УДК 621.01

Л. Т. ДВОРНИКОВ, Н. С. ЖУКОВСКИЙ

АДАПТИРОВАННЫЙ ПЕРЕВОД С НЕМЕЦКОГО ЯЗЫКА СТАТЬИ: **MARTIN GRÜBLER «ALLGEMEINE EIGENSCHAFTEN DER ZWANGLÄUFIGEN EBENEN KINEMATISCHEN KETTEN»,** ИЗДАННОЙ В ЛЕЙПЦИГЕ В 1883 г.

Со времени публикации приведенной ниже на русском языке работы Мартина Грюблера (1883 г.) прошло более 125 лет. Вполне уместным, казалось бы, является вопрос – не устарел ли этот материал по своей актуальности и содержанию с позиций современной изученности проблемы структуры (строения) плоских кинематических цепей? Авторы перевода считают, что на поднятый вопрос следует ответить отрицательно – нет, не устарел, руководствуясь, по крайней мере, тремя основаниями.

Во-первых, изложенный в работе метод синтеза структур – метод Грюблера до настоящего времени широко используется исследователями, особенно в Европе. По сути своей, этот метод является единственным общепринятым методом, позволяющим решать вполне конкретные задачи при создании машин.

Во-вторых, отсутствие до настоящего времени полного перевода статьи Грюблера на русский язык приводит к тому, что и в российской инженерной практике, и в вузовском учебном процессе существует заметный пробел, отрицательно влияющий на качество обучения будущих инженеров.

А в-третьих, любые научные исследования, касающиеся важных проблем, в частности строения кинематических цепей, должны быть известны современным исследователям уже хотя бы для того, чтобы быть в курсе истории и логики процесса познания. Настоящая публикация является лишь первой частью перевода, вторая часть планируется к изданию в одном из следующих номеров журнала ТММ. Приведем некоторые данные, касающиеся биографии М. Грюблера.

Немецкий механик Грюблер Мартин Фюрхтегот родился в 1851 г. Учился он в Лейпцигском и Дрезденском университетах (1870-1880 гг.). В 1880-1885 гг. работал в Цюрихском политехникуме, с 1886 по 1896 г. был профессором Рижского политехнического института, с 1886 по 1890 гг. – в Высшей технической школе (Берлин-Шарлоттенбург), а с 1890 г. он – профессор Высшей технической школы в Дрездене.

Исследования Грюблера относятся к теории структуры механизмов, в которой он развил идею П.Л. Чебышева о критерии существования механизмов, и к кинематике механизмов. Ряд работ посвящен сопротивлению материалов. В последние годы жизни работал над уточнением терминологии механики в целях устранения некоторых исторически сложившихся неопределенностей. Умер М. Грюблер в 1935 г.

Общие свойства замкнутых плоских кинематических цепей принудительного движения*

Мартин Грюблер, приват-доцент г. Цюрих

Настоящая работа содержит вывод и изложение ряда общих свойств замкнутых плоских кинематических цепей, а именно, таких свойств, которые основаны на очевидных соотношениях между количеством способных двигаться друг относительно друга звеньев и количеством их соединений, которые определяются путем несложного подсчета. Отправной точкой рассматриваемой проблемы является вывод простых соотношений, которые оказываются необходимыми и достаточными критериями замкнутых плоских кинематических цепей. К этим соотношениям приводят рассуждения о том, что сущность кинематических цепей, вообще говоря, не связана ни с размерами звеньев, ни с расположением звеньев относительно друг друга, а определяется, всего лишь, количествами звеньев цепи и их соединений (кинематических пар).

Основанием к этим исследованиям явился основополагающий труд Бурместера[1)], в котором рассмотрены различные кинематические цепи с общей точки зрения, а именно, относительно определения моментных центров. Особенно соприкасаются с данной работой два положения этого труда. Я скажу об этом ниже. Так как я заимствовал из цитируемой работы не только целый ряд примеров, но и придерживаюсь принятого в ней способа описания цепей, а также обозначений звеньев и их соединений, то я считаю необходимым это особо отметить.

Что касается названий и определений, то я в основном пользовался названиями и определениями, введенными Рело (Теоретическая кинематика, Брауншвейг, 1875), а также и некоторыми данными Грасгофа (Теория машин, Лейпциг, 1877, 2 том, стр. 6 и 7).

Чтобы избежать повторений, я не буду приводить здесь все определения, а укажу лишь на те, которые взяты мною из названных работ и которые постоянно будут использоваться в дальнейшем изложении.

Под <u>кинематической**</u> <u>парой</u> понимается любое соединение двух постоянно соприкасающихся звеньев, вследствие которого ограничивается подвижность этих тел друг относительно друга. Соприкасающиеся части звеньев назовем их <u>элементами</u>. Мы называем кинематическую пару <u>принудительной</u>, если точки элемента одного звена принуждены двигаться относительно элемента другого звена по определенным кривым[2)]. Под <u>кинематической цепью</u> понимается такое соединение звеньев посредством кинематических пар, вследствие которого ограничивается подвижность всех звеньев в их относительном движении. Цепь называется <u>замкнутой</u>, если каждое её звено находится в непосредственном соединении по меньшей мере с двумя другими звеньями цепи через кинематические пары. Цепь на-

---

* Необходимо отметить, что название статьи Грюблера со времени ее публикации с немецкого языка на русский переводилось как «Общие свойства принудительных плоских кинематических цепей». В этом названии слово «принудительных» не давало четкого объяснения сущности изучаемых цепей. Оно не было понятным и осталось таким до настоящего времени. По-видимому, употребив в статье слово «zwangläufigen», М. Грюблер имел в виду нечто более определенное, характеризующее кинематическую цепь. Слово «zwangläufigen» на русский переводится как: 1. неизбежный, принудительный; 2. в принудительном порядке; неизбежно.
Изучая кинематические цепи, Грюблер рассматривал их с точки зрения подвижности, т.е. движения звеньев цепи относительно друг друга. Учитывая это, авторы настоящего перевода вместо слов «принудительные цепи» употребили слова «замкнутые цепи» с пояснением «принудительного движения».

