

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОСОБОГО ПОЛОЖЕНИЯ ШАРНИРНОГО ЧЕТЫРЕХЗВЕННИКА С УПРУГИМИ СВЯЗЯМИ

На страницах журнала регулярно рассматриваются вопросы, связанные с методикой определения особых положений плоских и пространственных рычажных механизмов, исследованием их свойств, применением графических, графоаналитических и аналитических методов к исследованию кинематики и динамики подобных механизмов [1-6].

Данная статья посвящена исследованию устойчивости особого положения шарнирного четырехзвенника, оснащённого упругими связями.

Хорошо известно, что положение равновесия консервативной механической системы является устойчивым, если её потенциальная энергия имеет в этом положении изолированный минимум. В ряде случаев для исследования устойчивости системы оказывается более эффективным использовать не потенциальную энергию, а выражение для обобщенной силы, либо использовать другие приемы.

В работе [7] обсуждался вопрос об определении частот малых свободных колебаний некоторой механической системы, около её особого положения покоя. В ней показано, что, несмотря на то, что система имеет одну степень свободы, её свободные колебания характеризуются двумя собственными частотами.

1. Соотношения между угловыми скоростями звеньев шарнирного четырехзвенника в особом положении

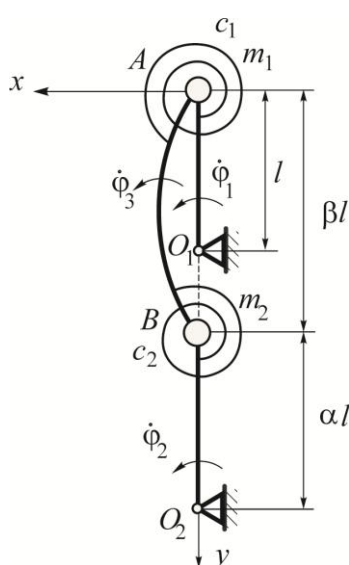


Рис. 1. Схема механизма

Рассмотрим шарнирный четырехзвенник O_1ABO_2 , занимающий положение, показанное на рис. 1 и называемое особым.

В представленном положении распределение скоростей точек и угловых скоростей звеньев механизма полностью не определяется теоремой о скоростях точек твердого тела. Для вычисления этих скоростей помимо теоремы о скоростях необходимо привлекать теорему об ускорениях точек твердого тела.

В статье [7] приведены формулы, связывающие угловые скорости $\dot{\phi}_2$ и $\dot{\phi}_3$ звеньев 2 и 3 с угловой скоростью $\dot{\phi}_1$ ведущего звена 1 рассматриваемого механизма:

$$\dot{\phi}_{2(1,2)} = \frac{\dot{\phi}_1}{\alpha + \beta} \left[1 \pm \sqrt{\frac{\beta}{\alpha} (\alpha + \beta - 1)} \right] = k_{2(1,2)} \dot{\phi}_1,$$

$$\dot{\phi}_{3(1,2)} = \frac{\dot{\phi}_1}{\alpha + \beta} \left[1 \mp \sqrt{\frac{\alpha}{\beta} (\alpha + \beta - 1)} \right] = k_{3(1,2)} \dot{\phi}_1,$$

где α и β – некоторые положительные безразмерные коэффициенты, характеризующие соотношения между длинами звеньев механизма;

$$k_{2(1,2)} = \frac{1}{\alpha + \beta} \left[1 \pm \sqrt{\frac{\beta}{\alpha} (\alpha + \beta - 1)} \right], \quad k_{3(1,2)} = \frac{1}{\alpha + \beta} \left[1 \mp \sqrt{\frac{\alpha}{\beta} (\alpha + \beta - 1)} \right].$$

Приведенные соотношения показывают, что при выполнении условия $\alpha \geq 1 - \beta$ заданному значению угловой скорости $\dot{\varphi}_1$ ведущего звена соответствуют по два набора значений угловых скоростей $\dot{\varphi}_2$ и $\dot{\varphi}_3$ ведомых звеньев 2 и 3.

