УДК 621.01

Л.Т. ДВОРНИКОВ, Н.С. ЖУКОВСКИЙ

АДАПТИРОВАННЫЙ ПЕРЕВОД С НЕМЕЦКОГО ЯЗЫКА СТАТЬИ: **MARTIN GRÜBLER «ALLGEMEINE EIGENSCHAFTEN DER ZWANGLÄUFIGEN EBENEN KINEMATISCHEN KETTEN»,** ИЗДАННОЙ В ЛЕЙПЦИГЕ В 1883 г.

Общие свойства замкнутых плоских кинематических цепей принудительного движения

Мартин Грюблер, приват-доцент г. Цюрих

Часть 2

VI.

Среди всех замкнутых плоских цепей с принудительным движением особый интерес представляют цепи, обобщающие цепи с заданным количеством звеньев, из которых можно выделить частные случаи всех других цепей группы. Это есть цепи, у которых количество шарниров имеет наибольшую величину. Для этих особых цепей уравнения от I до IV существенно упрощаются, а именно, приводят к общим соотношениям путем нижеследующего рассуждения.

Очевидно, что число шарниров *p*, соединяющих *n* звеньев цепи, достигает тем большее значение, чем меньше звеньев связываются посредством одного шарнира. Следовательно, *p* принимает возможно наибольшее значение, если каждый шарнир связывает наименьшее возможное количество звеньев, а именно два звена. Если представить $p_3 = p_4 = ... = p_n = 0$, то значение, вытекающее из уравнений I-IV для *p*, представляет собой наибольшее количество шарниров, которые связывают *n* звеньев в замкнутую цепь. Такой же результат можно получить непосредственно из формул (I) и (IV[a]). Из IV[a] следует

$$p + \frac{3}{2}n - 2 = \sum_{i=2}^{i=\frac{n}{2}} (ip_i) = 2p_2 + \sum_{i=3}^{i=\frac{n}{2}} (ip_i).$$

Далее из уравнения (I)

$$p_i = p - \sum_{i=3}^{i=\frac{n}{2}} (p_i),$$

и тогда

$$p + \frac{3}{2}n - 2 = 2p - 2\sum_{i=3}^{i=\frac{n}{2}} (p_i) + \sum_{i=3}^{i=\frac{n}{2}} (ip_i),$$

откуда для p получается выражение

$$p = \frac{3}{2}n - 2 - \sum_{i=3}^{i=\frac{n}{2}} (i-2) p_i \,.$$

В этом выражении член суммы при всех обстоятельствах является положительной величиной, так как $i \geq 3i$, а поэтому p достигает наибольшего значения, если

$$\sum_{i=3}^{i=\frac{n}{2}} (i-2) p_i = 0 \,.$$

Так как эта сумма содержит только положительные члены, должно быть очевидным условием $p_3 = p_4 = ... = p_{n/2} = 0$ с тем, чтобы она исчезла.

На основе предыдущего рассуждения значение для p оказывается равным

$$p = \frac{3}{2}n - 2 \,, \tag{6}$$

а вместо уравнения (IV) можно записать более простое:

$$2p - 3n + 4 = 0 \,, \tag{6^a}$$

что и определяет отличие замкнутых цепей с принудительным движением от всех других замкнутых цепей[1].

Бурместер[2] для специального (особого) вида таких цепей доказал, что все моментные центры можно определить проведением прямых, если количество шарниров составляет $\frac{3}{2}n - 2$. Но, так как возможность определения моментных центров из имеющихся шарниров цепи можно рассматривать как доказательство замкнутости, то этим следует отметить совпадение результатов. Необходимо заметить, что для особого вида цепей, к которым относится вывод Бурместера, можно вывести отношение (6). Упомянутый специальный вид цепей получают, собственно, путем последовательного соединения пар звеньев с одним общим шарниром, а именно, так, чтобы оба звена каждой новой пары соединялись с двумя различными звеньями уже имеющейся цепи посредством одного шарнира. Таким образом, из двух таких пар путем указанного соединения получается шарнирный четырехугольник, из него и следующей пары получается шестизвенная цепь и т.д., а для всех полученных таким образом цепей очевидно, что они являются замкнутыми. При каждой добавленной паре звеньев количество шарниров в цепи увеличивается на 3. Обозначив через m число пар звеньев, получим, что число шарниров в цепи станет $p = 1 + 3(m-1)$, и так как количество звеньев составляет $n = 2m$, то получим

[1] Зависимость (6^a), однако в несколько другой форме, показал Чебышёв (работа 2-го съезда российских естествоиспытателей в Москве, 1869 г.) В немецком переводе – совещание союза по развитию ремесел в Пруссии, 1870, с 174 и д. (Фамилия Чебышёва написана была как Tschebischeff – заметка переводчика).

