

КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЗМОВ С ГИБКИМИ СВЯЗЯМИ ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСАХ

1. Введение

В работе [1] были исследованы колебания натяжных устройств, используемых для стабилизации движения гибких элементов, таких как ленты, нити и т. п. В отличие от традиционной постановки задачи, когда функция подобных устройств ограничивается устранением или минимизацией пульсации натяжения, был рассмотрен случай, когда пульсация является естественным результатом программно заданного существенного изменения длины ветвей упругих элементов, контактирующих с натяжным устройством. Эта особенность характерна для многих машин лёгкой, текстильной и ряда других отраслей промышленности. В развитие работы [1] в данной статье рассматривается возбуждение колебаний при совместном воздействии силовых и параметрических импульсов.

2. Математическая модель

В принятой динамической модели (рис. 1, а) использованы следующие условные обозначения: c_i – коэффициенты жёсткости, ψ_i – приведённые коэффициенты рассеяния, m – масса. Для коэффициентов c_1 и ψ_1 могут быть использованы приведённые значения, учитывающие упругие и диссипативные свойства нити за пределами двух ветвей. Предполагается, что механический привод достаточно массивен по сравнению с натяжным устройством, поэтому его колебания слабо зависят от колебаний массы m . В то же время обратное влияние может быть существенным. В данной статье исследуются динамические эффекты, возникающие при программном изменении длины ветви нити $l(t) = L / \cos \theta(t)$.

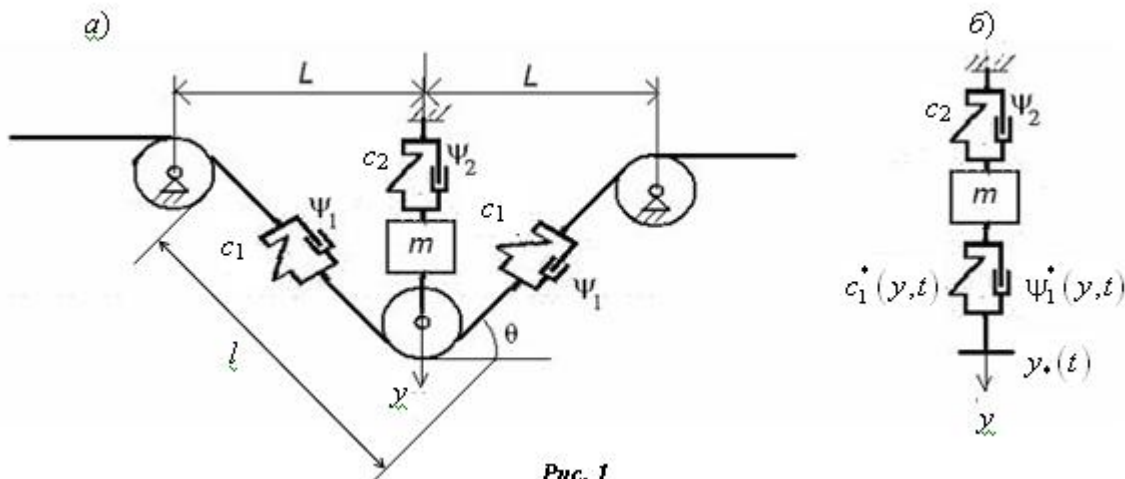


Рис. 1

Переход к эквивалентной модели (рис. 1, б) осуществлён на основании баланса потенциальной энергии и баланса энергии, отведённой за один период колебаний в обоих моделях. При этом $c_1^* = 2c_1 \sin^2 \theta$, $\psi_1^* = 2\psi_1 \sin^2 \theta$, а приведённые значения коэффициентов жёсткости c и рассеяния ψ определяются как [1]:

$$c = 2c_1 \sin^2 \theta + c_2; \quad \psi = 2\psi_1^* c_1^* / c + \psi_2 c_2 / c. \quad (1)$$

В качестве безразмерной обобщённой координаты примем $q = \operatorname{tg}\theta = y/L$. Поскольку $\sin^2 \theta = q^2 / (1 + q^2)$, на основании (1) имеем $c = c(q)$, $\psi = \psi(q)$. Дифференциальное уравнение рассматриваемой системы имеет вид [1]:

$$\ddot{q} + 2\delta(q)k\dot{q} + k^2[q(1 - h_2\eta_2(-q)) + h_1q^2\eta_1(q - q_1) + 2\zeta_*^2(q - \operatorname{arctg}q)] = k^2w(t). \quad (2)$$

