

ДИНАМИКА ТОРМОЗНОГО УСТРОЙСТВА ДЛЯ ЭКСТРЕННОГО СПУСКА

1. Введение

При аварийной ситуации для экстренной эвакуации людей из зданий и других высотных сооружений используются специальные устройства, различающиеся габаритами, высотой аварийного объекта, способами торможения, допускаемыми максимальными скоростями и ускорениями, а также конструктивными признаками. Важной особенностью систем экстренного спуска является недопустимость применения электропривода из-за неизбежного отключения от сети. Анализ материалов из интернета показал, что среди подобных устройств можно выделить системы портативного вида и стационарные системы различного уровня сложности. К первой группе можно отнести системы типа «Самоспас», «Моноспас», «Слип-эвакуатор», «Шанс-1» и др.

Одним из важных требований, предъявляемых к устройствам экстренного спуска, является ограничение максимальных ускорений. В таблице приведены некоторые допускаемые значения ускорений, характерные для подобных ситуаций.

Таблица

Ситуация	Ускорения
Пассажир в самолете при взлете	1,5g
Парашютист при раскрытии парашюта (при изменении скорости от 60 м/с до 5 м/с)	5g
Парашютист при приземлении со скоростью 6 м/с	1,8g
Космонавты при спуске в космическом корабле «Союз»	(3 – 4)g
Перегрузка (длительная), соответствующая пределу физиологических возможностей человека	(8 – 10)g
При отрицательных (направленных вверх) ускорениях допускаемая перегрузка значительно ниже	(2 – 3)g

Следует, однако, отметить, что в рассматриваемой ситуации из-за отсутствия предварительной тренировки спускающегося человека приведенные в таблице значения должны быть снижены до (1–2)g по тормозным ускорениям и примерно до 2 м/с по конечной скорости спуска. При использовании этих устройств каскадэрами приведенные значения могут быть повышены.

В данной работе рассматривается одна из разновидностей устройств стационарного типа, обеспечивающее быстрый спуск и плавное торможение, что гарантирует безопасность на протяжении всего пути. Конструктивная схема исследованного устройства была выявлена на базе анализа фрагментов видеофильма об одной из разработок Лаборатории взрывных идей (США) – «Спасение из горящего небоскрёба» (Discovery: Smash Lab. Season 1. Episode 06. High-Rise Escape. 2007). Один из этих фрагментов приведён на рис. 1.



Рис. 1. Устройство экстренного спуска

Данное устройство (рис. 2) состоит из спускающегося объекта 1, троса 2, намотанного на барабан 3 с двумя цилиндрическими участками – большого и малого диаметра (l_1, l_3). Между ними располагается участок l_2 конусообразной формы. На оси цилиндра жёстко закреплены лопасти 4, создающие при вращении аэродинамическое сопротивление, пропорциональное квадрату скорости и страховочный ручной тормоз 5, реализующий постоянный момент сопротивления. Кроме того, система может быть снабжена магнитным тормозом, создающим момент сопротивления, пропорциональный скорости.

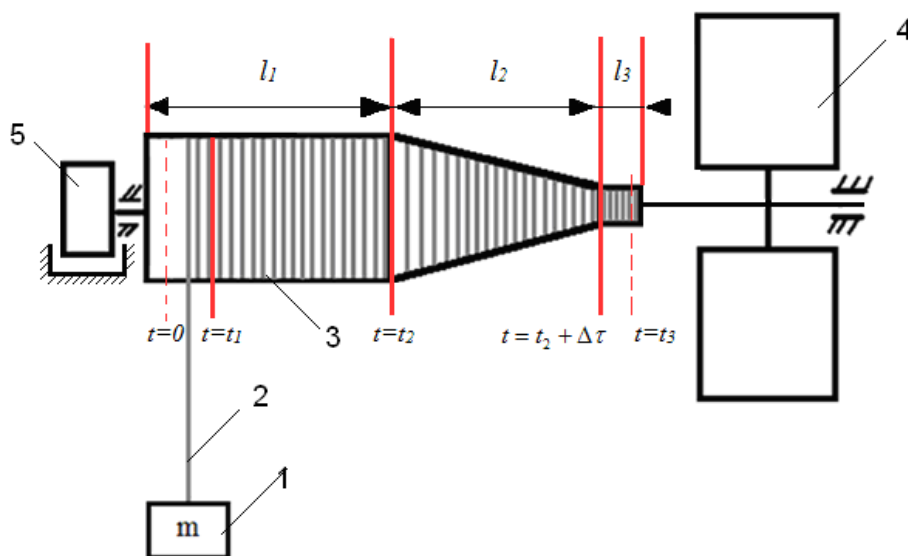


Рис. 2. Схема устройства для экстренного спуска

За исключением материалов описательного характера авторам не удалось обнаружить более полную информацию о рассматриваемом устройстве, которая бы включала аналитическое описание динамики экстренного спуска. Некоторые сведения, отдалённо связанные с данной проблемой, имеются в публикациях, посвящённых торможению парашютов, автомобилей, спуску альпинистов [1, 2, 3]. Задача, поставленная в данной статье, на наш взгляд, представляет как научно-практический, так и методологический интерес при изучении дисциплин механического цикла.