1) «Изучение мгновенного движения плоских кинематических цепей» Civilingeniur. 1880. S. 247.

** В оригинале статьи, автор (Грюблер) употреблял название «элементная пара», которое позже получило общепринятое название «кинематическая пара».

2) Так как способ, который определяет принудительность кинематических пар, далее не разъясняется, то считаю достаточным сослаться на классификации различных видов кинематических пар в трудах Рело и Грасгофа.

зывается принудительной, если точки одного звена движутся относительно другого звена по определенным кривым. Цепь называется плоской, если траектории точек всех звеньев лежат в параллельных плоскостях, или, если оси относительных движений звеньев постоянно параллельны между собой. В зависимости от числа элементов звеньев, при их непосредственном соединении с элементами других звеньев в кинематические пары, при двух элементах будем называть звенья двухпарными, при трех элементах трехпарными, при четырех элементах четырехпарными и т.д.

Наконец, отметим, что цепи могут различаться в зависимости от видов использованных в них кинематических пар.

Далее речь будет идти лишь о замкнутых плоских цепях, но не только потому, что они наиболее просты по исполнению и по исследованию, но прежде всего потому, что они являются наиболее часто применяемыми в практике. Далее предполагается, что кинематические пары используются только принудительные (удерживающие)*. Хотя возможно, в принципе, применение и не принудительных пар.

Свои исследования я разделил на три статьи, из которых данная (первая) посвящена плоским цепям подвижных звеньев, соединение которых осуществляется с помощью принудительных (удерживающих) пар – шарниров. Следующая за ней – вторая статья будет охватывать цепи с поступательными (призматическими) парами, а также с принудительно замкнутыми вращательными кинематическими парами. Задача третьей статьи будет состоять в том, чтобы разыскать и охарактеризовать те особые цепи, которые можно рассматривать как исключительные случаи**.

I.

В основу наших исследований положена замкнутая плоская цепь подвижных звеньев, в которой передача движения между звеньями осуществляется исключительно вследствие принудительно замкнутых пар подвижных тел. Вместо названия «принудительно замкнутая пара подвижных тел» будем использовать далее слово «шарнир», прежде всего из-за его краткости и потому, что в словосочетании «пара подвижных тел» подразумевается соединение только двух звеньев или их элементов, в то время как всеобщность следующих рассуждений требует введения понятия, которое включает в себя соединения любого количества звеньев. Таким образом, под «шарниром» мы будем понимать такое соединение любого количества жестких звеньев, вследствие которого звенья принудительно вращаются вокруг общей оси, или, как нам хотелось бы выразиться, соединение любого количества элементов вращающихся тел с общей осью вращения. Мы хотим далее называть шарнир двойным, тройным, четверным и т.д., в зависимости от того, что посредством этого шарнира объединяется 2, 3, 4 и т.д. звена, или что он составляется из 2, 3, 4 и т.д. элементов*.

С учетом изложенного введем следующие обозначения: пусть p есть количество всех шарниров, которые содержатся в цепи, p_2 – количество двойных шарниров, p_3 – количество тройных шарниров, в общем пусть p_i будет количеством i-кратных шарниров, посредством которых соединяются i-звеньев цепи. В соответствии с этим значения p_i являются целыми положительными числами, которые, в частности, могут быть и нулем, и которые удовлетворяют следующему отношению:

* Авторы перевода посчитали важным отметить, что речь здесь идет именно об удерживающих связях, позволяющих обеспечивать движение «туда и обратно».

** Насколько известно авторам перевода, вторая и третья статьи из перечисленного списка написаны Грюблером не были.

* Авторы перевода считают нужным отметить, что, называя шарниры двойными, тройными, четверными и т.д., Грюблер имел в виду, что в них одновременно собираются одна, две, три и т.д. кинематические пары.

$$p_2 + p_3 + \ldots + p_i + \ldots = p .$$

Для краткости можно записать:

$$p_2 + p_3 + \ldots + p_i + \ldots = \sum (p_i),$$

или

$$p = \sum (p_i). \tag{1}$$

Это же число можно получить иначе. Обозначим буквой n количество всех звеньев, из которых состоит цепь. Пусть n_2 – количество двухпарных звеньев, n_3 – количество трехпарных звеньев и т.д., и вообще n_i – количество звеньев, которые содержат по i элементов или посредством i шарниров связаны с другими звеньями цепи. При этом n_i также являются целыми положительными числами, которые могут иметь значения от 0 до n. Если эти значения удовлетворяют отношению

$$n_2 + n_3 + \ldots + n_i + \ldots = n ,$$

то, применив аналогичное к ранее использованному сокращению, получим

$$n = \sum (n_i). \tag{2}$$

Между величинами p_i и n_i существует для всех кинематических цепей простое отношение, которое можно получить путем подсчета.

Если сумме чисел элементов, которые содержат различные звенья цепи, придать выражение

$$\sum (in_i) = 2n_2 + 3n_3 + \ldots + in_i + \ldots ,$$

то видно, что в нем все шарниры, которые связывают по два звена считались дважды, а именно в количествах элементов обоих соединенных звеньев; таким же образом тройные шарниры трижды и т.д., то есть шарниры, связывающие i звеньев считались по i раз. Следовательно, сумма

$$2p_2 + 3p_3 + \ldots + ip_i + \ldots = \sum (ip_i),$$

должна совпадать с предыдущей, потому что она представляет сумму тех же элементов, содержащихся в цепи. Благодаря этому, становится очевидным, что для всех плоских цепей подвижных звеньев между числами n_i и p_i существует соотношение

$$\sum (in_i) = \sum (ip_i). \tag{3}$$

Чтобы получить соотношение между количеством звеньев и шарниров замкнутых плоских подвижных цепей, будем исходить из того обстоятельства, что единственное условие, которое существует для всех – и не только принудительных кинематических цепей, заключается в определенности соединений всех тех элементов, которые содержатся в каждой кинематической цепи, или в неизменности взаимного положения всех осей координат, которые относятся к цепи. Так как положения всех осей координат полностью определяют положения точек пересечения перпендикулярных осей с плоскостью, то упомянутые условия определенности положения можно выразить аналитически в виде уравнений, отображающих точки шарниров через координаты (x, y) относительно двух осей координат, находящихся в плоскости и расположенных перпендикулярно друг к другу.