Здесь $\zeta^2 = c_1/c_2$, $\eta_2(q - q_1)$ – функции Дирака, управляющие «подключением» жёсткости c_1 и соответствующих упругих упоров при $q = 0$ и $q = q_1$; $\zeta_* = \zeta\eta_1(q)$; $k^2 = c_2/m$; $\delta(q) = \psi(q)/(4\pi)$; h_1, h_2 – коэффициенты, при выборе которых учитываются условия смягчения виброударных эффектов, связанных с упорами; $w(t)$ – функция возмущения. Функцию возмущения можно представить как сумму постоянной составляющей, отвечающей положению равновесия $w_* = (2\zeta_*^2 + 1)\operatorname{tg}\theta_0 - 2\zeta_*\theta_0$, и переменной составляющей $\Delta w(t)$ (см. ниже); $q_* = \operatorname{tg}\theta$ отвечает положению равновесия и ($\Delta w = 0$).

В данной статье в качестве источника возбуждения принят параметрический эффект, который возникает при переменной длине ветви $l(t) = l_0 f(t)$, изменяющейся согласно закону, заданному в соответствии с циклограммой машины. Можно показать, что при этом $\Delta w(t) \approx 2\zeta_*^2 k^2 \sin^3 \theta_0 [1 - f(t)^{-3}]$. В работе [1] функция $f(t)$ была представлена как гармоническая. При этом было установлено, что из-за нелинейности дифференциального уравнения (2) возбуждение носит не только кинематический, но и параметрический характер. Это связано с переменностью равновесного положения колебательного процесса, что в свою очередь приводит к пульсации «собственной» частоты, а следовательно, и к возможности нарушения условий динамической неустойчивости. Ниже рассматривается динамический эффект при одновременном воздействии параметрического импульса и импульса от кинематического возбуждения. Под параметрическим импульсом понимается кратковременный всплеск «собственной» частоты с последующим восстановлением его первоначального значения [2, 3].

3. Аналитическое исследование одиночного параметрического импульса

Примем функцию $f(t)$ в следующем виде:

$$f_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t < t_1, \\ 1 \pm \sigma \left[1 - \sigma_1 + \sigma_1 \sin \frac{(t - t_1)\pi}{t_2 - t_1} \right] & \text{при } t_1 \leq t \leq t_2, \\ 1 & \text{при } t > t_2. \end{cases} \quad (3)$$

При $\sigma_1 = 0$ импульс имеет прямоугольную форму, а при $\sigma_1 = 1$ – форму полуволны синусоиды (рис. 2); в формуле (1) $i = 1$ соответствует знаку «плюс», а $i = 2$ – знаку «минус».

При колебаниях в окрестности положений равновесия «собственная» частота описывается зависимостью [1]:

$$p_i = k \sqrt{1 + 2\zeta^2 \frac{\sin^2 \theta_0}{f_i^2 - \sin^2 \theta_0}}. \quad (4)$$

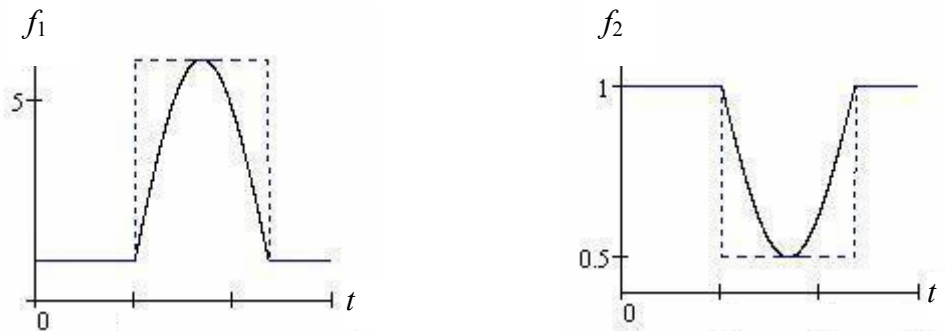


Рис. 2

Графики функций $v_i = p_i(t, \sigma) / p_i(t, 0)$ имеют вид, показанный на рис. 3. При $\sigma_1 = 1$ синусоидальный контур импульса несколько нарушается. При $i = 1$ кривая приближается к случаю $\sigma_1 = 0$, а при $i = 2$ характер искажения импульсов даёт с достаточной точностью представление о возникающих при этом динамических эффектах. Следует ожидать, что эти эффекты более существенны при нарушениях непрерывности функций f_i , поэтому сначала обратимся к случаю $\sigma_i = 0$. В момент времени $t = t_1$ происходит мгновенное изменение положения равновесия на величину, соответствующую $|\Delta w_i(t)|_{\max}$, и одновременно происходит изменение приведённого коэффициента жёсткости c_1^* , а следовательно, и «собственной» частоты.

