

К ИССЛЕДОВАНИЮ НЕКОТОРЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ НА БАЗЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УСЛОВНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

1. Введение

Метод условного осциллятора, предложенный автором в 1969 г., можно отнести к группе асимптотических методов анализа линейных неавтономных систем, содержащих большой параметр [1–5]. В методе условного осциллятора развиты идеи обобщённого ВКБ метода применительно к области изменения параметров, в которых отсутствуют барьерные эффекты, возникающие при переходе переменного параметра через нуль (явление Стокса) [6,7]. Класс задач, соответствующий именно этой области, типичен для колебательных систем механизмов и машин. Метод условного осциллятора основан на установленной аналогии между параметрическими колебаниями в исходной системе и вынужденными колебаниями в некоторой вспомогательной системе, названной условным осциллятором.

В этой статье рассматривается ряд динамических моделей, анализ которых базируется на точных или близких к ним приближённых решениях условного осциллятора. За последние десятилетия в связи с развитием численных методов и их реализацией с помощью современных компьютерных программ интерес к точным решениям при проведении инженерных расчётов существенно ослаб. Тем не менее, точные решения сохраняют свою значимость, причём не только с эстетических позиций. Во-первых, с помощью точных «эталонных» решений могут быть оценены эффективность и область применения приближённых методов. Кроме того, они играют существенную роль при динамическом синтезе системы. Дело в том, что с позиций инженерного расчёта традиционная иерархия переменных несколько видоизменяется. В частности, инженера в меньшей мере интересует обобщённая координата по сравнению с амплитудами, частотами и их трансформацией. В этом смысле аналитическая форма точного решения позволяет лучше осмыслить физическую природу исследуемого объекта, предсказать поведение системы и наметить пути её динамического совершенствования.

Как известно, линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами, равно как и нелинейные, в общем случае не имеют точного аналитического решения. Как образно отметил Р. Беллман, подобные задачи «...бросают вызов исследователю». Тем не менее, иногда удаётся изящной подстановкой свести задачу к линейному уравнению с постоянными коэффициентами. Такой пример с пометкой, «неожиданная удача» приводится в монографии Я.Г. Пановко [8] при решении задачи об изгибных колебаниях балки с перемещающейся опорой. В работах [2–5] на базе метода условного осциллятора для подобных систем был разработан регулярный способ формирования одного класса семейств точных решений, к которому, в частности, относится и приведенный выше пример. Эта статья посвящена дальнейшему развитию данного подхода.

2. Формирование точных решений с помощью метода условного осциллятора

Рассмотрим одномассовую динамическую модель с параметрами, зависящими от времени, которая описывается следующим дифференциальным уравнением

$$\ddot{q} + 2n(t)\dot{q} + k^2(t)q = Q(t), \quad (1)$$

где q – обобщённая координата; $Q(t)$ – возмущение; $k^2(t)$, $n(t)$ – некоторые функции времени, первая из которых на интервале $[t_0, t_*]$ должна быть непрерывной, а вторая – непрерывно дифференцируемой.

Как показано в работах [2–6], уравнение (1) обычно с достаточной для инженерных приложений точностью описывает колебания привода с переменным приведённым моментом инерции, систем с изменяющимися упругими характеристиками, с переменной структурой и др.

С помощью обобщённой подстановки Эйлера

$$q = y \exp\left[-\int_0^t n(t) dt\right],$$

приведём уравнение (1) к следующему виду:

$$\ddot{y} + p^2(t)y = F(t), \quad (2)$$

где $p^2(t) = k^2(t) - n^2(t) - \dot{n}(t)$; $F(t) = Q(t) \exp\left[\int_0^t n(t) dt\right]$.

Опуская выкладки, приведённые в работах [2–6], получаем

$$y_* = A \sqrt{\frac{\Omega_0}{\Omega(t)}} \cos\left[\int_0^t \Omega(t) dt + \gamma\right] = A e^{-0,5(z-z_0)} \cos\left[\Omega_* \int_0^t e^z dt + \gamma\right], \quad (3)$$

где A , γ – амплитуда и фаза, определяемые начальными условиями; Ω_0 – произвольный параметр, имеющий размерность частоты; $z = \ln(\Omega/\Omega_*)$; $z_0 = z(0)$; $\Omega_0 = \Omega(0)$.