Для более краткого выражения, учитывая то обстоятельство, что точки пересечения осей шарниров с плоскостью можно считать относящимися к шарнирам, будем понимать под шарниром не только сам шарнир, но и одновременно точку пересечения его оси с плоскостью осей координат. Следовательно, если говорить о координатах шарнира и соответственно траекториях шарнира, то следует понимать под этим координаты точек на плоскости и их траектории.

Если обозначить как x_a, y_a и x_b, y_b координаты двух точек a и b любых шарниров, находящихся в системе $x0y$, которые связывают систему со звеньями, то уравнение

$$\left(x_a - x_b\right)^2 + \left(y_a - y_b\right)^2 = l_{ab}^2 \tag{A}$$

определит расстояние l_{ab}, соединяющее эти шарниры. Известно, что таких независимых уравнений всего необходимо и достаточно $(2i-3)$, чтобы утверждать, что все шарниры цепи во время движения будут оставаться в неизменном расположении относительно друг друга. Так как цепь состоит из n_i звеньев, каждое из которых содержит i шарниров, то между $2in_i$ координатами шарниров этих цепей, можно составить $(2i-3)n$ уравнений (A). Следовательно, для координат всех имеющихся в цепи шарниров

$$n_2 + 3n_3 + 5n_4 + \ldots + (2i-3)n_i + \ldots = \sum (2i-3)n_i$$

можно составить такие уравнения, которые являются аналитическим выражением того, что шарниры, находящиеся в каждой из цепей, или, что элементы, содержащиеся в каждом звене, остаются в жестком соединении друг с другом во время движения цепи.

Следует отметить, что уравнения (A), составленные для всех звеньев цепи, при определенных обстоятельствах могут быть независимыми друг от друга, хотя это не относится к связанным цепям. Если все же это происходит, то количество необходимых и достаточных условий связи таких цепей очевидно менее количества имеющихся уравнений, т.е. менее суммы $\sum (2i-3)n_i$, составленной для всех звеньев цепи, так как отдельные из уравнений будут тождественны остальным. К этому частному случаю мы еще вернемся, а пока исключим такого рода специальные цепи из рассмотрения и будем рассматривать только такие, у которых выражение $\sum (2i-3)n_i$ соответствует количеству необходимых и достаточных уравнений связи. При принятом ограничении уравнения (A) представляют именно те условия, которым должны удовлетворять координаты шарниров изучаемых цепей.

II.

Принудительные плоские цепи звеньев отличаются от непринудительных цепей тем, что в них количество необходимых и достаточных условий связи всегда соответствует числу шарниров, соединяющих звенья. Эту взаимосвязь можно установить следующим образом.

Из определения принудительности кинематической цепи вытекает, что все шарниры такой цепи описывают вполне определенные траектории относительно принятой за неподвижную систему координат цепи, как только любому из звеньев цепи придается движение. Отсюда следует, что, если приводимой в движение цепи придается бесконечно малое изменение положения, то вариации элементов траекторий δ_s, которые описывают шарниры при заданном движении, становятся известными по направлению и величине вследствие принудительной связи звеньев цепи и наличия в цепи заданного движения элемента. Если мысленно спроецировать пути δ_s всех шарниров на оси координат шарниров, то проекции представят собой изменения δ_x и δ_y координат шарниров, которые получают они вследствие движения, и легко можно заметить, что все величины δ_x и δ_y, а значит и сами элементы траектории шарниров, не относящиеся к неподвижной системе, могут быть полностью определены посредством данных о некоторых из вариаций δ_x и δ_y. Если, далее, принять во внимание, что, вообще говоря, необходимо и достаточно привести к нулю изменения трех из четырех координат двух любых точек или, соответственно, шарниров одной и той же цепи, чтобы можно было аналитическим путем показать, что вся эта цепь находится в покое, потому что $2i-3$ независимых друг от друга уравнений связи не дают изменения остальным координатам шарниров цепи, то есть видно, что путем принятия 4 этих величин могут быть определены остальные $2p-4$, так как имеются налицо $2p$ вариаций δ_x и δ_y.

Определение неизвестных $2p-4$ вариаций δ_x, δ_y аналитическим путем можно произвести при использовании уравнений (A), которым должны удовлетворять координаты шарниров цепи.

Из них вытекают путем варьирования соответствующие уравнения для величин δ_x и δ_y, а именно, в общей форме

$$\left(x_a - x_b\right)\left(\delta_{xa} - \delta_{xb}\right) + \left(y_a - y_b\right)\left(\delta_{ya} - \delta_{yb}\right) = 0, \tag{B}$$

в которых a и b должны быть различными между собой. Для этих уравнений являющихся единственными, существующими между изменениями координат шарниров, является характерным то, что они являются независимыми друг от друга, т.к. предполагается, что уравнения (A) должны иметь одинаковые свойства. Если располагать четырьмя из появляющихся в них $2p$ вариаций δ_x и δ_y, то вышеуказанное уравнение полностью определяет остальные $2p-4$ вариации[3)], для чего необходимо, чтобы число этих уравнений составляло $2p-4$. Но так как количество уравнений (B) равно числу уравнений условий связи, из которых они произведены и количество которых составило $\sum(2i-3)n_i$, то очевидно, что последнее число должно совпадать с $(2p-4)$ или, что для принудительной плоской цепи должно быть выполнено условие

$$(2p-4) = \sum(2i-3)n_i\,. \tag{4}$$

[3)] В некоторых цепях звенья могут располагаться по отношению друг к другу так, что вариации смещений δ_x и δ_y оказываются неопределяемыми. Такие положения звеньев, названные Рело (см. Рело, «Теоретическая кинематика», стр.186) переменными положениями или точками изменения движения, характеризующиеся тем, что в них цепь может переходить в другое положение с совершенно иным законам движения. Мы пока не будем рассматривать цепи, обладающие такими положениями, однако позднее покажем, что наличие переменных положений не оказывает принудительного влияния на принудительность движения цепей.

