

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ШАРНИРНОГО ЧЕТЫРЕХЗВЕННИКА ОКОЛО ОСОБОГО ПОЛОЖЕНИЯ ПОКОЯ

Вопросы, связанные с применением графических, графоаналитических и аналитических методов к исследованию кинематики и динамики рычажных механизмов, регулярно обсуждаются на страницах журнала [1-5]. В указанных работах на примере простого механизма (шарнирного четырехзвенника) демонстрируется эффективность получения аналитических решений, позволяющих с любой точностью определять различные параметры, характеризующие движение звеньев, решать задачи анализа и синтеза рычажных механизмов.

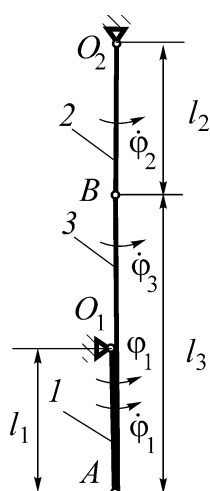


Рис. 1. Схема шарнирного четырехзвенника в особом положении

Данная статья посвящена исследованию колебательного движения шарнирного четырехзвенника около особого положения покоя.

Рассмотрим малые свободные колебания шарнирного четырехзвенника около положения равновесия, изображенного на рис. 1. Определим частоту этих колебаний. Будем считать известными размеры и инерционные характеристики звеньев механизма (примем, что $l_1 = l$, $l_2 = \alpha l$, $l_3 = \beta l$, где α и β – постоянные числа). Сопротивлением движению системы пренебрежем.

Выбрав в качестве обобщенной координаты угол ϕ_1 поворота звена O_1A , воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial \phi_1} = Q, \quad (1)$$

где T – кинетическая энергия системы, Q – обобщенная сила.

Так как в общем случае звенья 1 и 2 механизма совершают вращательное движение, а звено 3 – плоское, кинетическая энергия системы определяется по формуле:

$$T = \frac{J_1 \dot{\phi}_1^2}{2} + \frac{J_2 \dot{\phi}_2^2}{2} + \frac{m_3 v_{C3}^2}{2} + \frac{J_3 \dot{\phi}_3^2}{2}, \quad (2)$$

где $\dot{\phi}_2$ и $\dot{\phi}_3$ – угловые скорости звеньев 2 и 3, v_{C3} – скорость центра масс звена 3, J_1, J_2, J_3 – моменты инерции звеньев 1, 2 и 3 относительно осей вращения O_1, O_2 и центра масс C_3 , соответственно, m_3 – масса звена 3.

Выразим кинетическую энергию системы через обобщенную скорость $\dot{\phi}_1$. Для этого установим связь между угловыми скоростями $\dot{\phi}_2, \dot{\phi}_3$ и обобщенной скоростью $\dot{\phi}_1$.

Кинетическая энергия механической системы в общем случае является однородной квадратичной формой обобщенных скоростей, коэффициенты которой являются нелинейными функциями обобщенных координат. Шарнирный четырехзвенник является нелинейной системой, поэтому для линеаризации дифференциального уравнения, описывающего его движение, можно воспользоваться методом малых колебаний, разложив коэффициенты квадратичной формы в ряды Маклорена и сохранив в этих разложениях только первые (постоянные) члены, называемые коэффициентами инерции системы. Это означает, что выражение кинетической энергии механизма следует составить в момент прохождения им поло-

жения покоя. Следовательно, необходимо получить связь между угловыми скоростями $\dot{\phi}_2$ и $\dot{\phi}_3$ и обобщенной скоростью $\dot{\phi}_1$ в положении механизма, представленном на рис. 1.

Указанное положение механизма называют особым, так как оно, в частности, характеризуется тем, что в этом положении для изучения распределения скоростей точек второго и третьего звеньев оказывается недостаточным применения теоремы о скоростях точек твердого тела. Помимо этой теоремы необходимо привлекать также теорему об ускорениях точек твердого тела (существуют особые системы, для которых требуется использовать теоремы об ускорениях высших порядков) [6].

Будем считать, что точка A принадлежит звену AB , совершающему плоское движение, и запишем теорему о скоростях точек плоской фигуры (рис. 2):

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{BA},$$

где $v_B = \dot{\phi}_2 O_2 B = \dot{\phi}_2 \alpha l$ – скорость полюса B , $v_{BA} = \dot{\phi}_3 AB = \dot{\phi}_3 \beta l$ – скорость точки A в ее вращении вокруг полюса B .