Связь между функцией $z(t)$ и переменной частотой $p(t)$ выражается следующим дифференциальным уравнением, соответствующим некоторому условному осциллятору при возмущении $2p^2(t)$:

$$\ddot{z} - 0,5\dot{z}^2 + 2\Omega_*^2 e^{2z} = 2p^2(t). \quad (4)$$

Дифференциальное уравнение (4) соответствует некоторому условному колебательному контуру (осциллятору) с «жёсткой» нелинейной характеристикой, в котором роль вынуждающей силы играет функция, пропорциональная квадрату «собственной» частоты. В качестве «удобного» положительного свойства этого осциллятора отметим, что *его параметры, отображённые в левой части уравнения, носят общий характер и не зависят от параметров системы.*

Коротко остановимся на нескольких приближённых решениях уравнения (4). При медленном изменении функции $p^2(t)$ реакция условного осциллятора на возмущение можно считать статическим. Тогда первыми двумя слагаемыми в левой части уравнения можно пренебречь, следовательно, $\Omega \approx p$. При этом решение (3) отвечает ВКБ-приближению первого порядка. При линеаризации уравнения (4) условный осциллятор представляет собой систему с собственной частотой, равной $2\Omega_*$. Если принять Ω_* как среднее значение p и на этой частоте происходит пульсация собственной частоты исходной системы, то имеет место

главный параметрический резонанс. Таким образом, «силовому» резонансу условного осциллятора отвечает параметрический резонанс исходной системы.

Предположим, что известно частное решение z_* этого уравнения. Тогда решение однородного уравнения y_* определяется соотношением (3), а частное решение y_{**} неоднородного уравнения (2) находится с помощью двух линейно независимых решений y_1, y_2 :

$$y_{**} = \int_0^t F(s)\eta(t,s)ds, \quad (5)$$

где

$$\eta(t,s) = \frac{y_1(s)y_2(t) - y_1(t)y_2(s)}{y_1(s)\dot{y}_2(s) - \dot{y}_1(s)y_2(s)}.$$

В рассматриваемом случае

$$y_1 = \Omega(t)^{-0,5} \cos \left[\int_0^t \Omega(\xi)d\xi \right]; \quad y_2 = \Omega(t)^{-0,5} \sin \left[\int_0^t \Omega(\xi)d\xi \right]. \quad (6)$$

Учитывая, что

$$\Delta(t) = y_1(t)\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)y_2(t) = \text{const} = \Delta(0),$$

и опуская ряд упрощений, получаем несколько модифицированную формулу Дюамеля

$$y_{**} = \frac{1}{\sqrt{\Omega(t)}} \int_0^t \left[\frac{F(s)}{\sqrt{\Omega(s)}} \sin \int_s^t \Omega(\xi)d\xi \right] ds. \quad (7)$$

Ниже приводится решение уравнения (2) в иной форме, нередко более удобной для анализа. Введём новую переменную

$$w = y \sqrt{\frac{\Omega}{\Omega_0}} = ye^{0,5(z-z_0)}. \quad (8)$$

Тогда

$$w = w_0 \cos \Phi + w'_0 \sin \Phi + \int_{\Phi_0}^{\Phi} L(\psi) \sin(\Phi - \psi) d\psi, \quad (9)$$

где $w_0 = w(\Phi_0) = y_0$; $w'_0 = \frac{dw}{d\Phi}(\Phi_0) = \frac{\dot{y}_0}{\Omega_0} + 0,5 \frac{\dot{\Omega}_0}{\Omega_0^2}$; $L(\psi) = \frac{F(\psi)}{\Omega(\psi)\sqrt{\Omega_0\Omega(\psi)}}$.

Легко убедиться в том, что функция, определяемая соотношением (9), является общим решением дифференциального уравнения

$$w'' + w = L(\Phi). \quad (10)$$

Таким образом, если известно частное решение z_* уравнения (4), то с помощью преобразования времени

$$\Phi = \Omega_* \int_0^t e^{\tilde{z}} dt + \Phi_0 \quad (11)$$

задача сводится к анализу одномассового осциллятора с постоянными параметрами, для которого роль времени выполняет функция Φ .