2. Математическое описание экстренного спуска

Спуск состоит из трех этапов.

Э т а п 1 ($t \leq t_1$): Торможение с выходом на установившийся режим спуска с заданной постоянной скоростью. Эта скорость должна быть достаточно велика, что необходимо для преодоления опасных зон вблизи горящих этажей и сокращения времени безопасного спуска.

Э т а п 2 ($t_1 \leq t \leq t_2$): Спуск с постоянной скоростью.

Э т а п 3 ($t_2 \leq t \leq t + \tau$): Снижение скорости спуска до уровня безопасного приземления.

Итак, на начальном участке спуска груз «падает» при нарастающем по мере разгона сопротивлении до достижения определённой скорости и далее на некотором участке движется равномерно. После перехода зоны размотки троса на конусообразный участок барабана его угловая скорость растёт, что приводит к увеличению тормозного момента и снижению скорости до допустимых значений. Спуск описывается нелинейным дифференциальным уравнением Риккати [4, 5] (за положительное направление ниже принято направление вниз):

$$\frac{d(J\omega)}{dt} = mg\rho(t) - M_* - \zeta\omega^2 - \xi\omega, \quad (1)$$

где $J = J_0 + m\rho^2$; J_0 – момент инерции барабана; m – масса спускаемого объекта; $\rho(t)$ – переменный радиус барабана на соответствующих участках (см. ниже); ω – угловая скорость; M_* – постоянный момент сопротивления; ζ, ξ – коэффициенты при соответствующих моментах сопротивления;

$$\rho(t) = \begin{cases} r_0 = \text{const}, & (t \leq t_2); \\ r(t), & (t_2 \leq t \leq t_2 + \Delta\tau); \\ r_0 = \text{const}, & (t_2 + \Delta\tau \leq t \leq t_3). \end{cases} \quad (2)$$

Здесь r_0, r_1 – радиусы цилиндрических участков барабана, $r(t)$ – переменный радиус участка конусообразной формы.

В общем случае уравнение (1) приводится к виду

$$\dot{\omega} = -L_2(t)\omega^2 - L_1(t)\omega + L_0(t), \quad (3)$$

где $L_0(t) = M(t)/J(t)$, $L_1(t) = [\xi + \Delta\dot{J}(t)]/J(t)$, $L_2(t) = \zeta/J(t)$.

Уравнение (3) с помощью подстановки

$$\dot{\omega} = -\frac{\dot{u}}{L_2(t)u} \quad (4)$$

приводится к форме линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами

$$\ddot{u} + 2n(t)\dot{u} - p^2(t)u = 0, \quad (5)$$

где $n(t) = 0,5(\dot{L}_2 / L_2 + L_1)$; $p^2(t) = L_0 L_2$.

Построение приближённого аналитического решения уравнения (4) на базе метода условного осциллятора приведено в статье [6]. Ниже анализ этого уравнения проведён при учёте специфических особенностей данной задачи.

3. Этап 1 ($t \leq t_1$)

На данном этапе происходит торможение падающего объекта с последующим выходом на установившийся режим. Определим установившуюся угловую скорость барабана, соответствующую линейную скорость объекта и момент начала установившегося движения. Уравнение (1) на этом участке принимает вид:

$$(J_0 + mr_0)\dot{\omega} + \zeta\omega^2 + \xi\omega = mgr_0. \quad (6)$$

Таким образом, на данном этапе $L_0 = mgr_0 / J = \text{const}$; $L_1 = \zeta / J$; $L_2 = \xi / J$. При этом уравнение (5) может быть записано в виде

$$\ddot{u} + \xi J^{-1}\dot{u} - \zeta mgr_0 J^{-2}u = 0. \quad (7)$$

Решением этого уравнения служит

$$u = e^{-nt} [C_1 \text{ch } p_1 t + C_2 \text{sh } p_1 t] = D e^{-nt} \text{ch}(p_1 t + \alpha), \quad (8)$$

где $n = 0,5\xi / J$; $p_1 = \sqrt{p^2 + n^2}$; $p = \sqrt{\zeta mgr_0} / J$; $D = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$; $\alpha = \text{Arth}(C_2 / C_1)$.