2. Устойчивость особого положения шарнирного четырехзвенника

Будем считать, что звенья механизма невесомы, а в шарнирах A и B помещены материальные точки массами m_1 и m_2 , соответственно. Кроме того, между звеньями четырехзвенника имеются упругие связи в виде невесомых спиральных пружин с коэффициентами жёсткости c_1 и c_2 .

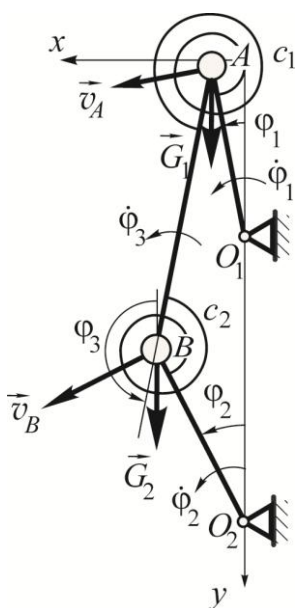


Рис. 2. Первая конфигурация системы

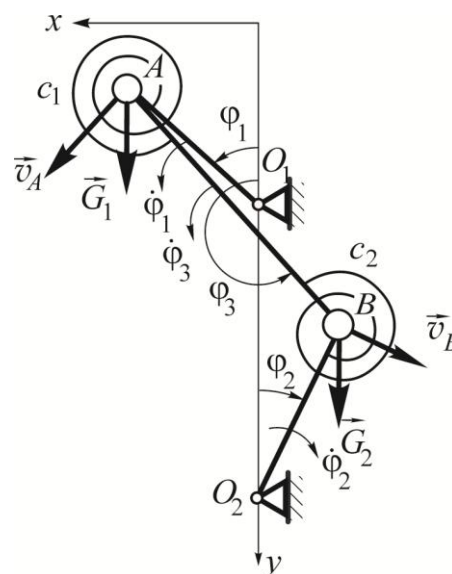


Рис. 3. Вторая конфигурация системы

Механизм расположен в вертикальной плоскости, а соотношение между длинами его звеньев удовлетворяет условию $\alpha \geq 1 - \beta$ (при выполнении этого неравенства обеспечивается подвижность звеньев четырехзвенника как абсолютно твердых тел).

Определим, при каких условиях положение покоя механизма является устойчивым.

За обобщенную координату примем угол φ_1 поворота кривошипа O_1A . Отклоним кривошип O_1A на малый угол φ_1 , сообщим ему угловую скорость $\dot{\varphi}_1$ и составим выражение для суммы мощностей сил тяжести $G_1 = m_1g$ и $G_2 = m_2g$ материальных точек и моментов сил упругости, приложенных к звеньям механизма (рис. 2 и 3):

$$\begin{aligned} N_{1,2} &= m_1 g v_1 \sin \varphi_1 + m_2 g v_2 \sin \varphi_2 - c_1 (\varphi_1 - \varphi_3) (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_3) - c_2 (\varphi_2 - \varphi_3) (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3) = \\ &= m_1 g l_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + m_2 g l_2 k_{2(1,2)} \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_2 - c_1 \varphi_1 \dot{\varphi}_1 (1 - k_{3(1,2)})^2 - c_2 \varphi_1 \dot{\varphi}_1 (k_{2(1,2)} - k_{3(1,2)})^2 = \\ &= \left[m_1 g l_1 \sin \varphi_1 + m_2 g l_2 k_{2(1,2)} \sin \varphi_2 - c_1 \varphi_1 (1 - k_{3(1,2)})^2 - c_2 \varphi_1 (k_{2(1,2)} - k_{3(1,2)})^2 \right] \dot{\varphi}_1 = Q_{1,2} \dot{\varphi}_1, \end{aligned}$$

где $Q_{1,2} = m_1 g l_1 \sin \varphi_1 + m_2 g l_2 k_{2(1,2)} \sin \varphi_2 - c_1 \varphi_1 (1 - k_{3(1,2)})^2 - c_2 \varphi_1 (k_{2(1,2)} - k_{3(1,2)})^2$ – обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате φ_1 .