С другой стороны, считая точку A принадлежащей кривошипу $O_1 A$, вращающемуся вокруг точки O_1 , можем записать: $v_A = \dot{\phi}_1 O_1 A$.

В проекции на вертикальную ось получаем:

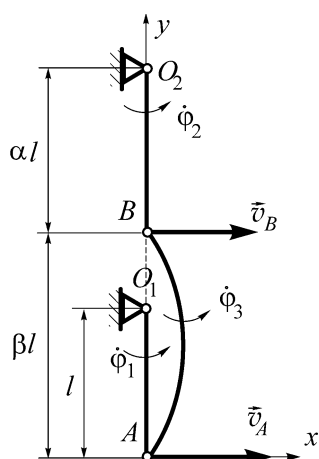


Рис. 2. Схема скоростей точек A и B четырехзвенника в особом положении

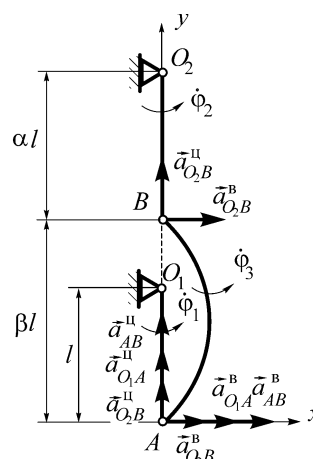


Рис. 3. Схема ускорений точек A и B четырехзвенника в особом положении

$$\dot{\phi}_1 = \dot{\phi}_2 \alpha + \dot{\phi}_3 \beta \quad (3)$$

Уравнение (3) содержит две неизвестные величины $\dot{\phi}_2$ и $\dot{\phi}_3$, для нахождения которых требуется еще одно уравнение. Это уравнение получим на основании теоремы об ускорениях точек плоской фигуры, считая точку A принадлежащей одновременно звеньям $O_1 A$ и AB (рис. 3):

$$\vec{a}_{O_1 A}^{II} + \vec{a}_{O_1 A}^B = \vec{a}_{O_2 B}^{II} + \vec{a}_{O_2 B}^B + \vec{a}_{AB}^{II} + \vec{a}_{AB}^B \quad (4)$$

Спроецировав векторное выражение (4) на ось y , запишем:

$$\dot{\phi}_1^2 = \dot{\phi}_2^2 \alpha + \dot{\phi}_3^2 \beta \quad (5)$$

Направления векторов $\vec{a}_{O_1A}^B$, $\vec{a}_{O_2B}^B$ и \vec{a}_{AB}^B на рис. 3 для решения задачи не существенны (важно только, что они параллельны оси x). Решая (3) и (5) совместно, приходим к квадратному уравнению

$$\dot{\phi}_2^2 - \frac{2\omega_1}{\alpha + \beta} \dot{\phi}_2 + \dot{\phi}_1^2 \frac{1 - \beta}{\alpha(\alpha + \beta)} = 0,$$

корни которого имеют вид:

$$\dot{\phi}_{2(1,2)} = \frac{\dot{\phi}_1}{\alpha + \beta} \left[1 \pm \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}(\alpha + \beta - 1)} \right], \quad \dot{\phi}_{3(1,2)} = \frac{\dot{\phi}_1}{\alpha + \beta} \left[1 \mp \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}(\alpha + \beta - 1)} \right]. \quad (6)$$

Из выражений (6) следует, что угловые скорости $\dot{\phi}_2$ и $\dot{\phi}_3$ являются вещественными, а четырехзвенник представляет собой механизм только при выполнении условия $\alpha \geq 1 - \beta$. В случае, если это условие выполнено, заданному значению угловой скорости $\dot{\phi}_1$ соответствуют по два значения угловых скоростей $\dot{\phi}_2$ и $\dot{\phi}_3$. Это означает, что связи, наложенные на механизм, допускают две конфигурации движущегося четырехзвенника, характеризующиеся двумя наборами угловых скоростей звеньев: 1) $\dot{\phi}_1, \dot{\phi}_{2(1)}, \dot{\phi}_{3(1)}$ и 2) $\dot{\phi}_1, \dot{\phi}_{2(2)}, \dot{\phi}_{3(2)}$.