(При реальных значениях параметров $n \ll p$, $p_1 \approx p$). После подстановки (8) в (4) получаем

$$\omega \approx \zeta^{-1} \sqrt{mgr_0 \zeta + 0,25\xi^2} \text{th}(p_1 t + \alpha). \quad (9)$$

В окончательной зависимости (9) сохранилась лишь одна произвольная постоянная α , поскольку исходное дифференциальное уравнение (6) первого порядка. При $t = 0$ система находилась в покое, $\alpha = 0$. При $t \rightarrow \infty$ имеем $\text{th}(p_1 t) \rightarrow 1$, а следовательно, согласно (9):

$$\omega \rightarrow \omega_* = \zeta^{-1} \sqrt{mgr_0 \zeta + 0,25\xi^2}; \quad v \rightarrow v_* = \omega_* r_0, \quad (10)$$

где v , v_* – скорость спуска и её установившееся значение.

Обратим внимание на кажущуюся парадоксальность полученного результата, состоящую в том, что установившееся значение скоростей не зависит от момента инерции барабана J . Однако этот результат вытекает непосредственно из исходного уравнения (6). Действительно, при установившемся режиме имеем $\varepsilon = \dot{\omega} = 0$. При этом значение ω_* определяется из квадратного уравнения

$$\zeta\omega_*^2 + \xi\omega_* - mgr_0 = 0.$$

Отсюда

$$\omega_* = (-\xi + \sqrt{\xi^2 + 4mgr_0\zeta}) / (2\zeta). \quad (11)$$

Формула (11) является точной, в то время как в формулах (9), (10) учтена малость параметра n . Как показал анализ, на этапе 1 использование магнитного торможения не эффективно. Это объясняется тем, что торможение происходит при больших скоростях, когда аэродинамическое сопротивление играет определяющую роль. Исходя из этих соображений, на данном этапе примем $\xi = 0$. Тогда

$$\omega_* = \sqrt{\zeta^{-1}mgr_0} ; v_* = r_0\sqrt{\zeta^{-1}mgr_0}. \quad (12)$$

На рис. 3 приведен график $v_*(\zeta)$, построенный по формуле (12) при $r_0 = 0,2\text{ м}$, $m = 100\text{ кг}$.

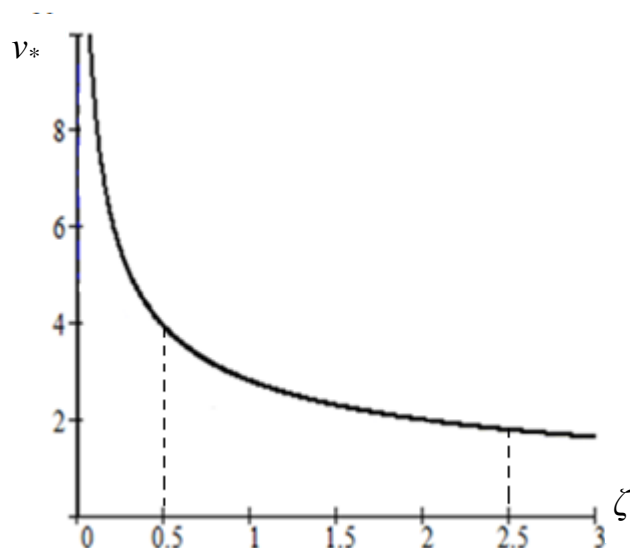


Рис. 3. График зависимости установившегося значения скорости от параметра ζ

На выделённом участке графика пятикратному изменению параметра ζ отвечает двукратное изменение v_* . При $\zeta \geq (1 \div 1,5)$ дальнейшее увеличение этого параметра нецелесообразно.

Далее вернёмся к анализу влияния момента инерции барабана J_0 . Полученные выше скорости установившегося движения, как было отмечено, соответствует бесконечному промежутку времени, что, разумеется, не соответствует реальным условиям. Для оценки времени установления t_1 воспользуемся следующей оценкой [7]:

$$\text{Arth}(1 - \Delta) = \frac{1}{2} \ln \frac{2}{\Delta} - \frac{\Delta}{4},$$

где Δ – допускаемое отклонение.

Тогда, принимая $\Delta = 0,02$, получаем

$$t_1 = 0,5(\ln 20 - 0,05)J^{-1}\sqrt{\zeta mgr_0}. \quad (13)$$

На рис. 4 приведен график $t_1(\zeta)$ при $J_0 = 4,8 \hat{\omega}^2$ и принятых выше исходных данных.