Это отношение является основной и исходной позицией всех последующих рассуждений.

Записанное условие означает, что любая плоская цепь подвижных звеньев, для которых удовлетворяется уравнение (4), является принудительной. Так как для любой цепи количество необходимых и достаточных условий связи составляет $\sum(2i-3)n$, т.е. $2p$ координат шарниров удовлетворяют $\sum(2i-3)n$, то, согласно соотношению (4):

$$2p-4$$

независимых друг от друга уравнений формы (A) вполне определят координаты шарниров в виде алгебраических функций переменных x и y. Если учесть, что путем выбора трех координат системы, ее положение вообще полностью определено, потому что из условия связи $2i-3$ можно вычислить все остальные координаты шарниров, то при наличии трех из четырех произвольных переменных каждое из звеньев цепи можно охарактеризовать как неподвижное, если придать трем координатам этой системы постоянные значения. В этом случае, все координаты шарниров неподвижной системы получат также постоянные значения, а остальные координаты шарниров будут зависеть лишь от одной переменной величины.

Если в качестве последней выбрать координату шарнира звена, которое непосредственно связано с неподвижным звеном, или, точки которой описывают концентрические окружности относительно неподвижного звена, то это звено получает определенное движение, если абсцисса какого-либо шарнира этого звена проходит все значения между двумя произвольными пределами. Итак, в силу того, что координаты всех остальных шарниров, которые не принадлежат неподвижному звену, можно выразить как функции этой абсциссы, обуславливается движение шарниров по кривым определенного уравнения, откуда следует, что в результате движения, приданного звеньям цепи, все шарниры проходят по определенным траекториям относительно неподвижного звена. Это и является свойством, которое было определено как свойство принудительной кинематической цепи. Итак, оно подтвердилось.

Если принять, что уравнения (A) являются независимыми друг от друга и если размеры и, соответственно, координаты центров шарниров в цепи произвольны, то, цепь в целом также становится независимой и, как следует из предыдущих рассуждений становится очевидным, что для такой плоской цепи подвижных звеньев уравнение (4) становится необходимым и достаточным критерием ее принудительности.

III.

Если кинематическая цепь не удовлетворяет условиям уравнения (4), то возможны только два случая. Либо случай, когда

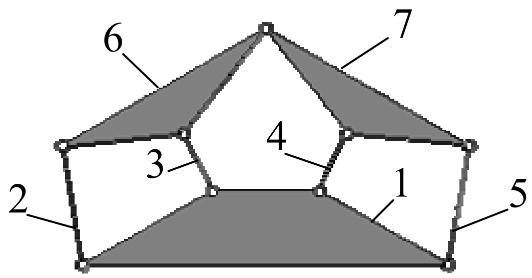
$$\sum(2i-3)n_i > 2p-4,$$

что представляет цепь как неподвижное целое, т.к. уже $2p-3$ независимых друг от друга условий связи достаточны, чтобы получить точки шарниров p относительно друг друга в неизменном положении; либо случай

$$\sum(2i-3)n_i < 2p-4,$$

откуда следует, что не все звенья цепи принудительно связаны друг с другом.

Так, например, для семизвенной цепи, представленной на фигуре 1,



Фигура 1

$n_2 = 4$ (звенья 2, 3, 4, 5), $n_3 = 2$ (звенья 6 и 7), $n_4 = 1$ (звено 1), $n_5 = n_6 = ... = 0$, $p = 9$ и тогда получим, что

$$\sum (2i - 3) n_i = 15,$$

$$2p - 4 = 14.$$

В этом случае

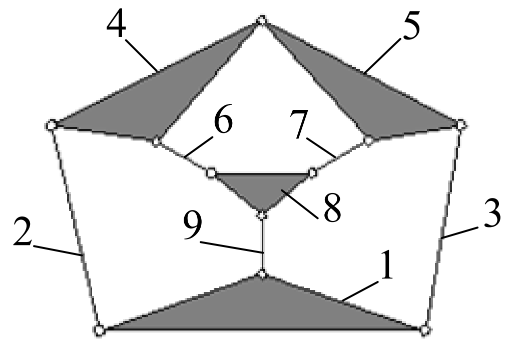
$$\sum (2i - 3) n_i > 2p - 4,$$

тогда как необходимо, чтобы

$$\sum (2i - 3) n_i = 2p - 4.$$

Из полученного следует, что эта цепь, вне зависимости от размеров звеньев оказывается неподвижной.

Для девятизвенной цепи, приведенной на фигуре 2, где $n_2 = 5$ (звенья 2, 3, 6, 7, 9), $n_3 = 4$ (звенья 1, 4, 5, 8), $n_4 = n_5 = ... = 0$ и $p = 11$,



Фигура 2

получим, что

$$\sum (2i - 3) n_i = 17,$$

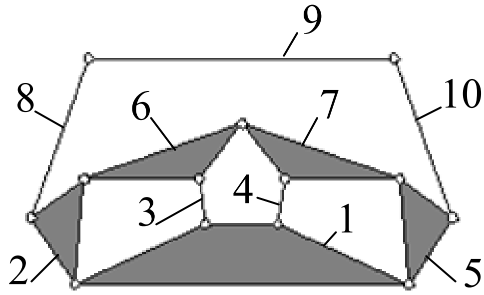
$$2p - 4 = 18,$$

т.е.

$$\sum (2i - 3) n_i < 2p - 4 .$$

Этот результат позволяет заметить, что цепь не представляет собой принудительное соединение подвижных звеньев.

Особого упоминания заслуживает случай, когда часть звеньев цепи уже образуют неподвижное целое, как например, в десятизвенной цепи, приведенной на фигуре 3.



Фигура 3

Звенья от 1 до 7 составляют жесткую (неподвижную) систему, которая повторяет систему, представленную на фигуре 1. Тогда в целом эта цепь (фигура 3) состоит лишь из 4 звеньев, движущихся относительно друг друга. Хотя, вроде бы, в цепи $n_2 = 5$, $n_3 = 4$, $n_4 = 1$, $n_5 = n_6 = ... = 0$, $p = 13$ и

$$\sum (2i - 3) n_i = 2p - 4 = 22 .$$

Этот же результат можно получить из уравнения (4) для принудительной цепи, в которой присутствует группа жестко соединенных звеньев. Определим это следующим образом.