Для малых значений углов φ_1 и φ_2 можно приближённо принять $\sin \varphi_1 \approx \varphi_1$ и $\sin \varphi_2 \approx \varphi_2$. Тогда:

$$Q_{1,2} = m_1 g l_1 \varphi_1 + m_2 g l_2 k_{2(1,2)}^2 \varphi_1 - c_1 \varphi_1 (1 - k_{3(1,2)})^2 - c_2 \varphi_1 (k_{2(1,2)} - k_{3(1,2)})^2.$$

Отсюда определяем квазиупругие коэффициенты, соответствующие двум возможным конфигурациям системы:

$$c_{(1,2)} = c_1 (1 - k_{3(1,2)})^2 + c_2 (k_{2(1,2)} - k_{3(1,2)})^2 - m_1 g l_1 - m_2 g l_2 k_{2(1,2)}^2.$$

Приведённые рассуждения показывают, что хотя рассматриваемая механическая система имеет одну степень свободы, существуют две формы потери устойчивости, представленные на рис. 2 и 3. Каждой из этих форм соответствует свой коэффициент жёсткости (эти коэффициенты различны).

Для того, чтобы равновесие системы было устойчиво, необходимо выполнение условия: коэффициенты жёсткости $c_{(1,2)}$ должны быть положительными, то есть должны выполняться неравенства:

$$c_{(1)} = c_1 (1 - k_{3(1)})^2 + c_2 (k_{2(1)} - k_{3(1)})^2 - m_1 g l_1 - m_2 g l_2 k_{2(1)}^2 > 0; \quad (1)$$

$$c_{(2)} = c_1 (1 - k_{3(2)})^2 + c_2 (k_{2(2)} - k_{3(2)})^2 - m_1 g l_1 - m_2 g l_2 k_{2(2)}^2 > 0. \quad (2)$$

Неравенства (1) и (2) образуют систему, решение которой зависит не только от значений m_1, m_2, c_1 и c_2 , но и от параметров α и β .

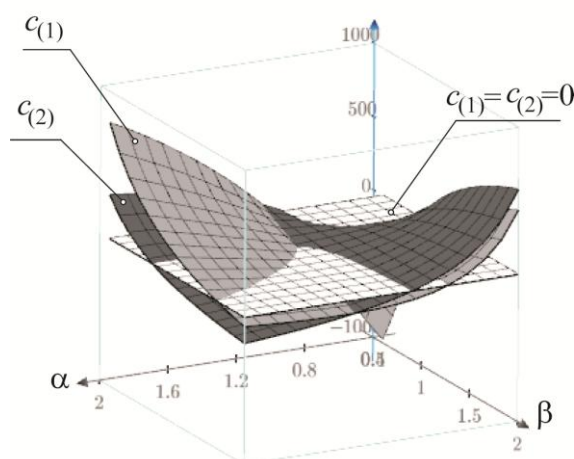


Рис. 4. Графики зависимостей коэффициентов жёсткости системы от параметров α и β

На рис. 4 представлены графики зависимостей коэффициентов жёсткости $c_{(1)}$ и $c_{(2)}$ от параметров α и β . Эти графики построены при следующих исходных данных: $m_1=100$ кг,

$m_2=60$ кг, $c_1=400$ Н·м, $c_2=800$ Н·м, $l=0,8$ м, параметры α и β изменяются в пределах: $\alpha=0,4\div 2$, $\beta=0,6\div 2$.

Графики показывают, что знаки коэффициентов жёсткости $c_{(1,2)}$ при прочих равных условиях зависят от параметров α и β . При этом множества значений α и β , при которых коэффициенты жёсткости $c_{(1)}$ и $c_{(2)}$ положительны, не совпадают. На рис. 5 заштрихованы множества значений α и β , которым соответствуют положительные значения коэффициента жёсткости $c_{(1)}$ (множество 1), а на рис. 6 – коэффициента жёсткости $c_{(2)}$ (множество 2).