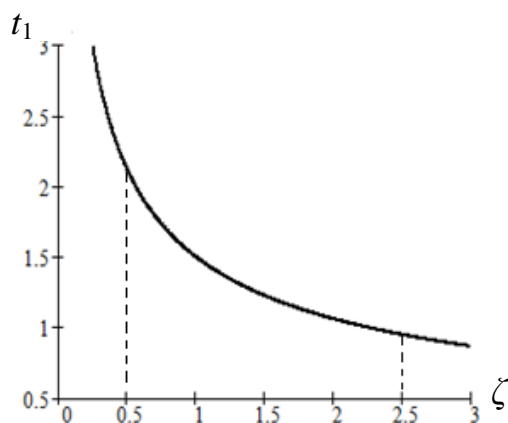


Рис. 4. График зависимости времени перехода в установившийся режим от параметра ζ

На указанном диапазоне изменения ζ в отличие от установившейся скорости влияние этого параметра оказывается более существенным. На рис. 5. представлен график на котором представлено семейство кривых, иллюстрирующее изменение скорости в зависимости от коэффициента аэродинамического сопротивления

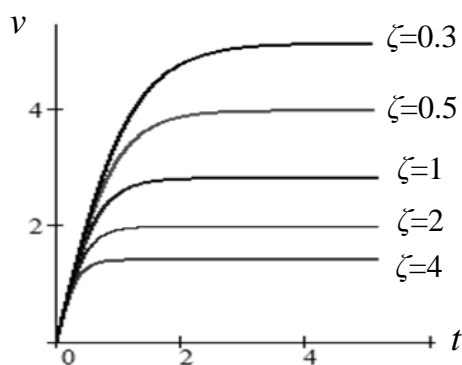


Рис. 5. График выхода на установившееся движение

Ускорения на рассматриваемом этапе движения при $\xi = 0$ описываются зависимостью

$$w = \frac{mgr_0}{J \operatorname{ch}^2 p(\zeta)}. \quad (14)$$

Параметр ζ , как и следовало ожидать, в основном влияет на длительность переходного процесса (рис. 6).

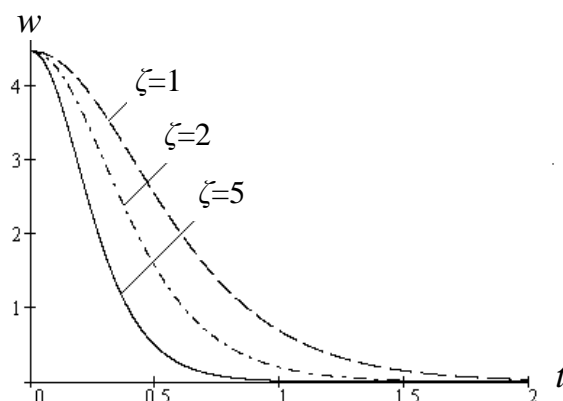


Рис. 6. Семейство кривых $w(t, \zeta)$

Представляет интерес степень отличия начального ускорения от ускорения свободного падения: $w(0) = g / (\kappa + 1)$, где $\kappa = J_0 / (mr_0^2)$. В частности, если, например, момент инерции барабана будет в 9 раз превосходить mr_0^2 , то даже при отсутствии момента сопротивления ускорение спускающегося объекта окажется на порядок ниже, чем g . Однако, чрезмерно увеличение отношения κ не желательно из-за существенного роста длительности спуска и уменьшения скорости.

Для определения перемещения груза на этом этапе проинтегрируем (9):

$$y = \int_0^t v dt = \frac{r_0 J}{\zeta} \ln(\operatorname{ch} pt). \quad (15)$$

4. Этапы 2, 3 ($t \geq t_1$)

На этапе 2 спуск осуществляется в режиме установившегося движения с постоянной скоростью $v = v_*$. При этом $y = \frac{r_0 J}{\zeta} \ln(\operatorname{ch} pt_1) + v_*(t - t_1)$.

На этапе 3, как уже отмечалось, происходит дополнительное торможение, при котором следует обеспечить приемлемые значения скоростей и ускорений в конце спуска. Дополнительное торможение возникает при переходе троса на конусообразный участок барабана. На этом участке уменьшение радиуса барабана создаёт предпосылки для увеличения его угловой скорости, однако при этом одновременно возрастают тормозные моменты. В результате происходит торможение спуска.

