

К ЗАДАЧЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ИССЛЕДОВАНИЯ МАШИННОГО АГРЕГАТА НА БАЗЕ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

Рассматривается машинный агрегат, динамика которого описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d(J\omega)}{dt} = -\zeta\omega^2 - \xi\omega + M(t). \quad (1)$$

Здесь первые два члена в правой части уравнения соответствуют моментам сопротивления, $M(t)$ – внешний момент, J – осевой момент инерции, ω – угловая скорость.

Пусть $J(t) = J_0 + \Delta J(t)$. Тогда уравнение (1) приводится к виду

$$\dot{\omega} = -L_2(t)\omega^2 - L_1(t)\omega + L_0(t), \quad (2)$$

где $L_0(t) = M(t)/J(t)$, $L_1(t) = [\xi + \Delta\dot{J}(t)]/J(t)$, $L_2(t) = \zeta/J(t)$.

В технических задачах квадратичное сопротивление обычно имеет аэродинамическое или гидравлическое происхождение, а линейное – реализуется, например, при вязком трении и магнитном торможении. Кроме того член, пропорциональный первой степени угловой скорости, возникает при учёте статической характеристики электродвигателя.

Уравнение (2) является уравнением Риккати, которое с помощью подстановки

$$\dot{\omega} = -\frac{\dot{u}}{L_2(t)u} \quad (3)$$

приводится к форме линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами

$$\ddot{u} + 2n(t)\dot{u} - p^2(t)u = 0. \quad (4)$$

Здесь $n(t) = 0,5(\dot{L}_2/L_2 + L_1)$; $p^2(t) = L_0L_2$.

Построению приближённых решений уравнения Риккати посвящена обширная литература [1, 2, 3], обзор которой не входит в задачу данной статьи, в которой мы ограничимся лишь инженерными оценками и рассмотрению некоторых частных случаев, допускающих построение точного решения.

Для получения приближенного решения уравнения (4) воспользуемся модификацией метода условного осциллятора, опирающегося на идеи ВКБ метода, который относится к классу методов решения систем с большим параметром. В данном случае, последнее слагаемое отрицательно, поэтому в отличие от формы, предложенной в [4, 5, 6], решение будем искать в гиперболических функциях. Предварительно исключим в уравнении (4) член, пропорциональный \dot{u} . Применив обобщённую подстановку Эйлера

$$u = u_1 \exp\left[-\int_0^t n(t) dt\right], \quad (5)$$

преобразуем (4) к следующему виду:

$$\ddot{u}_1 - p_1^2(t)u_1 = 0, \quad (6)$$

где $p_1^2 = p^2 + n^2 + \dot{n}$.

Ниже предполагается, что $p_1^2(t)$ является большим параметром и исключена возможность перехода в отрицательную область; при этом устраняются барьерные эффекты, связанные с явлением Стокса [3]. Решение уравнения (6) ищем в форме

$$u_1 = C_1 \operatorname{ch} \Omega t + C_2 \operatorname{sh} \Omega t = D(t) \operatorname{ch} (\Phi(t) + \alpha), \quad (7)$$

где

$$D = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}; \quad \Phi(t) = \int_0^t \Omega(t) dt; \quad \alpha = \operatorname{Arth}(C_2 / C_1).$$

После подстановки (7) в (6) имеем

$$\ddot{u}_1 = (\ddot{D} + D\Omega^2 - p_1^2) \operatorname{ch} \Phi + (2\dot{D}\Omega + D\dot{\Omega}) \operatorname{sh} \Phi. \quad (8)$$

Далее подставим (7) и (8) в дифференциальное уравнение (6) и уравнием коэффициенты при $\operatorname{sh} \Phi$ и $\operatorname{ch} \Phi$ в обеих частях равенства. Тогда

$$2\dot{D}\Omega + D\dot{\Omega} = 0, \quad (9)$$

$$\ddot{D}/(D\Omega^2) + 1 - \frac{p_1^2}{\Omega^2} = 0. \quad (10)$$

Решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными (9) связывает амплитуду D с функцией Ω следующей зависимостью:

$$D(t) = D(0) \sqrt{\Omega(0) / \Omega(t)}. \quad (11)$$

Второе уравнение (10) устанавливает связь между известной функцией $p_1(t)$ и функцией $\Omega(t)$. Представляет большой практический интерес случай медленного изменения амплитуды D ; при этом $\ddot{D}/(D\Omega^2) \ll 1$. Тогда из (10) следует $\Omega \approx p_1$.

