \ddot{x}_D}{\partial \dot{x}_D} = -eG_B; \\ c_{22} &= -\sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial X_k}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial \ddot{x}_k}{\partial \dot{q}_2} + \frac{\partial Y_k}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial \ddot{y}_k}{\partial \dot{q}_2} + \frac{1}{2} X_k \cdot \frac{\partial^2 \ddot{x}_k}{\partial \dot{q}_2^2} + \frac{1}{2} Y_k \cdot \frac{\partial^2 \ddot{y}_k}{\partial \dot{q}_2^2} \right)_0 = \\ &= -\frac{\partial X_A}{\partial x_D} \cdot \frac{\partial \ddot{x}_A}{\partial \dot{x}_D} - \frac{\partial Y_B}{\partial x_D} \cdot \frac{\partial \ddot{y}_B}{\partial \dot{x}_D} - \frac{1}{2} Y_B \cdot \frac{\partial^2 \ddot{y}_B}{\partial \dot{x}_D^2} - \frac{\partial X_D}{\partial x_D} \cdot \frac{\partial \ddot{x}_D}{\partial \dot{x}_D} = c_2 + eG_B. \end{aligned}$$

Матрицы инерции и жёсткости системы имеют вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Частоты свободных колебаний определим, используя стандартную процедуру пакета *Mathcad*:

$$\omega = \sqrt{\text{eigenvals}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C})} = \begin{pmatrix} 6,844 \\ 11,873 \end{pmatrix} \text{с}^{-1}.$$

Матрица форм колебаний имеет вид:

$$\mathbf{M} = \text{eigenvecs}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -0,45 & 1,125 \end{pmatrix}.$$

На рис. 4 и 5 представлены формы малых свободных колебаний механизма (первая форма колебаний – на рис. 4, вторая – на рис. 5).

Рассмотрим случай сил, постоянных по модулю, но изменяющихся по направлению. Найдем производную по времени от k -й силы \vec{P}_k :

$$\frac{d\vec{P}_k}{dt} = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{P}_k}{\partial q_j} \dot{q}_j.$$

Из этого равенства вытекает соотношение $\frac{\partial \vec{P}_k}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{d\vec{P}_k}{dt} \right)$.

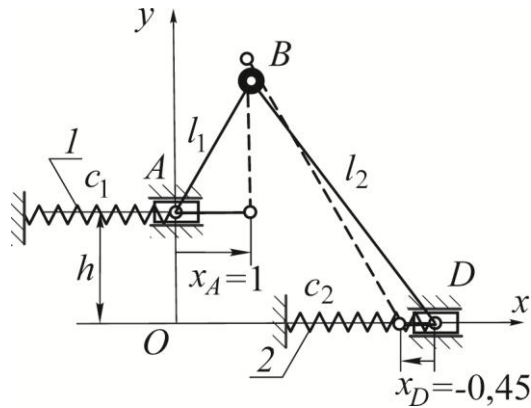


Рис. 4

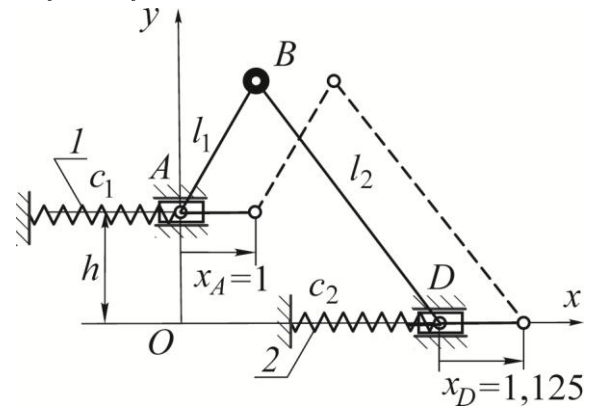


Рис. 5

Учитывая, что в рассматриваемом случае $|\vec{P}_k| = \text{const}$ и вектор силы изменяется только за счет его вращения, получаем $\frac{d\vec{P}_k}{dt} = \vec{\omega}_k \times \vec{P}_k$, где $\vec{\omega}_k$ – угловая скорость вращения вектора силы \vec{P}_k . В результате можно записать:

$$\frac{\partial \vec{P}_k}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (\vec{\omega}_k \times \vec{P}_k).$$