В отличие от этапа 1, уравнения (1), (3), (5) имеют переменные коэффициенты. Как известно, при этом уравнение Риккати в общем случае не имеет точного решения. Ниже будут рассмотрены некоторые подходы к построению решений.

Вариант 1. Сначала воспользуемся аналитическим способом, базирующимся на методе условного осциллятора, который был разработан применительно к решению задач колебаний систем с переменными параметрами [8, 9]. В статье [6] приведена модификация этого метода для аperiодических режимов, описываемых гиперболическими функциями.

Дифференциальное уравнение (5) приводится к виду

$$\ddot{u}_1 - p_1^2(t)u_1 = 0, \quad (16)$$

где $p_1 = \sqrt{p^2 + n^2 + \dot{n}}$; $n = (\dot{J} + 0,5\xi) / J$.

Можно показать [9], что уравнение (16) имеет точное аналитическое решение, если функция $p_1(t)$ принадлежит семейству

$$p_1(t) = [p_1(t_2)][b(t-t_2)+1]^{-2}. \quad (17)$$

Здесь b – константа, которая в нашем случае определяется как $b = (v^{-0.5} - 1) / (p_1(t_2)\tau)$, где τ – длительность этапа 3; $v = p_1(t_2 + \tau) / p_1(t_2)$. Тогда

$$\omega = \omega_* - p_1(t_2)\zeta^{-1} \text{th } \Phi(t-t_2), \quad (18)$$

где

$$\Phi(t) = p_1(t_2)(t-t_2) / [b(t-t_2)+1]. \quad (19)$$

На основании формул (17)–(20) скорость спуска определяем как $v(t) = \omega(t)r(t)$. Пусть на данном этапе радиус барабана изменяется согласно зависимости

$$r(t) = r_0 \left\{ 0,25 + 0,375 \left[1 + \cos \pi \frac{t-t_2}{\tau} \right] \right\}. \quad (20)$$

На рис. 7 приведены графики изменения скорости и ускорений. Дополнительно к ранее использованным исходным данным принято: $r_0 = 0,2$ м; $r_1 = 0,05$ м; $t_2 = 10$ с; $\tau = 3,4$ с.

Несмотря на то, что здесь использована модификация точного решения уравнения Риккати, решение данной задачи в целом является приближённым. Дело в том, что изменение радиуса барабана во времени, строго говоря, условие (17) учитывает лишь граничные значения функции $r(t)$, поэтому функцию (20) следует считать аппроксимирующей зависимостью.

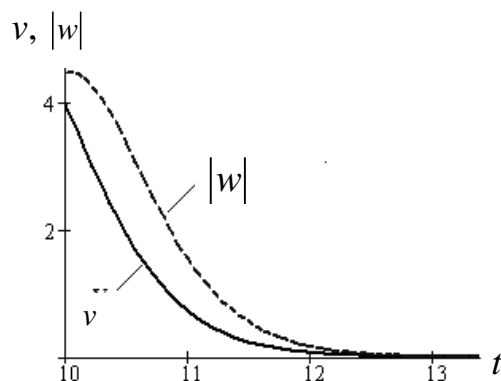


Рис. 7. Графики скорости и ускорений (вариант 1)

Если при тех же исходных данных воспользоваться частным случаем метода условного осциллятора, соответствующим ВКБ-приближению первого порядка [6], то угловая скорость на данном этапе определяются следующей зависимостью:

$$\omega = [n + 0,5 \dot{p}_1 / p + p_1 \text{th}(\Phi(t) + \alpha)] J \zeta^{-1} + C.$$

Здесь $\Phi(t) = \int_{t_0}^t p_1(t) dt$; C – произвольная постоянная, которую находим из условия

$$\omega(t_0) = \omega_*.$$

Этой зависимости соответствуют графики, приведенные на рис. 8. Угловая скорость растёт и стремится к новому установившемуся значению. При этом линейная скорость спуска сначала несколько возрастает, а затем за счёт роста тормозного момента снижается.

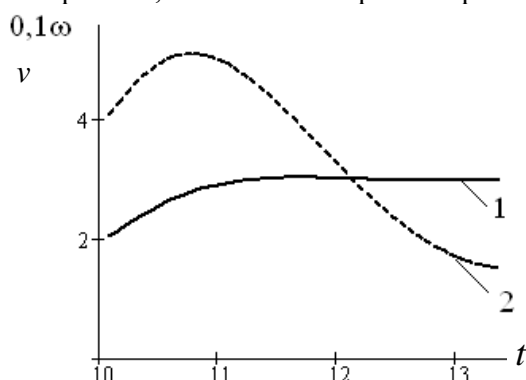


Рис. 8. Графики $\omega(t)$ и $v(t)$ (кривые 1 и 2)

При увеличении параметра ζ максимум v к моменту времени t_0 , а по величине – к v_* .