[2] Civilingenieur, 1880, s. 225.

$$p = 1 + 3\left(\frac{n}{2} - 1\right) = \frac{3}{2}n - 2\,.$$

Отношение (III) для рассмотренного случая, когда все шарниры цепи соединяют лишь по два звена

$$\sum_{i=2}^{i=\frac{n}{2}} (ip_i) = 2p_2 = 2p$$

переходит в более простое

$$\sum_{i=2}^{i=\frac{n}{2}} (in_i) = 3n - 4\,. \tag{7}$$

Если это уравнение сопоставить с отношением (II), то они в виде

$$n_2 + n_3 + \ldots + n_{\frac{n}{2}} = n,$$

$$2n_2 + 3n_3 + \ldots + \frac{n}{2}n_{\frac{n}{2}} = 3n - 4,$$

могут быть рассмотрены как диофантовы уравнения, которые можно использовать для расчета n_i. Из них очевидны зависимости

$$n_2 = 4 + \sum_{i=4}^{i=\frac{n}{2}} (i-3)n_i\,, \tag{8}$$

$$n_3 = n - 4 - \sum_{i=4}^{i=\frac{n}{2}} (i-2)n_i\,. \tag{9}$$

Выражение для n_2 показывает, что все цепи, в которых нет звеньев более чем с тремя шарнирами, имеют четыре двухпарных звена, каким бы большим не было n.

Если полученные отношения использовать для частных случаев, а именно, например, для восьмизвенной цепи, то получим

$$p = \frac{3}{2}\cdot 8 - 2 = 10\,,$$

$$n_2 = 4 + n_4\,,$$

$$n_3 = 4 - 2n_4 .$$

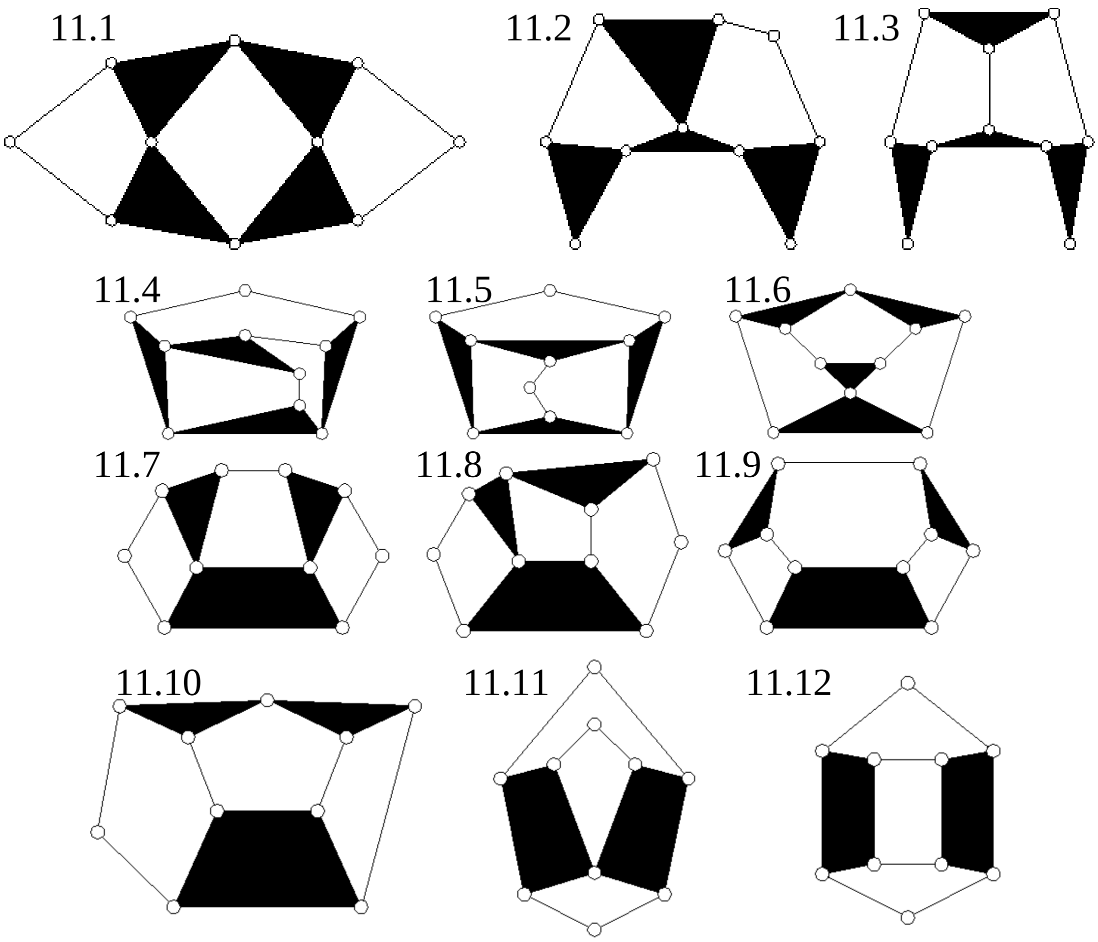
Так как из последнего выражения n_4 может иметь только три значения 0, 1 и 2, то можно найти три решения, которые приведены в нижеследующей таблице 1, как α, β и y.