При постоянных значениях момента инерции J и внешнего момента M имеем $p_1 = \operatorname{const}$. В этом частном случае $n = 0,5\xi/J$; $p_1 = \sqrt{M\xi}/J$. Тогда согласно (3)–(11):

$$\omega \approx \xi^{-1} \sqrt{M\xi + 0,25\xi^2} \operatorname{th}(p_1 t + \alpha). \quad (12)$$

Поскольку при $t \rightarrow \infty$ имеем $\operatorname{th}(p_1 t + \alpha) \rightarrow 1$, установившаяся угловая скорость определяется амплитудным значением формулы (12).

При анализе формулы (12) может возникнуть вопрос относительно числа начальных условий. Действительно, в дифференциальном уравнении (7) фигурируют две произвольных постоянных, что формально требует задания двух начальных условий. Между тем, в формуле (12) мы располагаем лишь одним начальным условием, которым определяются начальная фаза α . Это кажущееся недоразумение легко устраняется, если обратить внимание, что ис-

ходное дифференциальное уравнение (2) было первого порядка, поэтому, естественно, что в процессе выкладок при использовании (3) вторая произвольная постоянная (в нашем случае D) оказалась исключенной.

Далее рассмотрим более общий случай, когда $J = J(t)$, $M = M(t)$. В частности, такая ситуация возникает при намотке или размотке нитей, тканей, тросов, а также в устройствах с вариаторами скорости и т.п. Согласно методу условного осциллятора введём в рассмотрение новую переменную $z = \ln(\Omega/\Omega_*)$, где Ω_* – произвольный параметр с размерностью частоты. Тогда

$$\Omega = \Omega_* e^z; \dot{\Omega}/\Omega = \dot{z}; \ddot{\Omega}/\Omega = \ddot{z} + \dot{z}^2. \quad (13)$$

На основании (10), (11), (13) после несложных выкладок получаем

$$\ddot{z} - 0,5 \dot{z}^2 + 2\Omega_*^2 e^{2z} = 2p_1^2(t). \quad (14)$$

Уравнение (14) полностью совпадает с результатом, полученным ранее для случая гармонических колебаний исследуемого объекта, хотя в данном случае исследуемое движение носит апериодический характер. Тем не менее, это уравнение и теперь описывает некоторую виртуальную колебательную систему, названную условным осциллятором. Можно показать, что рассмотренный выше случай медленного изменения параметров системы отвечает условию

$$\ddot{z} - 0,5 \dot{z}^2 \approx 0, \quad (15)$$

т.е. квазистатическому нагружению условного осциллятора. Как уже отмечалось, при этом $\Omega(t) \approx p_1(t)$, $\Phi(t) \approx \int_0^t p_1 dt$. Тогда формула (12) примет вид

$$\omega \approx p_1 \zeta^{-1} J \operatorname{th}[\Phi(t) + \alpha], \quad (16)$$

где $p_1 = \sqrt{p^2 + n^2 + \dot{n}}$; $p = \sqrt{\zeta M / J}$; $n = (\dot{J} + 0,5 \dot{\xi}) / J$.

Решение (16) отвечает ВКБ-приближению первого порядка. Если рассматривать (15) как дифференциальное уравнение, то его решение может быть представлено как

$$z = -2 \ln(bt + 1), \quad (17)$$

где b_1, b_2 – задаваемые параметры семейства решений.

В этом случае согласно (16):

$$p_1(t) = p_1(0)(bt + 1)^{-2}; \Phi(t) = p_1(0)t(bt + 1)^{-1}. \quad (18)$$

Зависимости (18) отвечают точному решению уравнения (6). Можно показать, что при отмеченном способе формирования функции $p_1(t)$ это уравнение является модификацией родственного уравнения Бесселя [7]. При таком подходе медленность изменения функции $p_1(t)$ не оговаривается, однако требуется принадлежность этой функции к данному семейству

ву. Таким образом, приближённый характер полученного решения определяется лишь степенью близости $p_1(t)$ к соответствующей зависимости (18).

Пусть $v = p_1(\tau) / p_1(0)$, где τ – интервал времени, на котором происходит изменение функции $p_1(t)$. Можно показать [5,7], что при этом

$$b = (v^{-0.5} - 1) / \tau. \quad (19)$$

На рис. 1 в качестве примера приведены графики функций $p_1(t)$ (кривая 1) и $\Phi(t)$ (кривая 2), построенные по зависимостям (18), (19) при $\tau = 2$; $\zeta = 0,3$; $\xi = 0$; $v = 0,4$. Заметим, что, несмотря на существенное изменение функции $p_1(t)$, изменение фазы гиперболической функции в данном случае мало отличается от линейной характеристики, однако при увеличении перепада значений $p_1(t)$ изменение фазы приобретает чётко выраженный нелинейный характер.