Если обозначить n_i' – количество звеньев, которые соединены в единое целое, а p' – число шарниров, содержащихся в этом жестком целом, и пусть далее n_i'' и p'' – числа остальных звеньев и остальных шарниров, то получим

$$n_i' + n_i'' = n_i$$

и

$$p' + p'' = p .$$

Если i'' обозначает количество шарниров, посредством которых вновь созданная жесткая система соединена с остальной цепью, то вся цепь, должна, удовлетворить отношению

$$2(p'' + i'') - 4 = \sum (2i - 3) n_i'' + 2i'' - 3 ,$$

или, упростив, получим

$$2p'' - 1 = \sum (2i - 3) n_i'' .$$

Если теперь прибавить сюда отношение, действительное для вновь образованной жесткой системы

$$(2p' - 3) = \sum (2i - 3) n_i ,$$

то получим

$$2(p' + p'') - 4 = \sum (2i - 3)(n_i' + n_i'');$$

откуда следует

$$2p - 4 = \sum (2i - 3) n_i ,$$

что и требовалось доказать.

С помощью таких же действий, только в обратной последовательности, можно показать, что любая плоская цепь подвижных звеньев, в которой часть звеньев образует неподвижное (жесткое) целое, является принудительной, если она удовлетворяет уравнению (4).

Отсюда очевидно, что отношение (4) хотя и представляет критерий принудительности вообще плоских цепей подвижных звеньев во всех возможных случаях, но оно не дает ответа на вопрос, является ли количество подвижных звеньев равным $n = \sum (n_i)$. Однако такой ответ можно получить, если применить уравнение (4) к имеющимся в цепи отдельным группам звеньев и их соединений, т.к. для каждой такого рода группы, образующей неподвижное целое, справедливым было бы отношение

$$\sum (2i - 3) n_i' = 2p' - 3 .$$

Если рассматриваемая цепь $n = \sum (n_i)$ содержит принудительно движущиеся звенья, то она должна удовлетворять не только отношению (4), но и выражению

$$\sum (2i - 3) n_i' \leq 2p' - 4$$

для всех групп звеньев, соединяющихся в шарниры.

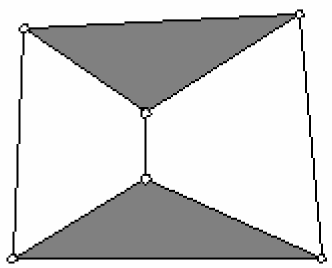
Как следует из вышеизложенного, нет сложностей устанавливать, содержатся ли в рассматриваемой кинематической цепи жесткие неподвижные системы, как его части, и это обстоятельство потому важно, что дает простое средство обнаруживать и исключать те цепи, для которых уравнение (4) не представляет необходимого и достаточного критерия принудительности.

Исключение из описанных результатов может иметь место лишь тогда, когда жесткое соединение звеньев теряет свойство жесткости вследствие специально выбранных размеров или расстояний между шарнирами. Не ограничивая диапазона действительности прежних и будущих результатов, будем считать отдельные звенья цепи не имеющими возможности относительного движения, и тогда станет ясным, что упомянутый исключительный случай может иметь место только тогда, когда в цепи находятся жесткие соединения нескольких или всех звеньев, для которых правомочно отношение

$$\sum (2i-3)n_i' \geqq 2p'-3\,.$$

Итак, только у таких цепей возможно исключение и оно фактически имеет место, для которых уравнения (А) становятся зависимыми друг от друга. В этом случае детерминанта функции системы становится одинаковой, т.е. одну из переменных можно исключить из всех соотношений.

Цепи, которые составляют исключение, являются особыми, в них размеры и расстояния между шарнирами, должны удовлетворять особым уравнениям, из которых вытекает, что названная детерминанта функции может быть исключена. Выше уже указывалось, о том, что исключительные случаи будут подробно рассмотрены в особой статье. Здесь приведем лишь один пример. Цепь, на фигуре 4

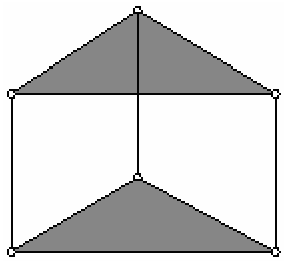


Фигура 4

представляет собой соединение пяти звеньев посредством шести шарниров и является жесткой (неподвижной) системой потому, что она соответствует выражению

$$\sum (2i-3)n_i = 2p-3 = 9\,.$$

Если теперь в трех шарнирных четырехугольниках, которые составляют цепь, принять противоположные стороны за равные и параллельные, вследствие чего цепь примет форму, показанную на фигуре 5,



Фигура 5

то она, как это хорошо видно, будет представлять собой принудительное подвижное соединение, хотя посредством используемых преобразований звеньев не производилось изменений в числах n_i и p, и соотношение

$$\sum (2i-3)n_i = 2p-3$$

осталось действительным для преобразованной цепи.

Так как для названного исключительного случая уравнение (4) теряет значение, которое оно имеет для общих цепей, то далее должны быть исключены из рассмотрения все плоские цепи подвижных звеньев такого рода, а учитывать необходимо лишь произвольные расстояния между шарнирами, которые обеспечивают частичное или полное жесткое соединение звеньев.