Таблица 1

	n_2	n_3	n_4
α	4	4	0
β	5	2	1
y	6	0	2

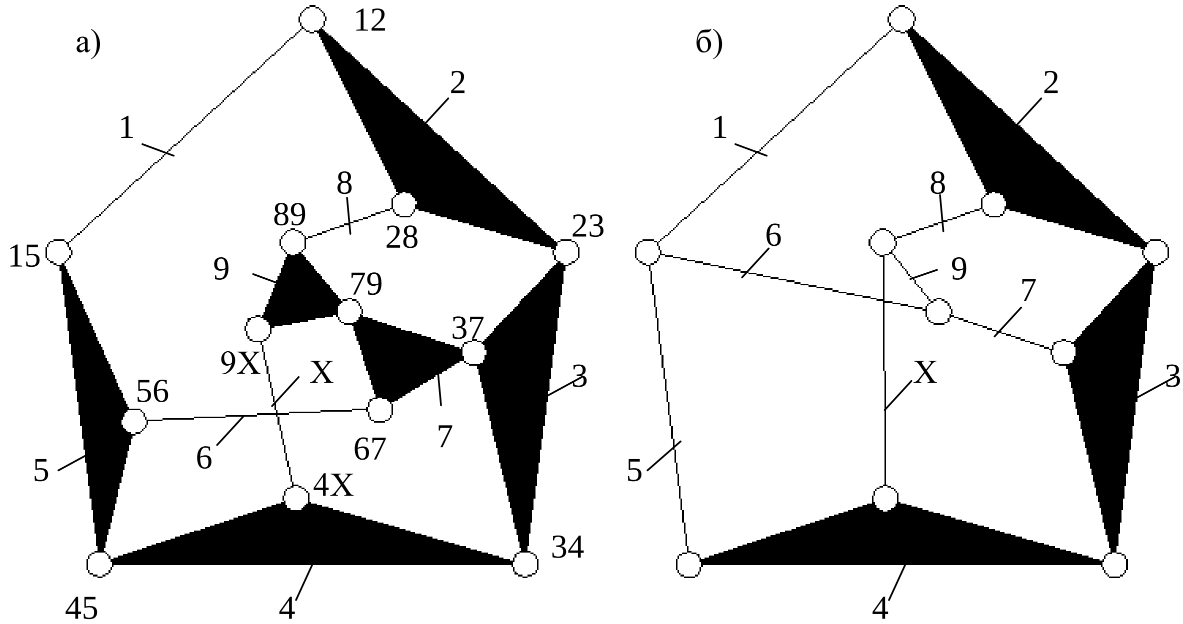
Этим трем решениям соответствуют все возможные цепи, при различных расположениях звеньев в них.

Эти цепи представлены на фигуре 11 (схемы от 11.1 до 11.12), откуда видно, что цепи, принадлежащие к решениям α, β и y, отличаются друг от друга.



Фигура 11

Из цепей с наибольшим количеством шарниров можно легко получить все остальные цепи, так как узлы, содержащие более двух шарниров, могут возникать тогда, когда расстояния между отдельными шарнирами становятся равными нулю. Однако такие соединения шарниров не должны приводить к исчезновению звеньев, т.к. это привело бы к жесткому соединению нескольких звеньев цепи. Так, например, можно получить цепь, представленную на фигуре 12, *в*, из цепи, показанной на фигуре 12, *а*, путем уменьшения одной из сторон треугольных звеньев 5, 7 и 9 до нуля.



Фигура 12

То, что полученная таким образом цепь является замкнутой цепью с принудительным движением, вытекает из того обстоятельства, что вследствие исчезновения промежутка между некоторыми шарнирами, выражение $\sum(2i-3)n_i$ уменьшается на 2, а величина p на 1, поэтому отношение (IV) сохранится.

Из соотношения

$$\sum_{i=2}^{i=\frac{n}{2}}(i-1)p_i = \frac{3}{2}n-2\,, \tag{10}$$

легко вытекающего из (IV^a) и (I), можно показать, что отношение (6) сохранится также и для полученных цепей, если в нем вместо p подставить значение, которое получается, если каждый i-кратный шарнир считать как ($i-1$)-кратный.

Цепям с наибольшим количеством шарниров противостоят цепи с наименьшим количеством шарниров. Последние образуются из первых, если все i-шарниров каждого звена цепи совмещаются так, что цепь в этом случае становится состоящей лишь из двухпарных звеньев. Тот же результат можно получить из отношений (II) и (IV). Из IV следует

$$p = 2+\sum_{i=2}^{i=\frac{n}{2}}(in_i)-\frac{3}{2}\sum_{i=2}^{i=\frac{n}{2}}(n_i) = 2+\frac{1}{2}n_2+\sum_{i=3}^{i=\frac{n}{2}}(in_i)-\frac{3}{2}\sum_{i=3}^{i=\frac{n}{2}}(n_i)\,,$$

а, используя отношение (II), можно получить

$$p = 2 + \frac{1}{2}[n - \sum_{i=3}^{i=\frac{n}{2}}(n_i)] + \sum_{i=3}^{i=\frac{n}{2}}(in_i) - \frac{1}{2}\sum_{i=3}^{i=\frac{n}{2}}(n_i) = \frac{n}{2} + 2 + \sum_{i=3}^{i=\frac{n}{2}}(i-2)n_i \,.$$