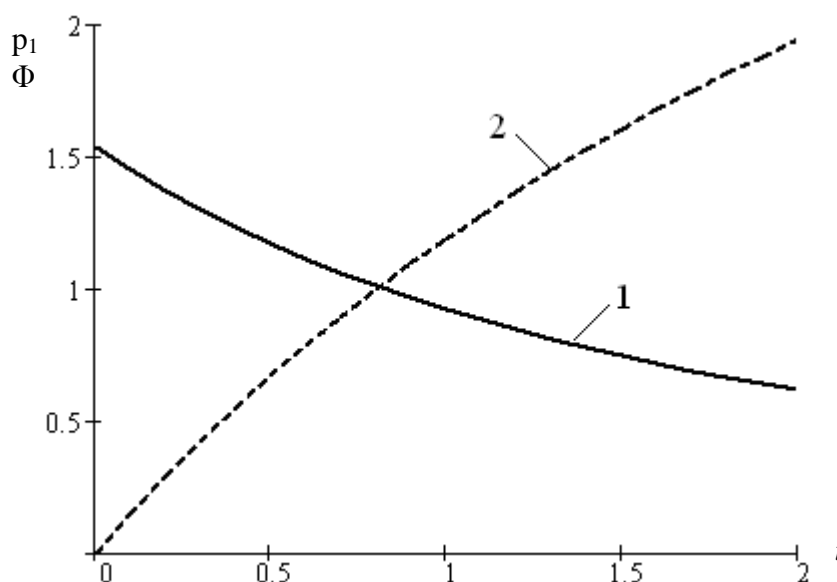


Рис. 1. Графики $p_1(t)$ и $\Phi(t)$

На рис. 2 приведено семейство графиков $\omega(t)$ при падающей функции $p_1(t)$ и варьировании параметром ζ ($\zeta = 0,5$ – сплошная линия; $\zeta = 0,3$ – штриховая линия). На начальном этапе движения из-за малых скоростей моменты сопротивления проявляются слабо, однако по мере увеличения ω их роль оказывается доминирующей. Эти встречные тенденции влияния внешнего момента и моментов сил сопротивления приводят к появлению максимумов.

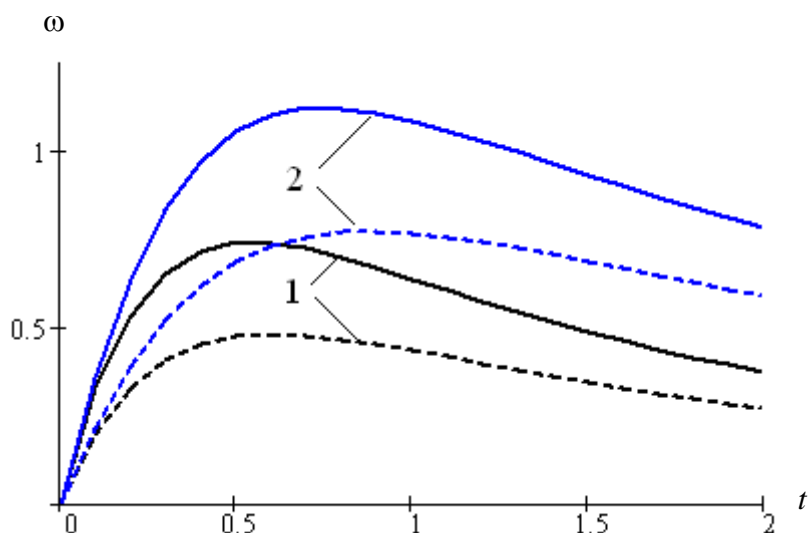


Рис. 2. Графики изменения угловой скорости: 1 – $\nu=0.2$; 2 – $\nu=0.4$

Условие (15) является лишь одним из примеров построения точных решений в данном классе задач (подробнее см. [7]). В заключение отметим, что по трудоёмкости аналитические методы нередко уступают численным методам. Достоинство аналитических способов в первую очередь проявляется при осмыслении наиболее существенных факторов исследуемой задачи и при решении задач динамического синтеза.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1968. – 720 с.
2. **Беллман Р., Калаба Р.** Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. – М.: «Мир», 1968. – 183 с.
3. **Хединг Дж.** Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ). – М.: Мир, 1965. – 237 с.
4. **Вульфсон И.И.** О колебаниях систем с параметрами, зависящими от времени. // Прикладная математика и механика. 1969. Т.33, №2. С. 331–337.
5. **Вульфсон И.И.** Колебания машин с механизмами циклового действия. – Л.: Машиностроение, 1990. – 306 с.
6. **Vulfson I.** Vibroactivity of branched and ring structured mechanical drives. Hemisphere Publ. Corpor.: New York, Washington, London, 1989. – 99 p.
7. **Вульфсон И.И.** Об одном классе точных решений при исследовании колебательных систем с переменными параметрами. // Вестник научно технического развития. 2011, №6 (46). С. 14–25.

Поступила в редакцию 15.09.2012