Далее рассмотрим способ формирования точного решения. Используем рассмотренный метод для определения параметров свободных и вынужденных колебаний при монотонном и достаточно резком изменении функции $p^2(t)$ [4]. Пусть на некотором отрезке времени $t \in [0, t_*]$ происходит монотонное изменение $p^2(t) \in [p_0^2, p_*^2]$. Зададимся частным решением z_* в виде некоторого семейства функций со свободными параметрами β_1, \dots, β_m :

$$z_* = \tilde{z}(t, \beta_1, \dots, \beta_m). \quad (12)$$

После подстановки (12) в (4) получаем некоторую функцию $\tilde{p}^2(t, \beta_1, \dots, \beta_m)$, определённую следующим образом:

$$\tilde{p}^2(t, \beta_1, \dots, \beta_m) = 0,5 \ddot{\tilde{z}} - 0,25 \dot{\tilde{z}}^2 + \Omega_*^2 e^{2\tilde{z}}. \quad (13)$$

Далее запишем дифференциальное уравнение

$$\ddot{u} + \tilde{p}^2(t, \beta_1, \dots, \beta_m)u = W(t). \quad (14)$$

Очевидно, что уравнение (14) имеет точное аналитическое решение, определяемое зависимостями (8), (9), (11), (12), (13).

Можно показать, что полученное из (14) однородное дифференциальное уравнение при отмеченном способе формирования $\tilde{p}^2(t)$ является модификацией уравнения Бесселя следующего вида [9]:

$$\ddot{u} + \left[\frac{1}{2} \frac{\ddot{\Phi}}{\dot{\Phi}} - \frac{3}{4} \left(\frac{\ddot{\Phi}}{\dot{\Phi}} \right)^2 + \left(\frac{1}{4} - k^2 \right) \left(\frac{\dot{\Phi}}{\Phi} \right)^2 \right] u = 0 \quad (15)$$

при $k = \frac{1}{2}$.

Решением уравнения (15) является [9]:

$$u = Z_k(\Phi) \sqrt{\frac{\Phi}{\dot{\Phi}}}, \quad (16)$$

где $Z_k(\Phi) = C_1 J_k(\Phi) + C_2 Y_k(\Phi)$.

Здесь J_r, Y_k – функции Бесселя первого и второго рода; C_1, C_2 – произвольные постоянные.

При $k = \frac{1}{2}$ имеем

$$J_{\frac{1}{2}}(\Phi) = \left(\frac{2}{\pi\Phi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin \Phi; \quad Y_{\frac{1}{2}}(\Phi) = -J_{-\frac{1}{2}}(\Phi) = \left(\frac{2}{\pi\Phi}\right)^{\frac{1}{2}} \cos \Phi.$$

Отсюда

$$u = (C_1 \sin \Phi + C_2 \cos \Phi) \sqrt{\frac{2}{\pi\Phi}}.$$

Этот результат при некотором видоизменении произвольных постоянных полностью совпадает с решением однородного уравнения, приведённым выше (см. (3), (8), (9)).

3. Исследование изгибных колебаний консольной балки переменной длины на базе точных решений

Рассмотрим динамическую модель консольной балки переменной длины, показанную на рис. 1. Подобная модель встречается при расчёте изгибных колебаний выдвигающихся шпинделей, игл ряда трикотажных машин и в ряде других случаев.

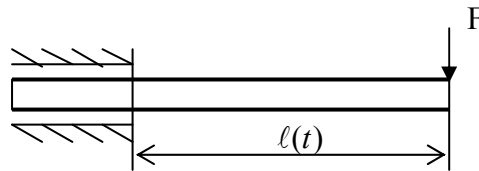


Рис. 1. Динамическая модель

Примем $l(t) = l_0 + x(t)$, где $x(t) = vt$, v – скорость. Трансформируем исходную динамическую модель балки с распределёнными параметрами в балку с приведенной сосредоточенной массой на её конце. Для рассматриваемой формы колебаний при приведении будем исходить из равенства собственных частот обеих моделей при фиксированной длине балки. На основании частотного уравнения $\cos \sigma l \cdot \operatorname{ch} \sigma l = -1$ имеем $p_r = \sigma_r^2 \sqrt{EI/\rho}$, где E, I – модуль упругости и экваториальный момент инерции, ρ – погонная масса. При $r = 1, r = 2$ корнями частотного уравнения являются $\sigma_1 l = 1,875; \sigma_2 l = 4,694$. Опуская элементарные выкладки, для первой формы колебаний получаем $m(t) = 0,243\rho l(t); c(t) = 3EI / l(t)^3$. Отсюда

$$p(t)^2 = p_0^2 / (1 + \alpha t)^4, \quad (17)$$

где $p_0^2 = c(l_0) / m(l_0), \alpha = v / l_0$.