Это выражение для p позволяет обнаружить, что p становится минимальным, если сумма $\sum_{i=3}^{i=\frac{n}{2}}(i-2)n_i$, которая всегда является положительной величиной, исчезнет. Но так как эта сумма содержит только положительные члены, то она переходит в нуль, лишь при условии, если $n_3 = n_4 = ...n_{\frac{n}{2}} = 0$. Согласно этому, для цепей с наименьшим количеством шарниров можно показать следующие более простые соотношения из (I) и (IV):

$$n = n_2\,, \tag{11}$$

$$p = \frac{n}{2} + 2\,, \tag{12}$$

$$\sum_{i=2}^{i=\frac{n}{2}}(p_i) = p = \frac{n}{2} + 2\,, \tag{13}$$

$$\sum_{i=2}^{i=\frac{n}{2}}(ip_i) = 2n_i = 2n\,. \tag{14}$$

Уравнение (12) показывает, что у этих цепей, за исключением случая n=4, число звеньев цепи больше числа, соединяющих их шарниров.

Из полученных соотношений следует, что у всех замкнутых принудительных плоских цепей количество p шарниров, которые соединяют n звеньев цепей, должно быть в пределах

$$\frac{n}{2} + 2 \le p \le \frac{3}{2}n - 2\,,$$

а число всех звеньев – в пределах

$$2n \le \sum_{i=2}^{i=\frac{n}{2}}(in_i) \le 3n - 4\,.$$

Уравнения (13) и (14) при известных n являются двумя диофантовыми уравнениями, решения которых описывают все возможные замкнутые принудительные цепи с наименьшим количеством шарниров. Однако, не все эти решения могут быть реализованы. Приведем следующий пример. Пусть n = 8, тогда на основании (13) и (14) получим

$$p_2 + p_3 + p_4 = 6\,,$$

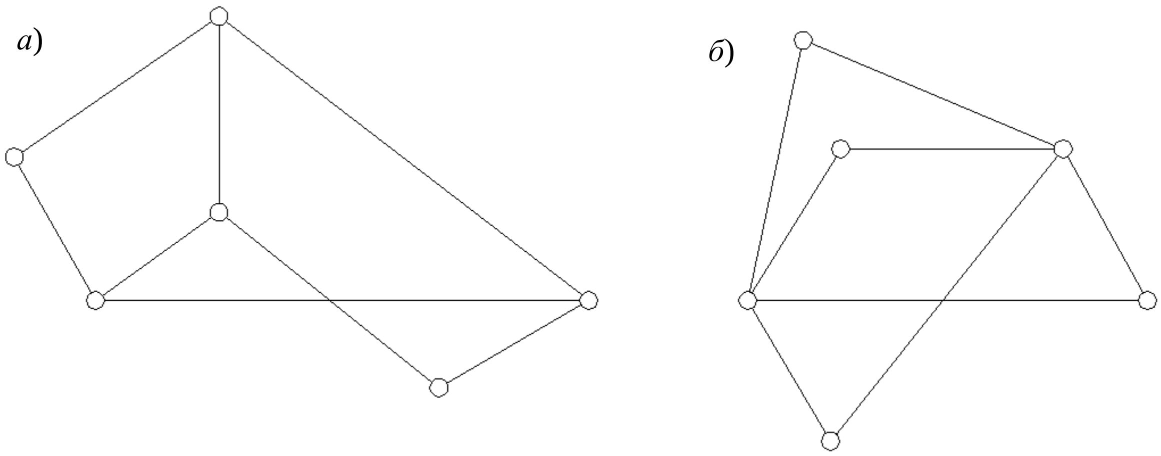
$$2p_2 + 3p_3 + 4p_4 = 16,$$

откуда следует, что p_4 может иметь лишь три значения 0, 1 и 2, и из них вытекают три решения, представленные в нижеследующей таблице 2.

Таблица 2

	p_2	p_3	p_4
α	2	4	0
β	3	2	1
у	4	0	2

Решение α соответствует цепи, которая изображена на фигуре 13, *а*, решение *у* соответствует цепи, показанной на фигуре 13, *б*, а что касается решения β, то легко убедиться, что найти такую цепь невозможно. Дело в том, что числа n_2 и p_2 независимы друг от друга.



Фигура 13

VII.

В настоящей главе предпримем попытку составить два новых соотношения для замкнутых принудительных плоских цепей. Эти соотношения представляют собой не только средство найти различные цепи с одинаковым числом звеньев, но и необходимы для вывода определенных общих утверждений, которые относятся к цепям с поступательными парами и позволяют ввести новое понятие. Речь пойдет о шарнирном многоугольнике или, если принять за *i* количество углов и, соответственно, сторон простого многоугольника, то о шарнирном *i*-угольнике, который образуется *i* шарнирами, соединенными *i* сторонами различных звеньев цепи.