Тогда формулы (5) и (6) принимают вид:

$$c_{ij} = - \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (\vec{\omega}_k \times \vec{P}_k) \cdot \frac{\partial \vec{a}_k}{\partial \dot{q}_j} + \frac{1}{2} \vec{P}_k \cdot \frac{\partial^2 \vec{a}_k}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right)_0, \quad (15)$$

$$c = - \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}} (\vec{\omega}_k \times \vec{P}_k) \cdot \frac{\partial \vec{a}_k}{\partial \dot{q}} + \frac{1}{2} \vec{P}_k \cdot \frac{\partial^2 \vec{a}_k}{\partial \dot{q}^2} \right)_0. \quad (16)$$

В качестве примера рассмотрим шарнирный четырехзвенник O_1ABO_2 (рис. 6), который находится под действием сил \vec{P}_1 и \vec{P}_2 , приложенных в точках A и B , соответственно, и образующих постоянные углы $\alpha=90^\circ$ и $\beta=120^\circ$ с кривошипами $O_1A=l_1$ и $O_2B=l_2=0,5 l_1$. Считая, что механизм расположен в горизонтальной плоскости и в указанном на рис. 6 положении находится в покое, найти коэффициент жесткости c системы. Принять, что $AB=l_3=2l_1$.

В положении покоя системы между силами \vec{P}_1 и \vec{P}_2 должно выполняться соотношение, вытекающее из уравнений равновесия: $P_1 = \frac{\sqrt{6}}{4} P_2$. Используя понятие «мгновенный центр скоростей», можно выразить угловые скорости звеньев O_2B и AB через обобщённую скорость $\dot{\phi}_1$:

$$\dot{\phi}_2 = \frac{\sqrt{2}\dot{\phi}_1 l_1}{2l_2}, \quad \dot{\phi}_3 = \frac{\sqrt{2}\dot{\phi}_1 l_1}{2l_3}.$$

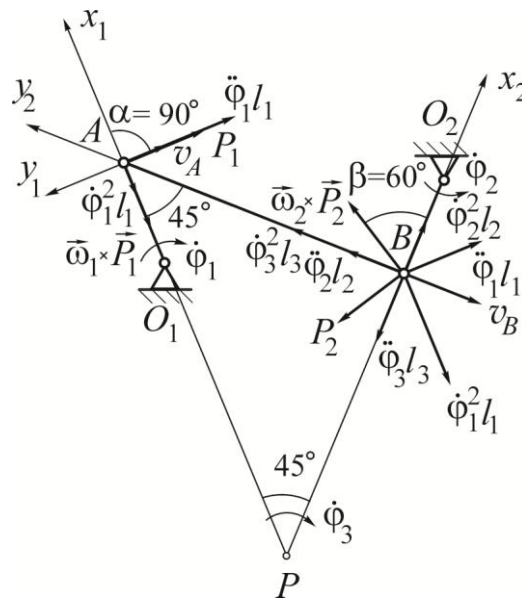


Рис. 6.

Воспользовавшись теоремой об ускорениях точек плоской фигуры, найдем проекции ускорений точек A и B на оси x_1Ay_1 и x_2By_2 , соответственно:

$$a_{Ax1} = -\dot{\phi}_1^2 l_1, \quad a_{Ay1} = -\ddot{\phi}_1 l_1, \\ a_{Bx2} = -\dot{\phi}_1^2 \frac{l_1^2}{2l_2}, \quad a_{By2} = \dot{\phi}_1^2 \left(\frac{l_1^2}{2l_3} - \frac{\sqrt{2}l_1}{2} \right) - \ddot{\phi}_1 l_1 \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Определим слагаемые, входящие в формулу (16):

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\phi}_1} (\vec{\omega}_1 \times \vec{P}_1) \cdot \frac{\partial \vec{a}_A}{\partial \ddot{\phi}_1} = 0, \quad \vec{P}_1 \cdot \frac{\partial^2 \vec{a}_A}{\partial \dot{\phi}_1^2} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}_1} (\vec{\omega}_2 \times \vec{P}_2) \cdot \frac{\partial \vec{a}_B}{\partial \ddot{\phi}_1} = \frac{l_1^2 P_2}{2l_2} \cos 15^\circ, \quad \vec{P}_2 \cdot \frac{\partial^2 \vec{a}_B}{\partial \dot{\phi}_1^2} = P_2 \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{l_1^2}{l_3} - \sqrt{2}l_1 \right) - \frac{l_1^2}{2l_3} \right].$$