Рассмотрим двухпараметрическое семейство функций следующего вида:

$$\tilde{z} = -2 \ln(\beta_1 \tau + \beta_2). \quad (18)$$

Функции этого семейства являются решением дифференциального уравнения

$$\tilde{z}'' - 0,5\tilde{z}'^2 = 0. \quad (19)$$

Это интересное свойство данного семейства позволяет записать решение уравнения (13) в следующем простом виде:

$$\tilde{v}^2 = e^{2\tilde{z}} = \frac{1}{(\beta_1 \tau + \beta_2)^4}. \quad (20)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае $\Omega = p_0 \exp \tilde{z} = \tilde{p}$, т.е. определяется, как и в первом ВКБ-приближении, применяемом при медленном изменении параметров. При этом условие медленности изменения $p(t)$ не оговаривается, однако полученное таким образом точное решение накладывает определённые ограничения на вид функции $p(t)$.

Определим параметры β_1 и β_2 , исходя из условия равенства функций $p^2(t)$ и $\tilde{p}^2(t)$ на границах промежутка. Примем, что при $\tau = \tau_*$ происходит смена знака скорости v и $v = p/p_0$. Тогда, принимая во внимание, что при $t = 0$ ($\tau = 0$) $v_0 = \tilde{v}_0 = 1$ и при $t = t_*$ ($\tau = \tau_*$) $v_* = \tilde{v}_*$, имеем $\beta_1 = \beta_{11} = (\tilde{v}_*^{-0,5} - 1)\tau^{-1}$ при $0 \leq \tau \leq \tau_*$; $\beta_1 = \beta_{12} = (\tilde{v}_*^{0,5} - 1)\tau_*$ при $\tau_* \leq \tau \leq 2\tau_*$; $\beta_2 = 1$. Отсюда при учёте (18) и условий сопряжения на участках находим $z(\tau)$:

$$\begin{aligned} z(\tau) &= -2 \ln(\beta_{11}\tau + 1) && \text{при } 0 \leq \tau \leq \tau_*; \\ z(\tau) &= z(\tau_*) - 2 \ln[\beta_{12}(\tau - \tau_*) + 1] && \text{при } \tau_* \leq \tau \leq 2\tau_*. \end{aligned} \quad (21)$$

На рис. 2, 3 отображены полученные на основании зависимостей (18)–(21) графики координат условного осциллятора и соответствующие графики изменения безразмерной «собственной» частоты на интервале безразмерного времени $0 \leq \tau \leq 2\tau_*$. Анализ этих графиков в первую очередь представляет интерес как возможность предсказать максимальное изменение амплитуды функции y_* без решения исходного дифференциального уравнения. Действительно, согласно (3) имеем

$$\max y_* \leq A \exp[-0,5(z_{\min} - z_0)]. \quad (22)$$

Следует иметь в виду, что амплитуда свободных колебаний, определяемая функцией $q(t)$, отличается от значения, полученного по формуле (22), причём не только в меньшую сторону (из-за диссипации), но и в большую сторону (см. ниже).

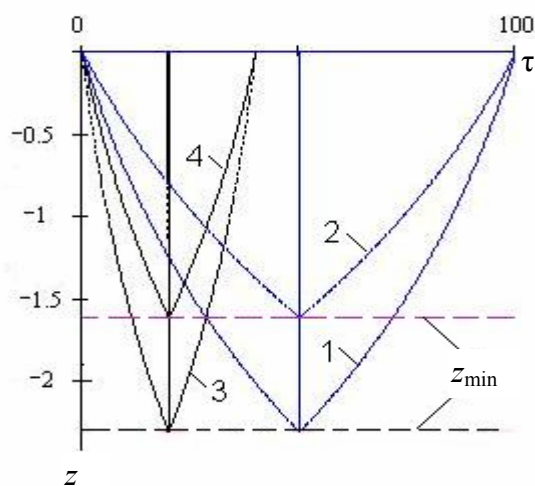


Рис. 2. Графики $z(\tau)$: 1, 2 – $\tau_* = 50$; 3, 4 – $v_* = 0, 1; 0, 2$ при $\tau_* = 50$.