Необходимо доказать, что при определенном условии количество такого рода различных шарнирных многоугольников находится в определенной взаимосвязи с числом звеньев цепи, т.е., прежде всего, необходимо найти доказательство существования цепей с наибольшим количеством шарниров.

Представим себе цепь, находящуюся в неподвижной системе координат (x, y), а также систему координат (ξ, η), связанную с каждым звеном цепи так, что начало координат находится в шарнире с заданными координатами и ось абсцисс ее наклонена под углом $(i)_h$

$\sum$-оси звена $\sum_h$ к неподвижной x. Тогда каждое звено можно представить с помощью уравнений следующей формы

$$\left.\begin{aligned} x_{hi} - x_{hk} &= \xi_h^{(i)} \cos\omega_h - \eta_h^{(i)} \sin\omega_h \\ y_{hi} - y_{hk} &= \xi_h^{(i)} \sin\omega_h - \eta_h^{(i)} \cos\omega_h \end{aligned}\right\}, \tag{15}$$

где x_{hk}, y_{hk} означают координаты того шарнира в звене $\sum_h$, в котором находится начало координат (ξ, η), а x_{hi}, y_{hi} являются координатами остальных шарниров, принадлежащих звену $\sum_h$.

Если i – это количество всех шарниров в звене $\sum_h$, то количество независимых друг от друга пар уравнений (15) для звена $\sum_h$ составит $i-1$, а следовательно для всей цепи $\sum_{i=2}^{i=\frac{n}{2}}(i-1)n$ уравнений. Последнее выражение в соответствии с зависимостями 7 и (II) переходит в равенство

$$\sum_{i=2}^{i=\frac{n}{2}}(i-1)n_i = \sum_{i=2}^{i=\frac{n}{2}}(in_i) - \sum_{i=2}^{i=\frac{n}{2}}(n_i) = 2(n-2).$$

Количество независимых абсцисс – для разных ординат звена составляет $p-1$. Если эти разности исключить из уравнений (15), то получится $2(n-2)-(p-1) = \frac{n}{2}-1$ пар уравнений, содержащих величины ξ, η и ω_h в виде

$$\left.\begin{aligned} \sum(X_h \cos\omega_h - H_h \sin\omega_h) = 0, \\ \sum(X_h \sin\omega_h - H_h \cos\omega_h) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Можно заметить, что последние уравнения получаются как следствие утверждения о том, что сумма проекций сторон простого многоугольника на прямую равна нулю, из чего следует, что

$$\Sigma(x_{hi} - x_{hk}) = 0,$$
$$\Sigma(y_{hi} - y_{hk}) = 0.$$

Путем подстановки разностей (15) в вышеуказанные суммы можно получить $\frac{n}{2}-1$ пар уравнений (16), откуда следует, что в замкнутой плоской цепи подвижных звеньев с наибольшим количеством шарниров существуют $\frac{n}{2}-1$ различных шарнирных многоугольников[3], а именно, многоугольников особого свойства, так как они включают в себя все шарниры цепи, что доказывается тем, что в уравнениях содержатся все координаты (ξ, η). Количество шарнирных многоугольников в цепи, однако, оказывается, большим, чем приведенное число, и оно зависит в основном от расположения соединений между звеньями цепи. Это расположение у цепей с одинаковым количеством звеньев является определенным и ко-

[3] Речь идет о многоугольниках, которые образуются звеньями внутри цепей Грюблера, позже они получили название замкнутых подвижных контуров

леблется только между двумя величинами, как только принимается во внимание ограничивающее условие, что каждый шарнир должен встречаться в двух, и только в двух шарнирных многоугольниках.

Отметим, что всегда в цепи можно найти число шарнирных многоугольников, которые удовлетворяют поставленному требованию о том, что каждый шарнир цепи относится к двум и не более двух таких многоугольников. При этом имеется в виду, что i шарниров каждого звена цепи соединяются посредством i прямых линий в простой многоугольник. В двухпарных звеньях линии соединения двух шарниров рассматриваются как две стороны многоугольника. Составляя для каждого звена цепи, для i его сторон уравнения (15) разностей абсцисс, относящихся к i сторонам, получим для звена $\sum_h$ следующие i уравнений

$$\left.\begin{aligned} x_{hk}-x_{hi}&=a_h^{(kl)}\cos\omega_h-b_h^{(kl)}\sin\omega_h,\\ x_{hl}-x_{hm}&=a_h^{(lm)}\cos\omega_h-b_h^{(lm)}\sin\omega_h,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ x_{hr}-x_{hk}&=a_h^{(rk)}\cos\omega_h-b_h^{(rk)}\sin\omega_h.\end{aligned}\right\}, \tag{17}$$