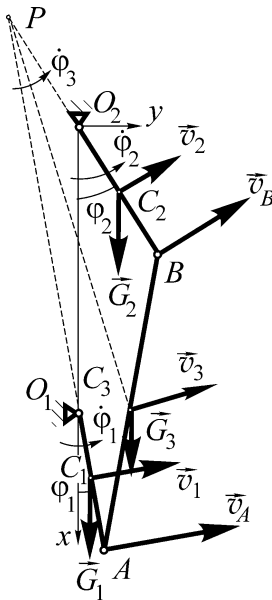


Рис. 4. Схема шарнирного четырехзвенника в первой конфигурации

Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

1. Случай, когда реализуется движение, при котором угловые скорости звеньев 2 и 3 соответственно равны: $\dot{\phi}_2 = \dot{\phi}_{2(1)}$, $\dot{\phi}_3 = \dot{\phi}_{3(1)}$,

$$\dot{\phi}_{2(1)} = \frac{\dot{\phi}_1}{\alpha + \beta} \left[1 + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}(\alpha + \beta - 1)} \right],$$

$$\dot{\phi}_{3(1)} = \frac{\dot{\phi}_1}{\alpha + \beta} \left[1 - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}(\alpha + \beta - 1)} \right].$$

В соответствии с выражением (2) составим выражение кинетической энергии системы:

$$T_1 = \frac{J_1 \dot{\phi}_1^2}{2} + \frac{J_2 \dot{\phi}_2^2}{2} + \frac{m_3 v_{31}^2}{2} + \frac{J_3 \dot{\phi}_3^2}{2} = \frac{a_1 \dot{\phi}_1^2}{2},$$

где v_{31} – скорость центра масс C_3 звена 3,

$$v_{31} = \frac{v_A + v_B}{2} = \frac{\dot{\phi}_1 l + \dot{\phi}_2 \alpha l}{2} = \frac{\dot{\phi}_1 l}{2} \left\{ 1 + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \left[1 + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}(\alpha + \beta - 1)} \right] \right\},$$

$$a_1 = a_{11} + a_{12} = J_1 + \frac{J_2}{(\alpha + \beta)^2} \left[1 + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}(\alpha + \beta - 1)} \right]^2 +$$

$$+ \frac{m_3 l^2}{4} \left\{ 1 + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \left[1 + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha} (\alpha + \beta - 1)} \right] \right\}^2 + \frac{J_3}{(\alpha + \beta)^2} \left[1 - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta} (\alpha + \beta - 1)} \right]^2 - \text{коэффициент}$$

инерции системы, соответствующий первому варианту конфигурации механизма,

$$a_{11} = J_1 + \frac{J_2}{(\alpha + \beta)^2} \left[1 + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha} (\alpha + \beta - 1)} \right]^2,$$

$$a_{12} = \frac{m_3 l^2}{4} \left\{ 1 + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \left[1 + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha} (\alpha + \beta - 1)} \right] \right\}^2 + \frac{J_3}{(\alpha + \beta)^2} \left[1 - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta} (\alpha + \beta - 1)} \right]^2.$$

Для определения обобщенной силы Q_1 отклоним механизм от положения равновесия (рис. 4), сообщив звену 1 малый угол φ_1 и угловую скорость $\dot{\varphi}_1$, и найдем сумму мощностей сил тяжести звеньев:

$$N_1 = -G_1 \dot{x}_{C1} - G_2 \dot{x}_{C2} - G_3 \dot{x}_{C3}.$$

Запишем координаты точек C_1 , C_2 и C_3 :

$$x_{C1} = \frac{l}{2} \cos \varphi_1, \quad x_{C2} = \frac{\alpha l}{2} \cos \varphi_2, \quad x_{C3} = \alpha l \cos \varphi_2 + \beta \frac{l}{2} \cos \varphi_3.$$

Проекции скоростей этих точек на ось x определяются формулами:

$$\dot{x}_{C1} = -\dot{\varphi}_1 \frac{l}{2} \sin \varphi_1, \quad \dot{x}_{C2} = -\dot{\varphi}_2 \frac{\alpha l}{2} \sin \varphi_2, \quad \dot{x}_{C3} = -\dot{\varphi}_2 \alpha l \sin \varphi_2 - \dot{\varphi}_3 \beta \frac{l}{2} \sin \varphi_3. \quad (7)$$

Так как для малых углов $\sin \varphi_2 \approx \varphi_2$, $\sin \varphi_3 \approx \varphi_3$, $\cos \varphi_2 \approx 1$, $\cos \varphi_3 \approx 1$, выражения (7) принимают вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{C1} &= -\dot{\varphi}_1 \frac{l}{2} \varphi_1, \quad \dot{x}_{C2} = -\dot{\varphi}_2 \frac{\alpha l}{2} \varphi_2 = -\frac{\alpha l \dot{\varphi}_1 \varphi_1}{2(\alpha + \beta)^2} \left[1 + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha} (\alpha + \beta - 1)} \right]^2, \\ \dot{x}_{C3} &= -\dot{\varphi}_2 \alpha l \varphi_2 - \dot{\varphi}_3 \beta \frac{l}{2} \varphi_3 = \\ &= -\frac{\alpha l \dot{\varphi}_1 \varphi_1}{(\alpha + \beta)^2} \left[1 + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha} (\alpha + \beta - 1)} \right]^2 - \frac{\beta l \dot{\varphi}_1 \varphi_1}{2(\alpha + \beta)^2} \left[1 - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta} (\alpha + \beta - 1)} \right]^2. \end{aligned}$$