Поэтому, если далее будет идти речь о принудительных плоских цепях подвижных звеньев, следует иметь в виду такие, в которых для каждой любой группы звеньев и соединяющих их шарниров существует отношение

$$\sum(2i-3)n_i' \leqq 2p'-4 .$$

Другими словами – для таких цепей, в которых имеют движения относительно друг друга все звенья

$$n=\sum(n_i).$$

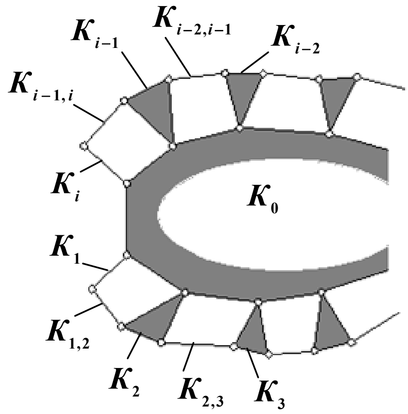
При упомянутом ограничении, совершенно очевидно, что уравнение (4) представляет необходимый и достаточный критерий принудительности не только для общих плоских цепей подвижных звеньев, но и для всех специальных цепей, которые получаются вследствие какой-либо специализации размеров и расстояний между шарнирами, при условии, что при этой специализации количество звеньев и шарниров не изменятся. Единственное условие заключается в неизменности взаимного расположения всех шарниров. Если это условие выполнено, то все предыдущие выводы сохраняют свою силу, и тогда, уравнение (4) имеет такое же значение для специальных цепей, как и для общих.

Далее очевидно, что отношение (4) имеет силу и значение также для цепей с изменяющимися положениями, т.к. количество звеньев и шарниров не зависит от положения звеньев относительно друг друга. Из этого одновременно следует, что цепь представляет собой принудительное соединение ее звеньев, если она путем неких изменений преобразуется в совершенно другую цепь, в которой отдельные из звеньев остаются в относительном покое, т.е. число звеньев с относительным движением становится меньше, чем в первоначальной цепи, как это имеет место, например, в коленчатой передаче Галловея.

IV.

Прежде чем перейти к более подробному исследованию взаимосвязи между числами звеньев и шарниров принудительной цепи на основе выведенных отношений (1), (2), (3) и (4), необходимо определиться с их верхними пределами. Другими словами, требуется установить, каким максимально большим может быть число i элементов, которые находятся в системе ***n***-членной цепи, а также найти наибольшее число звеньев, могущих быть связанными одним шарниром.

Чтобы определить максимальное количество элементов, содержащихся в одном звене цепи, следует сначала отыскать минимальное число звеньев, которое необходимо, чтобы посредством соединений, содержащих i шарнирных элементов, создать замкнутую цепь. Пусть K_0 – есть звено (см. фигуру 6), которое ради простоты считается неподвижным. Далее, пусть звенья, связанные шарнирами со звеном K_0, обозначаются $K_1, K_2 ... K_i$. Если одно из этих звеньев (например, K_1) рассматривать как подвижное, то остальные $i-1$ звеньев должны соединиться через следующее звено с K_1 так, чтобы они могли двигаться посредством последнего звена. Связь (соединение) между звеньями $K_1, K_2 ... K_i$ можно осуществить так, как показано на фигуре 6, объединяя по два соседних звена, за исключением K_i и K_1, посредством связок (на фигуре они обозначены как $K_{1,2}, K_{2,3} ... K_{i-1,i}$) в четырехзвенники. То, что эти цепи являются замкнутыми, вытекает не только из уравнения (4), но и из того, что они образуют последовательность четырехзвенных соединений, которые имеют неподвижную общую опору и подвижные звенья. При этом следует иметь в виду, что соединять подвижные звенья $K_1, K_2 ... K_i$ можно между собой и со звеном K_1 при наличии менее $(i-1)$ звеньев, чтобы создать замкнутые их соединения, так как каждое из звеньев $K_2, K_3 ... K_i$ для их соединения с K_1 требует как минимум одной связки.



Фигура 6

Вследствие этого, минимальное число звеньев цепи, как показывает непосредственный подсчет, составляет

$$1 + i + i - 1 = 2i,$$

т.е. для замкнутой принудительной цепи потребно число звеньев

$$\min(n) = 2i.$$

Исключив возможность того, что $\boldsymbol{n}$ может быть менее, чем $2i$, и принимая, что некоторое q является целым положительным числом, можно записать

$$n = 2i + q.$$

При преобразовании этого выражения получим

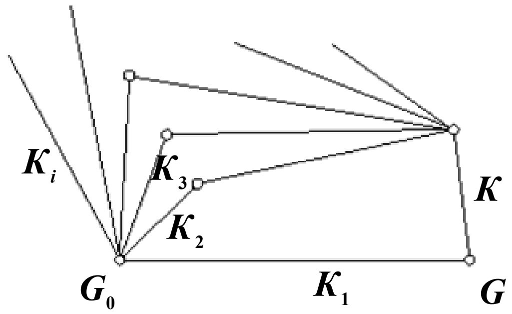
$$i = \frac{n-q}{2},$$

откуда очевидным является, что

$$\max(i) = \frac{n}{2},$$

т.е. число шарниров, посредством которых собирается замкнутая принудительная кинематическая цепь, никогда не может быть больше $\frac{n}{2}$.

Подобным образом можно доказать, что в кинематической цепи из ***n*** звеньев не может в одном шарнирном соединении быть более $\frac{n}{2}$ звеньев. Из i звеньев $K_1, K_2 ... K_i$, которые связываются шарнирным сочленением G_0 (фигура 7),



Фигура 7

вновь образуется принудительная цепь с минимальным числом звеньев, если с принятым за неподвижное звеном K_1 соединять любое звено K, которое считается подвижным, посредством сочленения G_0, а остальные $i-1$ звенья $K_2, K_3 ... K_i$ соединять связками с K и K_1 в четырехугольники и если принять во внимание, что звенья $K, K_1, K_2 ... K_i$ не могут быть связаны принудительно с помощью связок числом менее $i-1$, т.е., что

$$\min(n) = 1 + i + i - 1 = 2i ,$$

из чего следует

$$\max(i) = \frac{n}{2}.$$

Используя эти оба результата и учитывая то обстоятельство, что у замкнутых принудительных цепей ***i*** должно быть не менее 2, можно записать следующие уравнения

$$p = \sum_{i=2}^{i=\frac{n}{2}} (p_i), \tag{I}$$

$$n = \sum_{i=2}^{i=\frac{n}{2}} (n_i), \tag{II}$$

$$\sum_{i=2}^{i=\frac{n}{2}} (in_i) = \sum_{i=2}^{i=\frac{n}{2}} (ip_i), \tag{III}$$

$$2p - 4 = \sum_{i=2}^{i=\frac{n}{2}} (2i-3) n_i , \tag{IV}$$

Хотя из этих четырех уравнений лишь последнее является определяющим замкнутые принудительные плоские цепи подвижных звеньев, вместе с ним приводятся первые три потому, что они дают возможность преобразовывать уравнение (IV) для большого количества случаев, где решения становятся много проще и дают возможность делать общие заключения об особых свойствах всех принудительных плоских цепей.