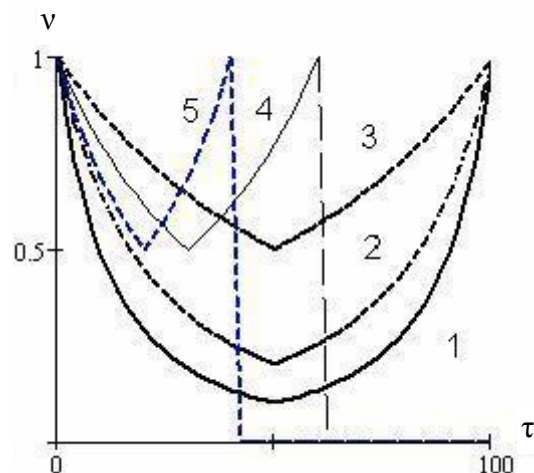


Рис. 3. Графики $v(\tau)$: 1, 2, 3 – $v_* = 0, 1; 0, 2; 0, 5$ при $\tau_* = 50$; 4, 5 – $v_* = 0, 5$ при $\tau_* = 30; 20$.

Приведенные графики иллюстрируют интересное свойство: степень возрастания амплитуд κ при $n=0$ определяется лишь перепадом частот (параметр v_*) и не зависит от τ_* (рис. 4, линии 1).

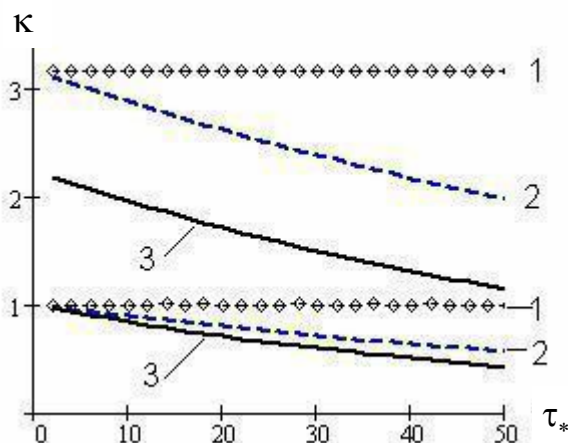


Рис. 4. Графики $\kappa(\tau_*)$: 1 – $v_* = 0, 1; \delta = 0$; 2 – $v_* = 0, 1; \delta = 0, 03$; 3 – $v_* = 0, 2; \delta = 0, 03$.

При учёте конструкционного демпфирования имеем $q = y_* \exp[-\delta \int_0^t p(\xi) d\xi]$, где $\delta = \vartheta / (2\pi)$, ϑ – логарифмический декремент. На графиках нижние из двух одноимённых кривых 2 и 3 отвечают интервалу τ_* , а верхние – $2\tau_*$, т.е. полному циклу движения. Интеграл в показателе представляет собой изменение фазы колебаний, который после перехода к переменной τ равен $\tau / (1 + \beta_1 \tau)$. Однако в этих графиках не учтён динамический эффект от гироскопических членов, учёт которых может привести к росту амплитуд. Этот эффект чётко виден на рис. 5, где приведены типовые графики свободных колебаний при отсутствии диссипации ($q = y_*$) и при её учёте. Рост амплитуд колебаний имеет место при переходе в

зону низких частот при нарушении условий динамической устойчивости на конечном интервале времени [1–5].