Таким образом, с точностью до величин первого порядка малости находим:

$$N_1 = - \left\{ \frac{m_1}{2} + \frac{\alpha(m_2 + 2m_3)}{2(\alpha + \beta)^2} \left[1 + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha} (\alpha + \beta - 1)} \right]^2 + \frac{\beta m_3}{2(\alpha + \beta)^2} \left[1 - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta} (\alpha + \beta - 1)} \right]^2 \right\} g l \dot{\varphi}_1 \varphi_1.$$

Отсюда получаем выражение для обобщенной силы:

$$Q_1 = - \left\{ \frac{m_1}{2} + \frac{\alpha(m_2 + 2m_3)}{2(\alpha + \beta)^2} \left[1 + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}(\alpha + \beta - 1)} \right]^2 + \frac{\alpha m_3}{(\alpha + \beta)^2} \left[1 - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}(\alpha + \beta - 1)} \right]^2 \right\} gl \Phi_1 = -c_1 \Phi_1,$$

где $c_1 = \left\{ \frac{m_1}{2} + \frac{\alpha(m_2 + 2m_3)}{2(\alpha + \beta)^2} \left[1 + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}(\alpha + \beta - 1)} \right]^2 + \frac{\beta m_3}{2(\alpha + \beta)^2} \left[1 - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}(\alpha + \beta - 1)} \right]^2 \right\} gl -$

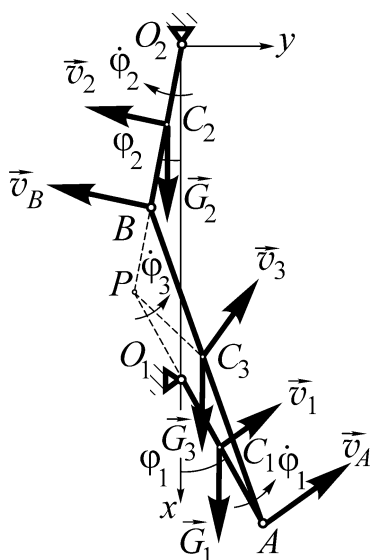


Рис. 5. Схема шарнирного четырехзвенника во второй конфигурации

коэффициент жесткости системы, соответствующий первой конфигурации механизма.

После подстановки полученных результатов в (1) приходим к дифференциальному уравнению свободных колебаний механизма, из которого находим частоту малых свободных колебаний четырехзвенника:

$$k_1 = \sqrt{\frac{c_1}{a_1}}.$$

2. Перейдем к рассмотрению случая, когда реализуется движение, при котором $\dot{\phi}_2 = \dot{\phi}_{2(2)}$, $\dot{\phi}_3 = \dot{\phi}_{3(2)}$ (рис. 5):

$$\dot{\phi}_{2(2)} = \frac{\dot{\phi}_1}{\alpha + \beta} \left[1 - \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}(\alpha + \beta - 1)} \right],$$

$$\dot{\phi}_{3(2)} = \frac{\dot{\phi}_1}{\alpha + \beta} \left[1 + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}(\alpha + \beta - 1)} \right].$$

Нетрудно убедиться, что в этом случае коэффициенты инерции a_2 и жесткости c_2 системы приобретают вид:

$$a_2 = J_1 + \frac{J_2}{(\alpha + \beta)^2} \left[1 - \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}(\alpha + \beta - 1)} \right]^2 + \frac{m_3 l^2}{4} \left\{ 1 + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \left[1 - \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}(\alpha + \beta - 1)} \right] \right\}^2 + \frac{J_3}{(\alpha + \beta)^2} \left[1 + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}(\alpha + \beta - 1)} \right]^2,$$

$$c_2 = \left\{ \frac{m_1}{2} + \frac{\alpha(m_2 + 2m_3)}{2(\alpha + \beta)^2} \left[1 - \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}(\alpha + \beta - 1)} \right]^2 + \frac{\beta m_3}{2(\alpha + \beta)^2} \left[1 + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}(\alpha + \beta - 1)} \right]^2 \right\} gl.$$

Частота малых свободных колебаний четырехзвенника в рассматриваемой конфигурации определяется по формуле:

$$k_2 = \sqrt{\frac{c_2}{a_2}}.$$

В таблицах 1-3 представлены возможные конфигурации четырехзвенника и формулы для определения частот k_1 и k_2 его свободных колебаний в некоторых частных случаях.