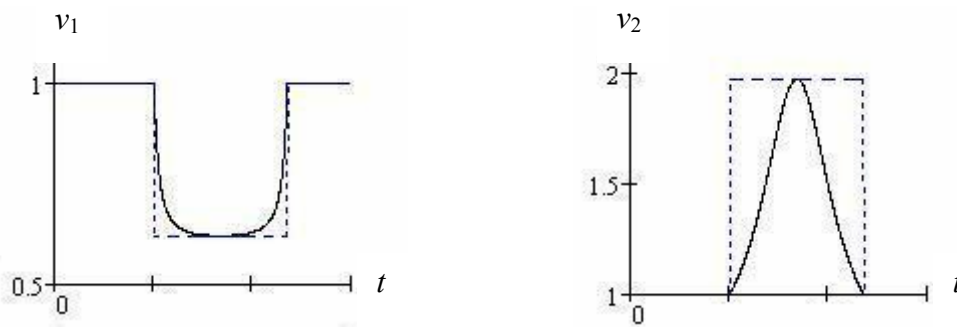


Рис. 3

В окрестности положения равновесия дифференциальное уравнение (1) может быть представлено как

$$\ddot{q} + 2n(t)\dot{q} + p^2(t)q = w(t). \quad (5)$$

Согласно методу условного осциллятора общее решение этого уравнения может быть записано следующим образом [2]:

$$q = A_0 \exp\left[-\int_0^t n(\xi) d\xi\right] \sqrt{\frac{\Omega(0)}{\Omega(t)}} \cos[\Phi(t) + \gamma] + \frac{1}{\Omega(t)} \int_0^t \left\{ \frac{W(u)}{\sqrt{\Omega(u)}} \exp\left[-\int_u^t n(\xi) d\xi\right] \sin\left[\int_u^t \Omega(\xi) d\xi\right] \right\} du. \quad (6)$$

Здесь $\Phi(t) = \int_0^t \Omega(\xi) d\xi$; $\Omega(t) = \Omega_* \exp[z(t)]$, где Ω_* – произвольный параметр с размерностью частоты; z определяется из дифференциального уравнения:

$$\ddot{z} - 0,5\dot{z}^2 + 2\Omega_*^2 \exp 2z(t) = 2\tilde{p}^2(t), \quad (7)$$

где $\tilde{p}^2 = p^2 - \dot{n} - n^2$. Можно показать, что из-за малого влияния диссипации на «собственную» частоту $\tilde{p}^2 \approx p^2$.

Уравнение (7) соответствует некоторому условному осциллятору. Левая часть этого уравнения не зависит от конкретной системы, которая в уравнении отображается лишь правой частью, т. е. «возмущением» $2p^2(t)$. Если $\ddot{z} - 0,5\dot{z}^2 \ll 2\Omega_*^2 \exp[2z(t)]$, что соответствует

$$\left| 0,5 \frac{\ddot{p}}{p^3} - 0,75 \left(\frac{\dot{p}}{p}\right)^2 \right| \ll 1,$$

имеем $\Omega(t) \approx p(t)$, и решение совпадает с первым приближением метода ВКБ. Уравнение (7) является нелинейным, однако с сильно выраженными линейными свойствами, что позволяет опустить член с \dot{z}^2 и принять $\exp[2z(t)] \approx 1 - 2z$. Тогда

$$\ddot{z} + 4\Omega_*^2 z = 2p^2(t). \quad (8)$$

Если принять $\Omega_*^2 = \bar{p}^2$, где \bar{p}^2 – усреднённое значение функции $p^2(t)$, то из (8) следует, что резонанс условного осциллятора наступает при удвоенной частоте пульсации функции $p^2(t)$. Это соответствует главному параметрическому резонансу. О квазилинейных свойствах условного осциллятора свидетельствует то обстоятельство, что при изменении жёсткости почти на порядок его «собственная» частота изменяется меньше, чем на 3,5%.