Вариант 2. Зададимся законом изменения кинематических характеристик на данном этапе (рис. 9). Тем самым в отличие от варианта 1 решается первая задача динамики.

$$v = 0,5 v_* [1 + \cos(\pi \frac{t-t_2}{\tau})]; \quad w = -0,5 v_* \pi \tau^{-1} \sin(\pi \frac{t-t_2}{\tau}). \quad (21)$$

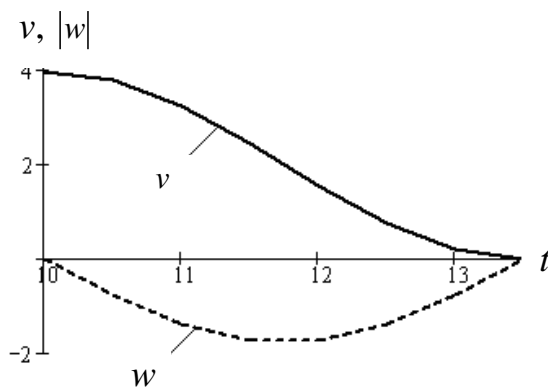


Рис. 9. Графики скорости и ускорений (вариант 2)

Исходное дифференциальное уравнение (1) представим в виде

$$(w - g)mr^3 + 2mv\dot{r}r^2 + (J_0 + \xi v)r + \zeta v^2 = 0. \quad (22)$$

При учёте (21) уравнение (22) относительно $r(t)$ представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка с переменными коэффициентами. Как показал анализ, практически без потери точности расчёта можно усреднить на данном участке производную радиуса барабана, приняв $\dot{r} \approx \Delta r / \tau$. Тогда (22) трансформируется в алгебраическое уравнение, решением которого является искомая функция $r(t)$. На рис.10 приведён график этой функции для приведенных выше исходных данных (кривая 1). Пунктиром показано решение при $\dot{r} = 0$. Практически обе кривые совпадают.

Следует учесть, что, исходя из условий прочности и по конструктивным соображениям, данный график не может быть реализован полностью. При этом нижняя часть графика «отсекается» заданным минимальным значением радиуса (линия 2). Это условие при учтённых средствах торможения не может быть реализовано, так как при $v = 0$ моменты сопротивления также обращаются в нуль. В частности, в рассматриваемом примере при $r_{\min} = 0,05$ м требуется с помощью ручного тормоза приложить момент не ниже 5 Нм.

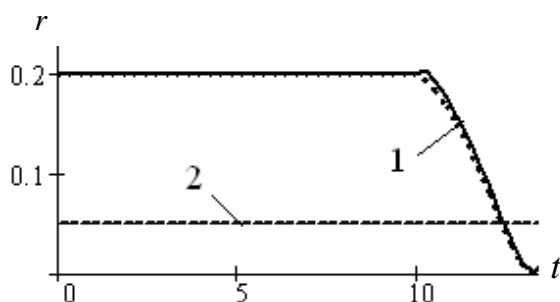


Рис. 10. График $r(t)$

Вариант 3. В этом варианте в определённой степени объединяются динамические и конструктивные требования, предъявляемые к устройству экстренного спуска. Зададимся функцией $r(t)$ в форме (20). Рассматриваемый этап дополнительного торможения является кратковременным, поэтому воспользуемся численным интегрированием уравнения (3), не опасаясь большой накопленной погрешности.

На рис. 11 приведены сводные графики кинематических характеристик для всех этапов спуска.

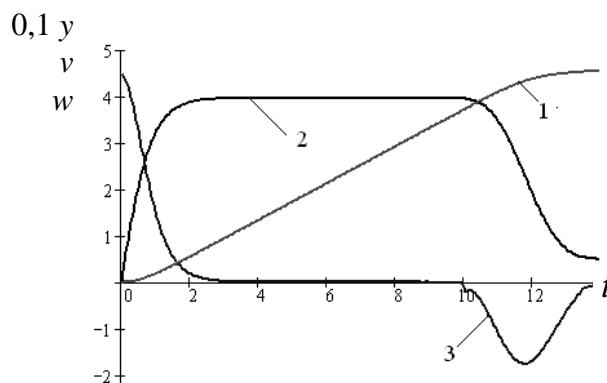


Рис. 11. Графики кинематических характеристик: 1 – y ; 2 – v ; 3 – w

Судя по фрагменту фотографии (см. рис. 1), на барабане этапе 3 отвечает коническая поверхность. При этом на данном участке $r(t) = r_0 [1 - 0,75(t - t_2) / \tau]$. Динамическое исследование для этого случая (рис. 12) показало, что скачкообразный характер $\dot{r}(t)$ в начале и конце конуса приводит к скачкам ускорений и возбуждению свободных колебаний человека на тросе. Этот эффект также наблюдался в видео фильме (см. ссылку во введении).