Для всей цепи количество таких уравнений составит

$$\sum_{i=2}^{i=\frac{n}{2}}(in_i)=2p\,.$$

При этом следует учитывать, что каждая абсцисса шарниров используется лишь в четырех уравнениях (17). Например, абсцисса x_{hk} шарнира, который связывает звенья $\sum_h$ и $\sum_к$, появляется в следующих четырех уравнениях[4]

$$\left.\begin{aligned} x_{hk}-x_{he}&=a_h^{(kl)}\cos\omega_h-b_h^{(kl)}\sin\omega_h,\\ x_{hr}-x_{hk}&=a_h^{(rk)}\cos\omega_h-b_h^{(rk)}\sin\omega_h,\\ x_{kh}-x_{ks}&=a_k^{(hs)}\cos\omega_k-b_k^{(hs)}\sin\omega_k,\\ x_{k\omega}-x_{kh}&=a_k^{(\omega h)}\cos\omega_k-b_k^{(\omega h)}\sin\omega_k.\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Так как x_{hk}=x_{kh}, то можно исключить из уравнений (18) два уравнения, которые относятся к тем же звеньям, путем сложения или вычитания имеющихся уравнений. Это обстоятельство делает очевидным, что $2p$ уравнений (17) можно перевести в число цепей, которые обладают свойствами: 1) что в каждой цепи может появляться абсцисса шарнира только в двух уравнениях, 2) что уравнением одной и той же цепи описываются многие другие звенья цепи, 3) что путем суммирования уравнений цепи их можно привести к форме (16), что приведет к исключению всех абсцисс шарниров этой цепи.

Отсюда следует вывод о том, что каждому уравнению такой цепи соответствует шарнирный многоугольник в цепи, и что все многоугольники ее, количество которых будем обозначать «α», отличаются друг от друга. Но если принять во внимание, что каждая абсцисса шарнира входит лишь в два из названных многоугольников (α), то становится ясным, что каждому шарниру цепи соответствует два и не более двух шарнирных многоугольников. Что и требовалось доказать.

---

[4] Отметим, что в этих уравнениях могут быть использован как $r=l$, так и $\omega=s$.

Нетрудно увидеть, что α может иметь только два значения $\frac{n}{2}-1$ и $\frac{n}{2}$. Так как количество независимых друг от друга исключаемых уравнений не зависит от способа их исключения, т.е. не только должно быть $\alpha \geq \frac{n}{2}-1$, но и также, $\alpha > \frac{n}{2}-1$, то среди α систем уравнений должны встречаться $\frac{n}{2}-1$ уравнений, из которых вытекают независимые уравнения в форме (16). Как уже упоминалось, в последних уравнениях должны иметься все величины ξ, η, поэтому в группах уравнений $\frac{n}{2}-1$ должны появляться все абсциссы шарниров, откуда следует, что шарнирные многоугольники, соответствующие группам уравнений, содержат в себе все шарниры.

Итак, если $\alpha > \frac{n}{2}-1$, то в цепи можно обнаружить $\frac{n}{2}-1$ шарнирных многоугольников, обладающих тем свойством, что часть шарниров является общей для двух из многоугольников, в то время как остальные шарниры относятся только к одному из этих многоугольников. Последние шарниры образуют, следовательно, один и только один из следующих многоугольников. Если каждый шарнир должен быть общим только для двух многоугольников, то α не может быть больше чем $\frac{n}{2}$.

Итак, следующий вывод можно сформулировать так: если у замкнутой плоской цепи принудительных подвижных звеньев с наибольшим количеством шарниров многоугольник выбирается так, что каждый шарнир цепи относится к двум и только к двум многоугольникам, то их количество составляет либо $\frac{n}{2}-1$, либо $\frac{n}{2}$.

Следующим непосредственным выводом является фиксирование количества всех сторон многоугольников.

Для этого случая, если через α_i обозначить количество i-углов многоугольника, очевидно выражение $\sum_{i=4}^{i=n}(i\alpha_i)$[5]. Так как число сторон многоугольника равно числу его углов, то очевидным также является выражение

$$\sum_{i=4}^{i=n}(in_i) = 2p. \tag{19}$$

Если учесть, что для цепей с наибольшим числом шарниров $p=\frac{3}{2}n-2$, и что согласно выбранному способу обозначения $\sum(\alpha_i)=\alpha$, то можно утверждать, что для рассматриваемых цепей существуют два соотношения – или в виде

[5] Согласно определению, один шарнирный многоугольник может иметь не менее 4 и не более ***n*** сторон, поэтому сумма может браться от $i=4$ до $i=n$.

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=4}^{i=n}(i\alpha_i) &= 3n-4, \\ \sum_{i=4}^{i=n}(\alpha_i) &= \frac{n}{2}-1, \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{V^a})$$

или в виде

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=4}^{i=n}(i\alpha_i) &= 3n-4, \\ \sum_{i=4}^{i=n}(\alpha_i) &= \frac{n}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{VI^a})$$

Здесь следует подчеркнуть, что цепь допускает не только одно разложение на шарнирные многоугольники, но и на несколько, поэтому цепь может удовлетворять отношениям как (V^a), так и (VI^a).