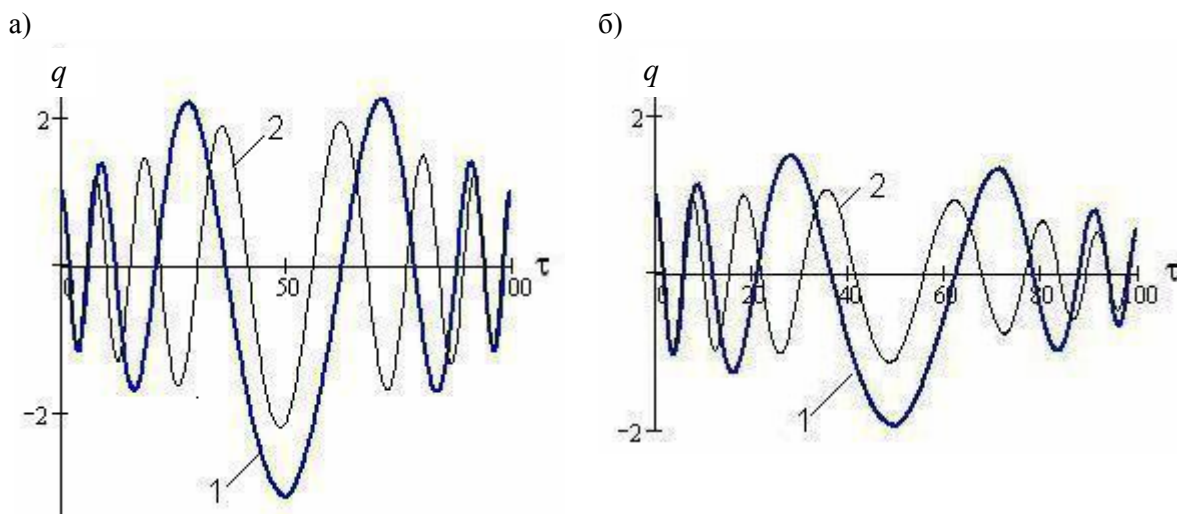


Рис. 5. Свободные колебания при $\delta = 0$ (а) и $\delta = 0,03$ (б): 1 – $v_* = 0,1$; 2 – $v_* = 0,2$.

При наличии диссипации эффект возрастания амплитуд проявляется в меньшей степени. В связи с этим может быть поставлена задача о критическом уровне диссипации, при котором обеспечивается затухающий характер свободных колебаний. На основании исследования этой проблемы применительно к нашему случаю получено следующее условие:

$$\delta > \delta_* = 0,5\beta_1 / (1 + \beta_1\tau). \quad (23)$$

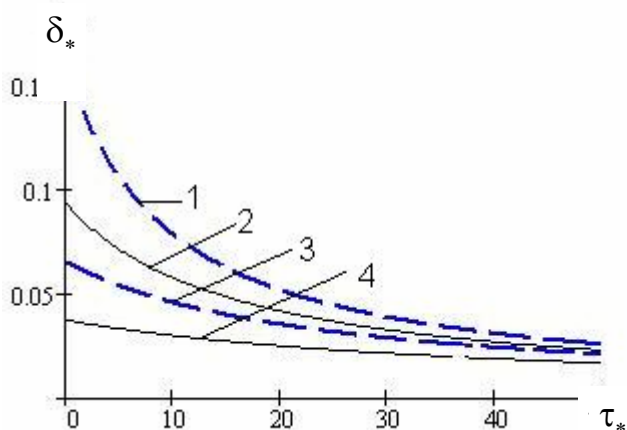


Рис. 6. Критические значения коэффициента демпфирования:
1, 2 – $\tau_* = 50$; $v_* = 0,1; 0,2$; 3, 4 – $\tau_* = 20$; $v_* = 0,1; 0,2$.

На рис. 6 приведены графики критических значений коэффициента демпфирования. Наиболее существенным фактором, определяющим условие устойчивости (23), является интенсивность изменения «собственных» частот, которая характеризуется безразмерной функцией \dot{p}/p^2 .

Можно показать, что амплитуда свободных колебаний лежит в интервале, ограниченном двумя предельными случаями, соответствующим скачкообразному и медленному изменению «собственной» частоты. При этом $A(0)/\sqrt{v_*} < \max y_* < A(0)/v_*$. При $v_*\tau_* > 2\pi$ изменение параметров можно считать медленным. Для определения вынужденных колебаний воспользуемся зависимостью (7), которая при учёте диссипации принимает вид

$$Y = \exp[-0,5z(\tau)] \int_0^\tau \{W(s) \exp[-0,5z(s) - \delta \int_s^\tau v(\xi) d\xi] \sin \int_s^\tau v(\xi) d\xi\} ds. \quad (24)$$

Ниже приведены типовые графики вынужденных колебаний при $W = 1, \tau_* = 50, \delta = 0$ (рис. 7, а). На рис. 7, б для случая $\delta = 0,03, v_* = 0,2$ приведены графики, полученные аналитическим и численным методами. На основании многочисленных сопоставлений подобного рода автор пришёл к выводу, что в зонах затухания накопленная погрешность при численных методах приводит к эффекту, эквивалентному повышению диссипации, и, наоборот, – при нарастании амплитуд – к эффекту её снижения.