Подставляя эти выражения в (16), находим коэффициент жесткости системы:

$$c = \frac{P_2}{2} \left(\frac{\sqrt{3}l_1^2}{2l_3} - \sqrt{6}l_1 + \frac{l_1^2}{l_2} \right) = \frac{P_2}{2} l_1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{6} + 2 \right) = 0,208P_2l_1.$$

Отметим, что при противоположном направлении сил \vec{P}_1 и \vec{P}_2 положение равновесия четырёхзвенника будет неустойчивым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Евграфов А.Н., Петров Г.Н.** Компьютерная анимация кинематических схем в программах Excel и Mathcad // Теория механизмов и машин. 2008. №1(11). С. 71-80.
2. **Зиборов К.А.** Решение векторных уравнений кинематики механизмов с помощью программы Mathcad / **К.А. Зиборов, И.Н. Мацюк, Э.М. Шляхов** // Теория механизмов и машин. 2008. №1(11). С. 64-70.
3. **Третьяков В.Н.** Использование программы Mathcad при определении скоростей и ускорений рычажных механизмов // Теория механизмов и машин. 2009. №2(14). С. 40-48.
4. **Зиборов К.А., Мацюк И.Н., Шляхов Э.М.** Силовой анализ механизмов с помощью программы Mathcad // Теория механизмов и машин. 2010. №1(15). С. 83-88.
5. **Слоущ А.В.** Свободное движение двухкоромыслового четырёхзвенника // Теория механизмов и машин. 2011. №1(17). С.62-68.
6. **Мацюк И.Н., Третьяков В.Н., Шляхов Э.М.** Кинематический анализ плоских рычажных механизмов высоких классов в программе Mathcad // Теория механизмов и машин. 2012. №1(19). С. 65-71.
7. **Мкртычев О.В.** Компьютерное моделирование при кинематическом анализе плоских механизмов // Теория механизмов и машин. 2012. №1(19). С. 46-53.
8. **Доронин Ф.А.** Свободные колебания шарнирного четырёхзвенника около особого положения покоя // Теория механизмов и машин. 2012. №1(19). С. 14-24.

REFERENCES

1. **Evgrafov A.N., Petrov G.N.** Kompyuternaya animatsiya kinematicheskikh skhem v programmakh excel i mathcad // Teoriya Mekhanizmov I Mashin. 2008. 1(11). Pp. 71-80.
2. **Ziborov K.A.** Reshenie vektornykh uravnenij kinematiki mekhanizmov s pomoschyu programmy mathcad. / **K.A. Ziborov, I.N. Matsyuk, E.M. Shlyakhov** // Teoriya Mekhanizmov I Mashin. 2008. 1(11). Pp. 64-70.
3. **Tretyakov V.N.** Ispolzovanie programmy mathcad pri opredelenii skorostej i uskorenij rychazhnykh mekhanizmov. // Teoriya Mekhanizmov I Mashin. 2009. 2(14). Pp. 40-48.
4. **Ziborov K.A., Matsyuk I.N., Shlyakhov E.M.** Silovoj analiz mekhanizmov s pomoschyu programmy mathcad. // Teoriya Mekhanizmov I Mashin. 2010. 1(15). Pp. 83-88.
5. **Slousch A.V.** Svobodnoe dvizhenie dvukhkoromyslovogo chetyrkhzvennika // Teoriya Mekhanizmov I Mashin. 2011. 1(17). Pp.62-68.
6. **Matsyuk I.N., Tretyakov V.N., Shlyakhov E.M.** Kinematicheskij analiz ploskikh rychazhnykh mekhanizmov vysokikh klassov v programme mathcad // Teoriya Mekhanizmov I Mashin. 2012. 1(19). Pp. 65-71.
7. **Mkrtychev O.V.** Kompyuternoe modelirovanie pri kinematicheskom analize ploskikh mekhanizmov. // teoriya mekhanizmov i mashin. 2012. 1(19). Pp. 46-53.
8. **Doronin F.A.** Svobodnye kolebaniya sharnirnogo chetyrkhzvennika okolo osobogo polozheniya pokoya. // Teoriya Mekhanizmov I Mashin. 2012. 1(19). Pp. 14-24.

Поступила в редакцию 06.04.2013