V.

Путем соответствующих преобразований уравнений от (I) до (IV) можно получать соотношения, которые позволяют описывать самые общие свойства принудительных плоских цепей подвижных звеньев. Если записать правую часть уравнения (IV) в виде

$$\sum_{i=2}^{i=\frac{n}{2}}(2i-3)n_i = 2\sum_{i=2}^{i=\frac{n}{2}}(in_i) - 3\sum_{i=2}^{i=\frac{n}{2}}(n_i)$$

и воспользоваться соотношением (II), то это уравнение после деления на 2 получит вид

$$\sum_{i=2}^{i=\frac{n}{2}}(in_i) = p + \frac{3}{2}n - 2, \qquad (\mathrm{IV}^a)$$

из чего обнаруживается взаимосвязь между количеством звеньев n-звенной принудительной цепи и числом ее шарниров. Из него видно, что при условии $\sum(in_i) = \sum(ip_i)$ числа шарниров, как и числа звеньев могут изменяться, достигая наибольших или наименьших значений. Если учесть, что в вышеприведенном отношении все члены до $\frac{3}{2}n$ являются целыми числами, то также $\frac{3}{2}n$ должно быть целым числом, т.е. n должно делиться на 2. Отсюда следует положение:

Все принудительные плоские цепи могут создаваться лишь из четного числа звеньев.

Если из уравнения (I) подставить значение p в уравнение (IV) и придать этому выражению вид

$$2p_2 + 2\sum_{i=3}^{i=\frac{n}{2}}(p_i) - 4 = n_2 + 3n_3 + 2\sum_{i=4}^{i=\frac{n}{2}}(in_i) - 3\sum_{i=4}^{i=\frac{n}{2}}(n_i),$$

то путем вычитания его из уравнения (III), после приведения последнего в форму

$$2p_2 + 2\sum_{i=3}^{i=\frac{n}{2}}(ip_i) = 2n_2 + 3n_3 + \sum_{i=4}^{i=\frac{n}{2}}(in_i),$$

можно получить отношение

$$\sum_{i=3}^{i=\frac{n}{2}}(i-2)p_i + 4 = n_2 - \sum_{i=4}^{i=\frac{n}{2}}(in_i) + 3\sum_{i=4}^{i=\frac{n}{2}}(n_i),$$

из которого вытекает, что

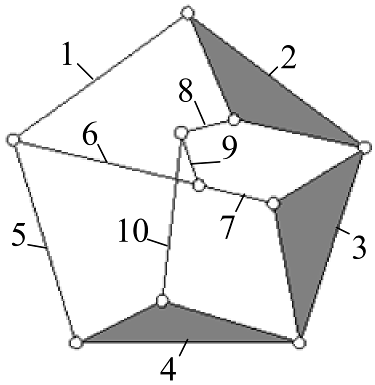
$$n_2 = 4 + \sum_{i=3}^{i=\frac{n}{2}} (i-2)p_i + \sum_{i=4}^{i=\frac{n}{2}} (i-3)n_i \ . \qquad (5)$$

Это выражение для n_2 позволяет обнаружить: 1) что n_2 не содержит количества n_3-трехпарных звеньев и, следовательно, вообще не зависит от *n*, кроме того в нем отсутствуют пары p_2; 2) что n_2 имеет, как минимум, значение 4, потому что отдельные члены в правой части (5) положительны. Из этого вытекает, что количество двухпарных звеньев принудительной плоской кинематической цепи независимо от количества звеньев цепи составляет минимум 4.

С другой стороны, из отмеченного вытекает, что все n_i, кроме n_2, могут иметь только значения от нуля до $n-4$ включительно. Однако, отметим, что верхний предел для n_i уменьшается по мере того, как увеличивается *i*, и сокращается он от $\frac{n}{2}$ до 2. Подобное относится и к p_i.

Пока не будем предпринимать попытки делать иные выводы по соотношениям (I) – (IV).

Для представленной на фигуре 8 десятизвенной цепи Бурместер показал



Фигура 8

что эта цепь есть цепь замкнутая принудительная с произвольно выбранными размерами. Для нее $n_2 = 7$, $n_3 = 3$, $n_4 = n_5 = 0$; $p_2 = 7$, $p_3 = 3$, $p_4 = p_5 = 0$ и поэтому в ней

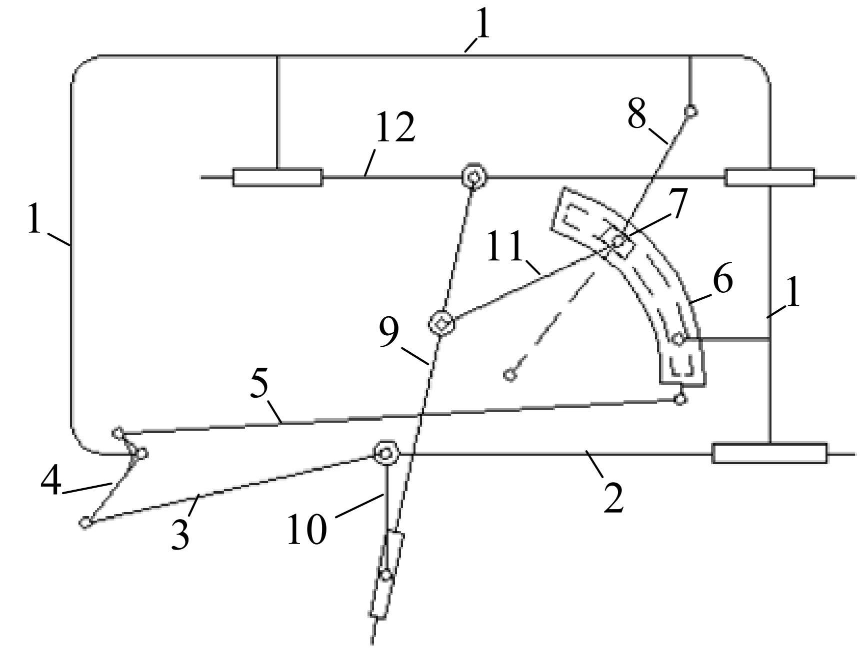
$$\sum_{i=2}^{i=5} (in_i) = \sum_{i=2}^{i=5} (ip_i) = 2 \cdot 7 + 3 \cdot 3 = 23 \, .$$