При прямоугольном импульсе уравнение (6) имеет точное аналитическое решение. Примем $\Omega_* = p_0$; тогда, в нашем случае $v_* = p_*/p_0$, где p_0, p_* – начальное и экстремальное значения функции $p(t)$. При $t_1 = 0$:

$$z' = \pm \sqrt{(1 + v_*^2)e^z - (v_*^2 + e^{2z})}; \quad (9)$$

$$z = \ln \frac{2v_*^2}{(1 - \cos p_1 t) + v_*^2(1 + \cos 2p_1 t)},$$

где $(\dot{}) = d/d\tau$; $\tau = 2\Omega_* t = 2p_0 t$.

Из (9) следует

$$\Omega = \frac{2p_0 v_*^2}{(1 - \cos 2p_1 t) + v_*^2(1 + \cos 2p_1 t)}. \quad (10)$$

Полный обход фазовой траектории происходит за время $T_z = \pi / p_1$. На основании (6) получаем, что амплитуда свободных колебаний (см. первое слагаемое без учёта диссипации) равно $A = A_0 \exp(-z/2)$, поэтому минимальная амплитуда A_{\max} имеет место при z_{\min} . Если при $t=0$ колебания отсутствовали, то непосредственно за счёт скачкообразного изменения положения равновесия значение A_0 определяется как статическая деформация под действием $k^2 |\Delta w|_{\max}$.

Мы рассмотрели только один скачок. Далее вернёмся к анализу эффекта от параметрического импульса. На рис. 4 показан типовой вид фазовой траектории. Участок OM отвечает колебаниям около нового положения статического равновесия, а участок MN – колебаниям, возникающим при возвращении к начальному положению равновесия. При этом

$$A_{\max} = A_0 \exp[-0,5z_{\min}], \quad (11)$$

где $A_0 = A(0)$. Чем выше значение z , отвечающее точке переключения M , тем больше энергия, вносимая в систему, следовательно, и амплитуда динамического последствия от приложенного импульса.

Значение z_{\min} определяется из следующего квадратного уравнения (точка N), полученного на основании (9) при $z' = 0$:

$$\exp(2z_{\min}) - \exp(z_{\min})[1 + v_*^2 + (1 - v_*^2)\exp(-z_1)] + 1 = 0. \quad (12)$$

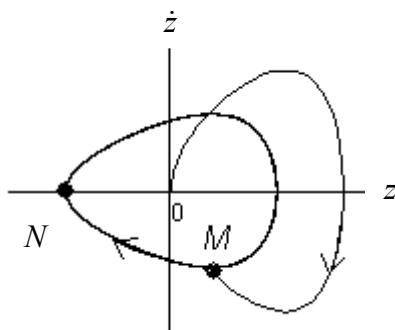


Рис. 4

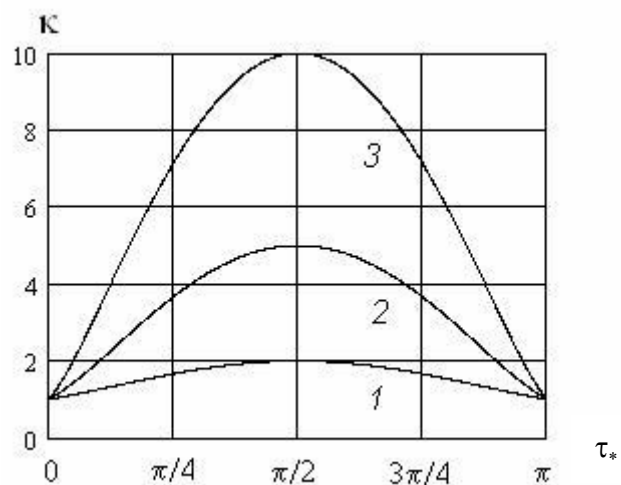


Рис. 5

Используя формулы (9), можно показать, что без учёта диссипации коэффициент возрастания амплитуды $\kappa = A/A_0$ при параметрическом импульсе определяется следующим образом:

$$\kappa = \exp(-0,5z_{\min}) = \sqrt{H \pm \sqrt{H^2 - 16v_*^2}} / (2v_*), \quad (13)$$

где $H = (1 + v_*^2)^2 - (1 - v_*^2)^2 \cos 2\tau_*$; $\tau_* = p_1 \Delta t$. Знак в подкоренном выражении должен соответствовать наибольшему значению.