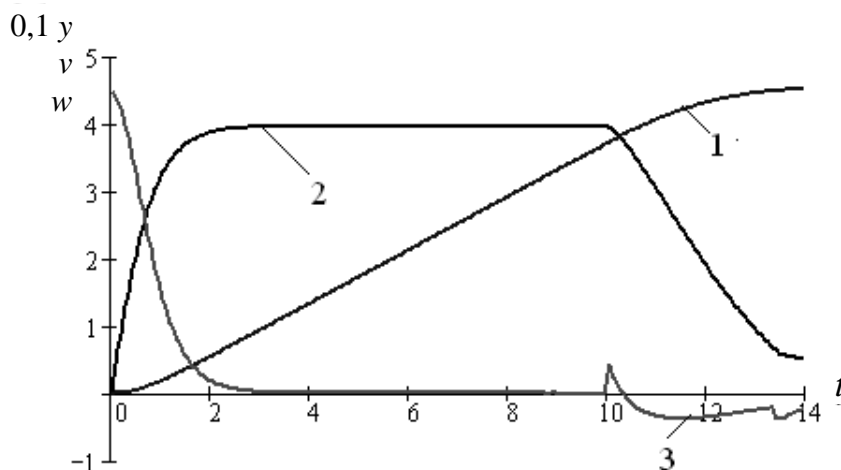


Рис. 12. Графики кинематических характеристик при коническом участке вала: 1 – v ; 2 – w ; 3 – w

4. Определение профиля конусообразного участка вала при заданной функции $r(t)$

Выше при расчёте характеристик спуска мы задавали, либо определяли радиус барабана как функцию времени. Но для того, чтобы профилировать конусообразную часть барабана, нужно задавать радиус барабана как функцию координаты его оси x . При изготовлении цилиндрических и конических участков барабана эта операция реализуется непосредственно настройками станка. Однако, как было выявлено выше, функция $r(t)$ может не соответствовать этим частным случаям. Для трансформации функции $r(t)$ в функцию $r(x)$ воспользуемся следующими соображениями. При однослойной намотке троса на барабан его поверхность «покрывается» тросом. Усредняя радиус барабана на одном витке и приравнявая элементарные площади поверхностей витка и барабана, имеем

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{v(t)D}{\pi[2r(t) + D]}, \quad (23)$$

где D – диаметр троса.

Отсюда следует:

$$x(t) = \frac{D}{\pi} \int_0^t \frac{v(t)}{2r(t) + D} dt. \quad (24)$$

Использование зависимостей $r(t)$ и $x(t)$ позволяют исключить параметр t . На рис. 13 приведён график $r(x)$, построенный на основании зависимостей (20) и (24).

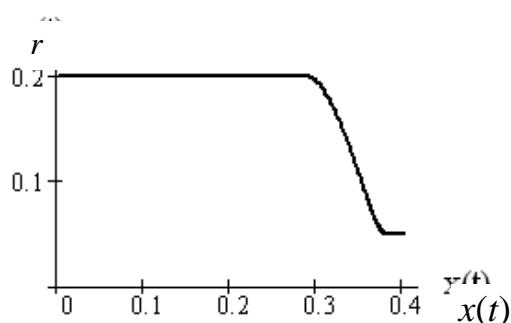


Рис. 13. График $r(x)$

Выше при динамическом анализе момент инерции барабана предполагался заданным исходя из рациональных конструктивных соображений. При предварительной оценке можно воспользоваться значением момента инерции цилиндра с радиусом r_0 и длиной, которая определяется исходя из максимальной высоты спуска. Полученное таким образом значение будет несколько превышать требуемое из-за уменьшения радиуса на конусообразном участке. При этом следует иметь в виду, что согласно (14) это превышение приведет к снижению начального ускорения и скорости на участке равномерного спуска. При необходимости более точного определения момента инерции при однослойной намотке троса можно воспользоваться следующей зависимостью:

$$J_0 = \pi\gamma \int_0^{t_{\max}} r^4(t) \frac{dx}{dt} dt,$$

где, γ – плотность; dx/dt – см. формулу (23).