Таблица 1

$\alpha = 1,$ $\beta = 1$	Первая конфигурация		$k_1 = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2 + 2m_3)gl}{2(J_1 + J_2 + m_3l^2)}}$
	Вторая конфигурация		$k_2 = \sqrt{\frac{(m_1 + m_3)gl}{2\left(J_1 + \frac{m_3l^2}{4} + J_3\right)}}$

Таблица 2

$\alpha = 1,$ $\beta = 2$	Первая конфигурация		$k_1 = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2 + 2m_3)gl}{2(J_1 + J_2 + m_3l^2)}}$
	Вторая конфигурация		$k_2 = \sqrt{\frac{\left(m_1 + \frac{m_2}{9} + \frac{10m_3}{9}\right)gl}{2\left(J_1 + \frac{J_2}{9} + \frac{m_3l^2}{9} + \frac{4J_3}{9}\right)}}$

$\alpha = 2,$ $\beta = 1$	Первая конфигурация		$k_1 = \sqrt{\frac{(m_1 + 8m_2/9 + 1,797m_3) gl}{2(J_1 + 4J_2/9 + 11m_3l^2/12 + 0,019J_3)}}$
	Вторая конфигурация		$k_2 = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2) gl}{2(J_1 + J_3)}}$

В учебниках по теории колебаний [7-11] при изложении вопросов, связанных с описанием колебаний линейных и линеаризованных голономных систем с s степенями свободы, подчеркивается, что каждая такая система имеет ровно s собственных частот. Эти частоты определяются только параметрами системы (матрицами инерции и жесткости) и не зависят от начальных условий.

Вместе с тем рассмотренная механическая система имеет одну степень свободы, однако при этом – две частоты свободных колебаний (частоты k_1 и k_2). Утверждение, что число собственных частот равно количеству степеней свободы, для этого механизма оказывается несправедливым. Примечателен тот факт, что частоты его свободных колебаний зависят не только от параметров (масс и длин звеньев), но и от начальных условий. Только при строго определенных значениях начальных угловых скоростей звеньев (значения указанных угловых скоростей зависят от соотношения длин звеньев) возможно движение механизма, при котором угловые скорости и угловые ускорения звеньев удовлетворяют уравнениям внутренних и внешних связей, наложенных на систему.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Зиборов К.А., Мацюк И.Н., Шляхов Э.М.** Решение векторных уравнений кинематики механизмов с помощью программы Mathcad. // Теория механизмов и машин. 2008. №1(11). С. 64 – 70.
2. **Евграфов А.Н., Петров Г.Н.** Компьютерная анимация кинематических схем в программах Excel и Mathcad. // Теория механизмов и машин. 2008. №1(11). С. 71 – 80.
3. **Третьяков В.Н.** Использование программы Mathcad при определении скоростей и ускорений рычажных механизмов // Теория механизмов и машин. 2009. №2(14). С. 40 – 48.

4. **Верховод В.П.** Использование программы Mathcad при синтезе передаточных рычажных механизмов. // Теория механизмов и машин. 2011. №1(17). С. 69 – 76.
5. **Слоущ А.В.** Свободное движение двухкоромыслового четырёхзвенника // Теория механизмов и машин. 2011. №1(17). С.62 – 68.
6. **Минкин Ю.Г., Доронин Ф.А.** Ускорения высших порядков как средство решения традиционных задач кинематики некоторых голономных систем. – Сборник научно-методических статей по теоретической механике. – М., 1984, вып. 15.
7. **Бабаков И.М.** Теория колебаний. – 2-изд. – М.: Наука, 1965. – 560 с.
8. **Бидерман В.Л.** Теория механических колебаний. – М.: Высш. шк., 1980. – 406 с.
9. **Пановко Я.Г.** Введение в теорию механических колебаний. – М.: Наука, 1971. – 240 с.
10. **Стрелков С.П.** Введение в теорию колебаний. – 2-изд. – М.: Наука, 1964. – 440 с.
11. **Яблонский А.А., Норейко С.С.** Курс теории колебаний. – М.: Высш. шк., 1975. – 248 с.: ил.

*Поступила в редакцию 02.12.2011
После доработки 20.12.2011*