Семейство кривых $\kappa(\tau_*, v_*)$ приведено на рис. 5 ($v_* = 2, 0,5$ – кривая 1; $v_* = 5, 0,2$ – кривая 2; $v_* = 10, 0,1$ – кривая 3). Согласно (13):

$$\kappa_{\max} = v_*^\alpha, \quad (\alpha = \text{sign}(v_* - 1)). \quad (14)$$

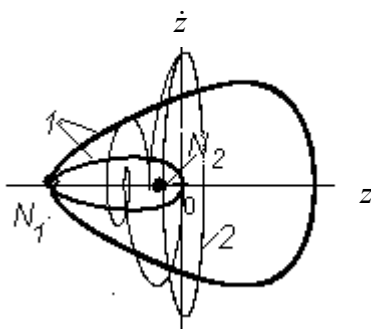
Таким образом, можно утверждать, что уровень свободных колебаний при воздействии одиночного параметрического импульса при самых неблагоприятных фазовых случаях лимитируется неравенством

$$q_{\max} \leq A_0 \kappa_{\max} \exp\left[-\int_0^t n(t) dt\right]. \quad (15)$$

При больших изменениях положения равновесия из-за нелинейности системы следует ввести коррективы в формулу (4) [1].

Для сопоставления динамических эффектов при прямоугольном и синусоидальном импульсах для относительно больших и малых значений Δt на рис. 6 приведены фазовые траектории (кривые 1 и 2). При $\Delta t/T_z > 1 - 2$ положения точек N_1 и N_2 существенно различаются (рис. 6, а), причём $(z)_{N_1} < (z)_{N_2}$, что свидетельствует о большем квазиударном эффекте при прямоугольном импульсе. Если теперь сократить время синусоидального импульса до $\Delta t < 0,25T_z$, точки N_1 и N_2 практически располагаются рядом (рис. 6, б). Это указывает на идентичный динамический эффект и на малое влияние формы импульса.

а)



б)

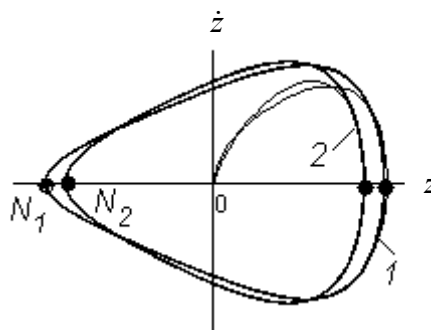


Рис. 6

Выше было акцентировано внимание на параметрическом источнике возбуждения, хотя строго говоря, этот источник с энергетических позиций носит смешанный характер, так как определённую роль может играть и кинематическое возбуждение. Так, в частности, при

$i=1$ (см. рис. 3) колебания возбуждаются за счёт накопленной энергии при установке исходного положения равновесия (параметрическое возбуждение), а при $i=2$ – также и за счёт работы при кинематическом возбуждении, что связано с изменением $l(t)$.

4. Оценка динамического эффекта при периодичности параметрических импульсов

На основании (13) имеем, что при повторяемости параметрических импульсов максимальное значение коэффициента κ , пропорциональное амплитуде свободных сопровождающих колебаний, через один период кинематического цикла $T_\omega = 2\pi/\omega$ может достичь значения

$$\kappa < \exp(-0,5\bar{\Psi}) \prod_{j=1}^s \kappa_j, \tag{16}$$

где $s, \bar{\Psi}$ – число параметрических импульсов и усреднённое значение приведённого коэффициента рассеяния на периоде T_ω .

Зависимость (16) показывает, что динамический эффект от параметрических импульсов может привести к снижению эффекта от диссипации системы, а при $\kappa > 1$ и к нарастанию амплитуд колебаний, т. е. к параметрическому резонансу. При прямоугольном импульсе рассматриваемый случай сводится к задаче Мейснера [2].

Таблица 1

	$\omega = 1,97\bar{p}$	$\omega = 2\bar{p}$	$\omega = 2,03\bar{p}$
Точное решение			
Приближённое решение			

В табл. 1 показана эволюция фазового портрета условного осциллятора при глубине пульсации $\varepsilon = 0,07$ для режимов в окрестности главного параметрического резонанса

($\omega = 2\bar{p}$). При точной настройке частоты параметрического резонанса ($\omega = 2\bar{p}$) фазовая траектория представляет собой раскручивающуюся спираль.