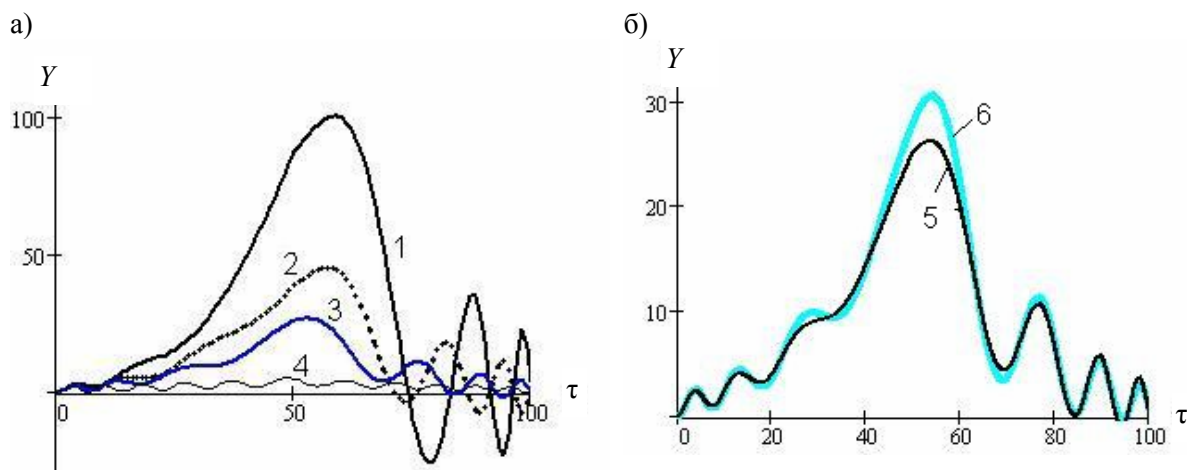


Рис. 7. Вынужденные колебания: 1 – $v_* = 0,1$; 2 – $v_* = 0,15$; 3 – $v_* = 0,2$; 4 – $v_* = 0,5$;
5, 6 – аналитическое и численное решения.

Из анализа графиков следует, что при существенном и резком изменении «собственных» частот система реагирует на постоянную силу почти как на мгновенное приложение нагрузки. В подобных случаях в пределах одного цикла диссипативные силы проявляются слабо.

4. Колебания ползуна на упругих направляющих

Рассмотрим динамическую модель ползуна или каретки, совершающих с постоянной скоростью возвратно-поступательное движение по направляющим, которые схематизированы в виде балки на двух опорах (рис. 8). При перемещении ползуна упругие и инерционные характеристики системы переменны.

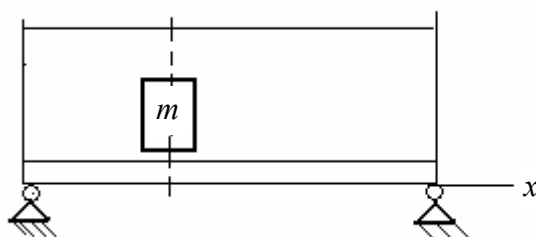


Рис. 8. Динамическая модель.

Приведём упругие и инерционные параметры балки к сечению перемещающейся массы, базирываясь на первой форме колебаний:

$$c_*(t) = \frac{3EI\ell}{x^2(t)(\ell - x(t))^2}; m_*(t) = m + \frac{\rho\ell}{\pi^4 x^2(t)(\ell - x(t))^2}, \quad (25)$$

где c_* , m_* – приведенные значения коэффициента жёсткости и массы; E , I – модуль упругости и момент инерции сечения балки; ρ – погонная масса балки.

Согласно (25) при $m \rightarrow 0$, как и следовало ожидать, собственная частота не зависит от времени. Рассмотрим второй предельный случай, когда $\rho\ell \ll m$, т.е. инерционными свойствами балки можно пренебречь. Тогда переменная «собственная» частота определяется как

$$p(t) = 0,25 p_* / [\xi(t)(1 - \xi(t))], \quad (26)$$

где $p_* = 4\sqrt{3EI/(m\ell^3)}$; $\xi(t) = x(t)/\ell$; $\xi(t) \in [\xi_0, (1 - \xi_0)]$.