Некоторые виды цепей допускают разложение лишь на $\frac{n}{2}$ многоугольников, таковыми являются цепи, в которых используются звенья с $\frac{n}{2}$ шарнирами. Так как каждое звено, содержащее *i* шарниров, согласно определению шарнирного многоугольника должно принадлежать к *i* различным многоугольникам, то для вышеупомянутой цепи нельзя получить $\frac{n}{2}-1$ многоугольников. По этой причине является очевидным, что шестизвенные цепи могут разлагаться только на три многоугольника.

Но то, что существуют также цепи, которые не допускают разложения на $\frac{n}{2}$ шарнирных многоугольников, вытекает из следующего положения. Если из обоих соотношений (VI^a) исключить величину α_0, то получим

$$2\alpha_4 + \alpha_5 = 4 + \sum_{i=7}^{i=n}(i-6)\alpha_i .$$

Так как при всех условиях сумма

$$\sum_{i=7}^{i=n}(i-6)\alpha_i \geq 0 ,$$

то становится очевидным, что для цепей, которые допускают разложение на $\frac{n}{2}$ многоугольников, должно существовать выражение $2\alpha_4 + \alpha_5 \geq 4$. Цепь, которая не удовлетворяет этому условию, - это десятизвенная цепь, показанная на фигуре 12. В ней не может быть шарнирного четырехугольника, и тогда получаем $\alpha_5 \geq 4$. Действительно, в этой цепи имеются 4 шарнирных пятиугольника, а именно

12, 23, 34, 45, 15;
23, 37, 79, 89, 28;
34, 37, 79, 9X, 4X;
34, 37, 67, 56, 45.

Однако они не удовлетворяют поставленному условию потому, что шарнир 37 являет-ся общим для трех из многоугольников. Поэтому невозможно разложить цепь на $\frac{n}{2}=5$ многоугольников (согласно условию). Напротив, эта цепь допускает разложение на $\frac{n}{2}-1=4$ шарнирных многоугольника, а именно удовлетворяет четырем из семи решений, которые в этом случае имеет соотношение (V^a). Так, например, решение $\alpha_5=2, \alpha_6=1, \alpha_7=\alpha_8=\alpha_9=0, \alpha_{10}=1$ дает следующие четыре многоугольника

12, 23, 34, 45, 15;
23, 37, 79, 89, 28;
45, 56, 67, 79, 9X; 4X;
12, 28, 89, 9X, 4X; 34, 37; 67; 56, 15.

Чтобы доказать, что отношения (V^a) и (VI^a) можно использовать для поиска различных видов цепей с одинаковым числом звеньев, рассмотрим, как пример, восьмизвенные цепи. На основании соотношения (V^a) можно получить два уравнения

$$4\alpha_4+5\alpha_5+6\alpha_6+7\alpha_7+8\alpha_8=20,$$
$$\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6+\alpha_7+\alpha_8=3,$$

по которым, с помощью известных методов, можно найти следующие четыре решения (таблица 3).

Таблица 3

α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	фигура
1	0	0	0	2	11.1
0	0	1	2	0	11.2, 11.5
0	0	2	0	1	11.6
0	1	0	1	1	11.7

Цепи, соответствующие этим решениям, принадлежат к первому решению, потому что наличие четырехпарных звеньев исключает разложение на три шарнирных многоугольника. Эти цепи представлены на рисунке и соответствуют группам решений, номера рисунков которых содержит последний столбец вышеназванной таблицы. Из уравнений (VI^a) при n=8 по двум аналогичным соотношениям, можно найти следующие пять решений (таблица 4).

Таблица 4.

α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	фигура
3	0	0	0	1	11.1, 11.7
2	0	2	0	0	11.1, 11.7, 11.9, 11.11
2	1	0	1	0	11.2, 11.8
1	2	1	0	0	11.3, 11.4, 11.8, 10.10, 11.12
0	4	0	0	0	11.5, 11.6, 11.12

Связав их с группами решений, приведенных ранее, получим различающиеся цепи, показанные на фигуре 11.

Номера механизмов в таблице даны тем цепям, которым соответствуют указанные многоугольники.

Путем сравнения обеих таблиц можно увидеть, что все восьмизвенные цепи включают в себя по четыре шарнирных многоугольника, и только пять из них допускают разложение на три многоугольника. Далее, достойно внимания то, что цепи 11.2 и 11.3, которые относятся к той же группе в первой таблице, во второй относятся к различным группам, в то время как цепи 11.3 и 11.4, а также 11.5 и 11.6 , которые относятся к той же группе решений во второй таблице, соответствуют различным группам первой таблицы. Цепи 11.7 и 11.9, а также 11.8 и 11.10 хотя и относятся к одной и той же группе, однако различного рода разложения становятся возможными благодаря тому, что шарниры четырехпарых звеньев можно объединять трояким способом в однорядный четырехгранник. Путем выбора четырехгранника становится возможным разложение цепи на четыре многоугольника. Следовательно, все приведенные восьмизвенные цепи различаются тем, что они допускают различного рода разложения на три или четыре многоугольника[6].

То обстоятельство, что из цепей с наибольшим количеством шарниров все прочие можно получить за счет объединения шарниров отдельных звеньев без уменьшения числа звеньев, т.е. осуществлять тройные соединения между звеньями, дает основание использовать соотношения (V^a) и (VI^a) на все другие цепи.