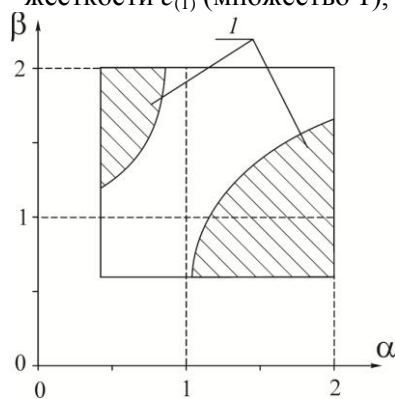


Рис. 5. Множество значений параметров α и β , при которых коэффициент жёсткости $c_{(1)}$ положителен

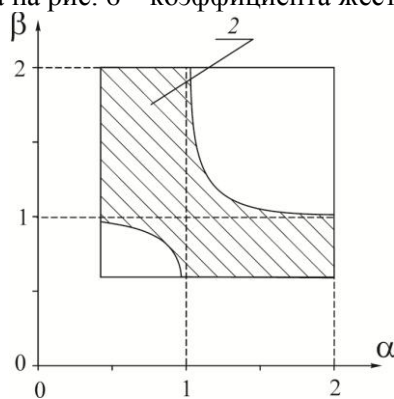


Рис. 6. Множество значений параметров α и β , при которых коэффициент жёсткости $c_{(2)}$ положителен

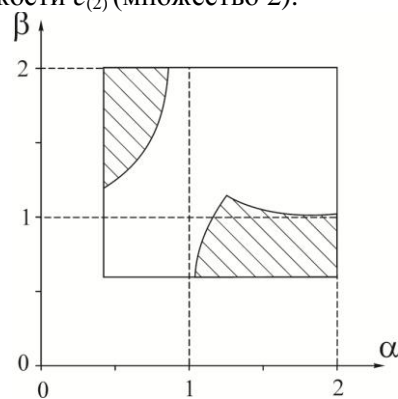


Рис. 7. Множество значений параметров α и β , при которых коэффициенты жёсткости $c_{(1)}$ и $c_{(2)}$ положительны

Очевидно, что рассматриваемое положение механической системы будет устойчивым только при тех значениях параметров α и β , при которых оба коэффициента жёсткости $c_{(1)}$ и $c_{(2)}$ больше нуля. Эти значения параметров принадлежат множеству, представленному на рис. 7 и являющемуся пересечением множеств 1 и 2.

Вид графиков, изображённых на рис. 4-7, существенно зависит от масс материальных точек, коэффициентов жёсткости пружин и длин стержней (от параметра l). Так, при $l \geq 1,3$ м множество значений параметров α и β , при которых оба коэффициента жёсткости $c_{(1)}$ и $c_{(2)}$ больше нуля, пусто (это справедливо для принятых значений остальных величин).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Слоущ А.В. Свободное движение двухкоромыслового четырёхзвенника // Теория механизмов и машин. 2011. №1. С. 62-68.
2. Верховод В.П. Использование программы Mathcad при синтезе передаточных рычажных механизмов. // Теория механизмов и машин. 2011. №1. С. 69-76.
3. Третьяков В.М. Использование программы Mathcad при определении скоростей и ускорений рычажных механизмов. // Теория механизмов и машин. 2009. № 2. С. 40-48.
4. Зиборов К.А., Мацюк И.Н., Шляхов Э.М. Решение векторных уравнений кинематики механизмов с помощью программы Mathcad. // Теория механизмов и машин. 2008. №1(11). С. 64-70.
5. Евграфов А.Н., Петров Г.Н. Геометрический и кинетостатический анализ плоских рычажных механизмов второго класса. // Теория механизмов и машин. 2003. №2. С. 50-63.
6. Евграфов А.Н., Петров Г.Н. Компьютерная анимация кинематических схем в программах Excel и Mathcad. // Теория механизмов и машин. 2008. №1(11). С. 71-80.
7. Доронин Ф.А. Свободные колебания шарнирного четырёхзвенника около особого положения покоя. // Теория механизмов и машин. 2012. №1. С. 16-23.

Поступила в редакцию 19.11.2012

После доработки 25.02.2013