Согласно (26) значение p_* соответствует минимальному значению $p(t)$ при $\xi = 0,5$. На рис. 9 приведены типовые графики $v(\xi) = p(\xi)/p_*$ и $z(\xi) = \ln v(\xi)$ при $\xi_0 = 0,1$. Перепад значений частот равен $v_0 = p(\xi_0)/p_*$.

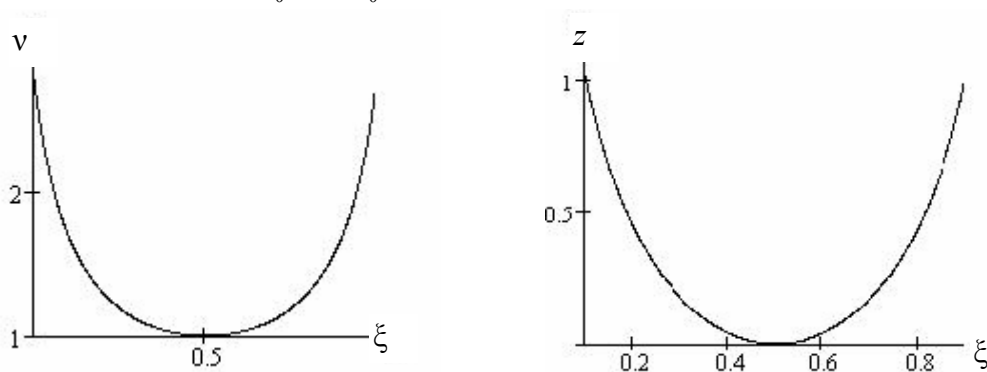


Рис. 9. Графики $v(\xi)$ и $z(\xi)$.

Методика построения точного решения совпадает с изложенной выше. Однако в отличие от предыдущего случая теперь функции v и z не соответствуют точному решению условного осциллятора. Тем не менее, если при задании граничных условий отказаться от условия непрерывности производных этих функций при $\xi = 0,5$, могут быть получены эффек-

тивные приближённые решения. В частности, хорошие результаты даёт семейство точных решений вида $z = -j \ln(\beta_1 \tau + \beta_2)$ при $j = 1; 2$.

Заключение

В данной статье мы ограничились лишь несколькими примерами применения точных решений в задачах анализа и синтеза динамических моделей, встречающихся при проектировании машин и механизмов и машин. Число таких примеров при решении конкретных задач может быть существенно увеличено. Так, в частности, используя решение условного осциллятора, можно в замкнутой форме получить зависимости для описания колебаний механизмов переменной структуры, построить решения для установившихся режимов систем с переменными параметрами, а также при резких и медленных изменениях параметров и др. Разумеется, при использовании точных решений следует руководствоваться здравым смыслом, имея в виду высокую «конкуренентоспособность» численных методов. Достоинство рассматриваемого подхода, в первую очередь, связано с тем, что формируется не само решение, носящее осцилляционный характер, а некоторая монотонная или медленно меняющаяся функция $\tilde{p}^2(t)$. Это позволяет произвести эффективные критериальные оценки на стадии динамического синтеза системы, не прибегая к многократному решению дифференциальных уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Вульфсон, И.И.** О колебаниях систем с параметрами, зависящими от времени. // Прикладная математика и механика. №2. Т.33, 1969. С. 331–337.
2. **Vulfson, J.I.** Analytical investigation of the vibration of mechanisms caused by parametric impulses. – Mechanism and Machine Theory. Vol.10, 1973. P.p. 305–313.
3. **Вульфсон, И.И.** Динамические расчёты цикловых механизмов. Л.: Машиностроение, 1976. – 309 с.
4. **Вульфсон, И.И.** Колебания машин с механизмами циклового действия. Л.: Машиностроение, 1990. – 309 с.
5. **Vulfson, I. I.** On the analytical investigation of nonstationary vibratory regimes by the method of fictitious oscillator // Вестник научно-технического развития. №3 (7), 2008. Pp.26–38.
6. **Хединг, Дж.** Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ). – М.: Мир, 1965. – 238 с.
7. **Фрёман Н., Фрёман П.У.** ВКБ-приложение. – М.: Мир, 1967. – 168 с.
8. **Пановко, Я.Г.** Механика деформируемого твёрдого тела. М.: Наука. 1985. – 288 с.
9. **Камке Э.,** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука. 1985. – 783 с.

Поступила в редакцию 09.06.2011