При многослойной намотке троса момент инерции барабана может быть значительно уменьшен.

5. О некоторых направлениях совершенствования устройства спуска

При дальнейшем совершенствовании рассматриваемого устройства могут возникнуть проблемы, связанные с учётом разброса значений веса спускаемого груза и высоты спуска. На первый взгляд, вторая из этих проблем легко решается, поскольку, как уже отмечалось во введении, речь идёт об устройстве стационарного типа, когда высота здания известна, и соответствующие настройки системы могут быть произведены заранее. Остановимся на этих проблемах подробнее. С достаточной точностью при однослойной намотке троса на барабан связь между высотой спуска и кинематическими характеристиками описывается следующей зависимостью:

$$h = y_{\max} = \bar{v}_1 t_1 + v_*(t_2 - t_1) + \bar{v}_3 \tau + \Delta. \quad (25)$$

Здесь \bar{v}_1, \bar{v}_3 – средние скорости на соответствующих этапах спуска; v_* – скорость установившегося движения (см. (12)); Δ – малый интервал спуска, отвечающий участку барабана ℓ_3 (см. рис. 2) и регулируемый ручным тормозом.

В частности, для законов движения, отвечающих зависимостям (20), (21), имеем $\bar{v}_1 = 2v_*/\pi$; $\bar{v}_3 = v_*/2$. Таким образом, скорости на всех этапах зависят от v_* . Сумма первых двух слагаемых зависимости (25) равна длине троса, намотанного на цилиндрический участок барабана (см. рис. 2), а третье слагаемое – длине троса на конусообразном участке.

Эту длину при фиксированном значении v_* можно изменять за счёт варьирования параметрами t_2 и τ . Возникает вопрос, можно ли считать v_* фиксированным параметром? Согласно зависимости (12) эта скорость пропорциональна \sqrt{m} , поэтому для уменьшения влияния массы варьируемая составляющая не должна превосходить определённого уровня. Это может быть достигнуто увеличением постоянной составляющей, а именно, – массой спускаемой платформы. Другая возможность связана с повышением момента инерции барабана. Однако при этом снижается скорость спуска.

Оценивая спуск с энергетических позиций, отметим, что кинетическая энергия системы в начале и конце движения равна нулю. Таким образом, потенциальная энергия практически полностью расходуется на преодоление моментов сопротивления:

$$mgh \cong \int_0^{t_2} (\zeta\omega^3 + \xi\omega^2) dt. \quad (26)$$

Приближённый характер этой зависимости связан лишь с применением ручного торможения в конце спуска и неучтёнными потерями, возникающими при трении. Формула (26) даёт возможность оценить эффективность обоих способов торможения и выбрать рациональные значения параметров. Представляет интерес возможность настройки системы спуска изменением момента аэродинамического сопротивления за счёт поворота лопастей тормозного устройства.

По-видимому, попытки дальнейшего совершенствования исследованного устройства неизбежно приведут к необходимости управления процессом спуска. В частности, стабилизацию значения v_* можно осуществить установкой датчика скорости спуска, управляющим магнитным тормозом. Эта задача, однако, требует отдельного рассмотрения. Кроме того, необходим более обстоятельный анализ достоинств и недостатков рассматриваемого устройства по сравнению аналогичными устройствами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Чупркин В.М.** Динамика парашютных систем на этапе спуска.– М.:МАИ-ПРИНТ, 2008. –184 с.
2. **Цитович П.С., Альгин В.Б.** Динамика автомобиля.– Минск, Наука и техника, 1981. – 191 с.
3. **Прентковский О. Печелюнас Р.** Динамика транспортного средства в момент экстренного спуска.– Proceedings of International Conference Rel. Start, 2004. Pp. 407 – 415.
4. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров.– М.: Наука, 1968. – 720 с.
5. **Беллман Р., Калаба Р.** Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М.: «Мир», 1968. – 183 с.
6. **И.И.Вульфсон.** К задаче динамического исследования машинного агрегата на базе уравнений Риккати. // Теория механизмов и машин. 2013. №1 (21). Том 11. С.14–18.
7. **Янке Е., Эмде Ф.** Таблицы функций с формулами и кривыми. Изд. 3. – М.; Физ.-мат. лит.,1959. – 419 с.
8. **Вульфсон И.И.** О колебаниях систем с параметрами, зависящими от времени.// Прикладная математика и механика. 1969. Т.33. №2. С. 331–337.
9. **Вульфсон И.И.** Колебания машин с механизмами циклового действия. – Л.: Машиностроение, 1990. – 306 с.

Поступила в редакцию 07.08.2012