Уравнение (IV[a]) дает точно такой же результат

$$p + \frac{3}{2} n - 2 = 23 \, ,$$

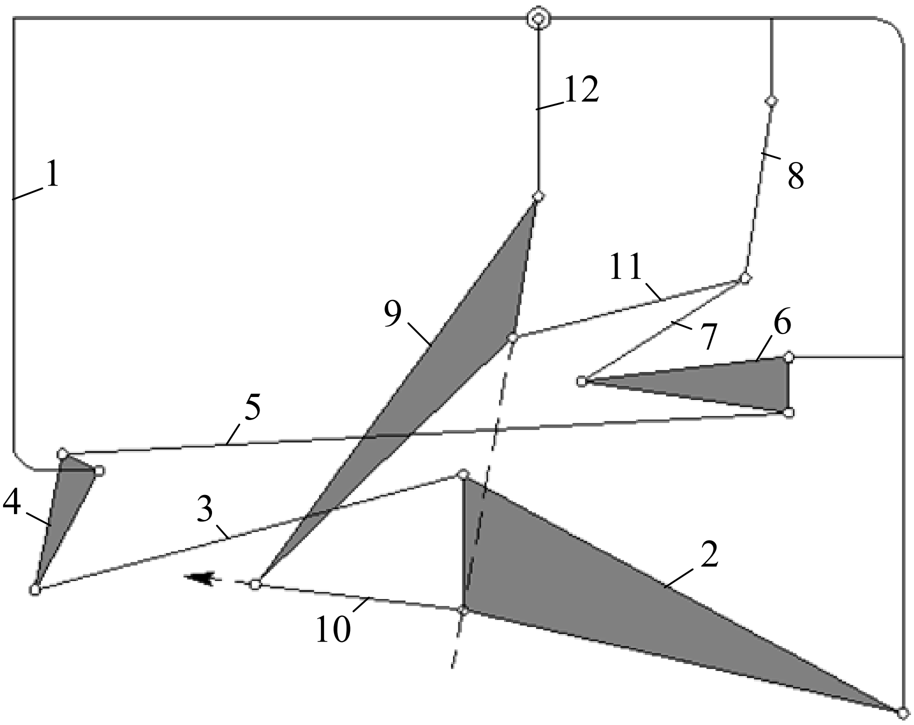
так как в цепи $n = 10$, $p = 10$. Этот результат доказывает, что рассматриваемая цепь есть действительно цепь замкнутая принудительная.

На фигуре 9, представлен механизм реверсирования Хойзингера фон Вальдегга.



Фигура 9

Если в нем заменить* поступательные пары, а также направляющую в кулисе на соответствующие им шарнирные соединения, то получится цепь, приведенная на фигуре 10, для которой Бурместер произвел определение центров кинематических пар.



Фигура 10

*Авторы перевода обращают внимание на то, что в соединении звеньев 10 и 9 показан ползун, который, видимо, жестко связан со звеном 10, а не через шарнир как показано на фигуре 9.

Применим к этой цепи вышеприведенные уравнения.

Для последней цепи путем элементарного расчета получим $n_2 = 7$ (3, 5, 7, 8, 10, 11, 12), $n_3 = 4$ (2, 4, 6, 9), $n_4 = 0$, $n_5 = 1$ (1), $n_6 = 0$.

И по уравнению (II) найдем, что

$$n = \sum_{i=2}^{i=6} (n_i) = 12 .$$

Кроме того

$$\sum_{i=2}^{i=6} (in_i) = 2 \cdot 7 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 1 = 31 ,$$

и из (IV^a) также получим

$$p + \frac{3}{2} n - 2 = 31 ,$$

так как $n = 12$, $p = 15$.

Если, наконец учесть, что $p_4 = p_3 = p_6 = 0$, то из уравнений (I) и (III) найдем

$$p_2 = p_3 = p = 15 ,$$

$$2 p_2 + 3 p_3 = \sum_{i=2}^{i=6} (in_i) = 31 ,$$

откуда следует, что $p_2 = 14$, $p_3 = 1$.

Все найденные величины совпадают с числами на рисунке, откуда следует, что эта цепь замкнутая принудительная.

В первоначальной цепи количество имеющихся шарниров (фигура 9) лишь 11; т.к. вместо четырех шарниров появляются четыре поступательных пары, а именно звена 2 относительно звена 1, звена 12 относительно 1, звена 9 относительно звена 10, а также звена 7 относительно 6 по дуге круга. Так как последнее, не производя изменения, можно заменить шарнирным соединением, то первоначальный механизм отличался бы от измененного только появлением трех поступательных пар. Если принять во внимание, что реверс Хойзингера фон Вальдегга образует, принудительную цепь, то можно ожидать, что соотношения от I до IV могут быть применены и к цепям с поступательными парами, если их элементы считать за шарнирные соединения. Так, например, звено 2 содержит элементы двух шарниров 2-3 и 2-10, а также элементы поступательной пары 1-2, т.е. является трехпарным звеном. Это же относится к кулисе 6 и звену 9, в то время как камень 7, гильза (втулка) 10 и стержень (тяга) 11 представляют собой двухпарные звенья. Основанный на этом расчет дает, как и следовало ожидать, аналогичные результаты. В настоящей статье показывается, что, при определенных заменах кинематических пар ранее высказанное суждение правомочно также для цепей, которые содержат в своем составе поступательные кинематические пары.

Поступила в редакцию 26.04.2011