Если расстояние между шарнирами в каком-либо звене с более чем двумя шарнирами переходит в нуль, то возможно, что 1) количество шарнирных многоугольников остается для полученной цепи таким же как и в первоначальной цепи; 2) количество сторон многоугольника $\sum_{i=4}^{i=n}(i\alpha_i)$ уменьшается на такую же сумму (а именно на 1), также как и количество звеньев $\sum_{i=2}^{i=\frac{n}{2}}(in_i)$, откуда следует, что соотношение $\sum_{i=4}^{i=n}(i\alpha_i)=\sum_{i=2}^{i=\frac{n}{2}}(in_i)$ остается пригодным и для полученной цепи.

Отсюда следует, что вместо (V^a) и (VI^a) для полученных цепей можно использовать следующие, более общие соотношения

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=4}^{i=n}(i\alpha_i) &= \sum_{i=2}^{i=\frac{n}{2}}(in_i),\\ \sum_{i=4}^{i=n}(\alpha_i) &= \frac{n}{2}-1,\end{aligned}\right\} \qquad (V)$$

[6] Переводчики текста Грюблера считают необходимым отметить, что решение автора (М. Грюблера) по системе V^a и описание восьмизвенных цепей по этому решению не соответствует приведенным на рисунке. Ни одна из восьмизвенных групп не содержит в своем составе трех многоугольников, все они содержат по четыре многоугольника

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=4}^{i=n}(i\alpha_i) = \sum_{i=2}^{i=\frac{n}{2}}(in_i), \\ \sum_{i=4}^{i=n}(\alpha_i) = \frac{n}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{VI}$$

Они являются прямым следствием условия, что каждый i-рядный шарнир должен появляться в i и только в i (согласно определению) шарнирных многоугольников. Так как условие, которому соответствуют шарнирные многоугольники цепей с наибольшим числом шарниров, изменяется при создании иных цепей, потому что, как видно из способа вывода, в каждом i-рядном шарнире сходятся $2i$ шарнирных многоугольника, т.е. в них лежат i профильных углов.

Из этого условия следует что

$$\sum_{i=4}^{i=n}(i\alpha_i) = \sum_{i=2}^{i=\frac{n}{2}}(ip_i). \tag{20}$$

Из вышепоказанного соотношения видно, что на его основании у цепей, которые содержат $\frac{n}{2}$ рядный шарнир, невозможно получить $\frac{n}{2}-1$ многоугольников. Следует еще подчеркнуть, что у всех рассмотренных цепей невозможно разложение на $\frac{n}{2}$ и даже на $\frac{n}{2}-1$ многоугольников, если их не было у первоначальной цепи. Это потому, что количество шарнирных многоугольников из-за способа их соединения не может претерпевать изменений.

Наконец, следует еще указать, что для всех цепей, у которых $p<n$, сумма сторон многоугольников $\sum(i\alpha_i)$, а также число многоугольников $\sum(\alpha_i)$ составляет не от i=4 до $i=n$, а только до $i=p$, так как каждый шарнирный многоугольник становится замкнутым, как только в нем появляются все p углов.

Для цепей с наименьшим числом шарниров из вышепоказанных отношений, с использованием формул (13) и (14), выводятся следующие соотношения

$$\sum_{i=4}^{i=\frac{n}{2}+2}(i\alpha_i) = 2n,$$

$$\sum_{i=4}^{i=\frac{n}{2}+2}(i\alpha_i) = \begin{cases} \frac{n}{2}-1 \\ \frac{n}{2} \end{cases}.$$

В случае $\alpha=\frac{n}{2}$, из приведенных уравнений после умножения второго уравнения на 4 и вычитания его из первого следует

$$\sum_{i=4}^{i=\frac{n}{2}+2} (i-4)\cdot\alpha_i = 0,$$

так что $\alpha_5 = \alpha_6 = ... = \alpha_{\frac{n}{2}+2} = 0$, и тогда $\alpha_4 = \frac{n}{2}$.

Отсюда следует, что $\frac{n}{2}$ шарнирных многоугольников сводятся в этом случае до четырехугольников.

Если показанные соотношения применить к восьмизвенным цепям, то в случае $\alpha = \frac{n}{2} - 1 = 3$ получаются два уравнения

$$4\alpha_4 + 5\alpha_5 + 6\alpha_6 = 16,$$
$$\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = 3,$$

из которых находятся два решения $\alpha_4 = 0$, $\alpha_5 = 2$, $\alpha_6 = 1$ и $\alpha_4 = 1$, $\alpha_5 = 0$, $\alpha_6 = 2$. Это соответствует, однако, только второму варианту возможного разложения цепи (фигуре 13[а]), потому что в этом случае может появляться нечетное количество шарнирных многоугольников. То, что обе цепи, представленные на фигуре 13[а] и 13[в], допускают разложение на $\frac{n}{2} = 4$ четырехугольника, вполне очевидно.

Цюрих, март 1883 г.

Поступила в редакцию 02.09.2011