5. Анализ результатов компьютерного моделирования

В табл. 2 для ряда типовых случаев приведены результаты компьютерного моделирования. На графиках $q(t)$ показаны координаты исходного положения равновесия (прямая 1), нового положения равновесия (прямая 2) и упругих упоров (прямая 3 и ось абсцисс). Для каждого из режимов в таблице приведены графики безразмерных функций f_i , иллюстрирующие характер изменения $l(t)$. При этом $i=1$ (режимы 1 и 2) соответствуют увеличению, а при $i=2$ (режимы 3 и 4) уменьшению координаты положения равновесия. Для удобства сопоставления динамических эффектов в зависимости от длительности импульса Δt для каждого режима возбуждения осуществлялось при двух последовательных импульсах, различающихся величиной Δt . При этом настройка «короткого» импульса производилась, исходя из выявленного при аналитическом исследовании максимального значения коэффициента возрастания амплитуды K_{\max} (см. формулы (14)–(16)).

Таблица 2

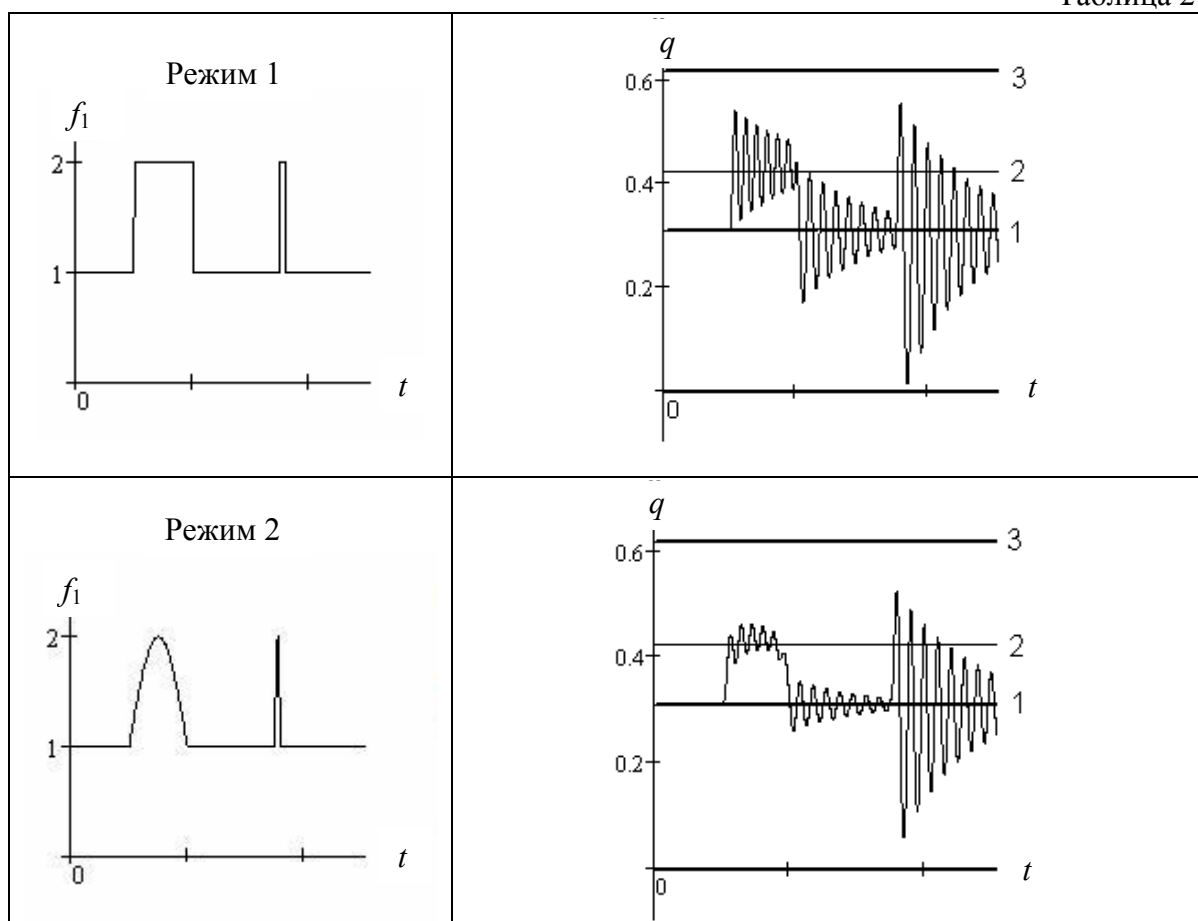
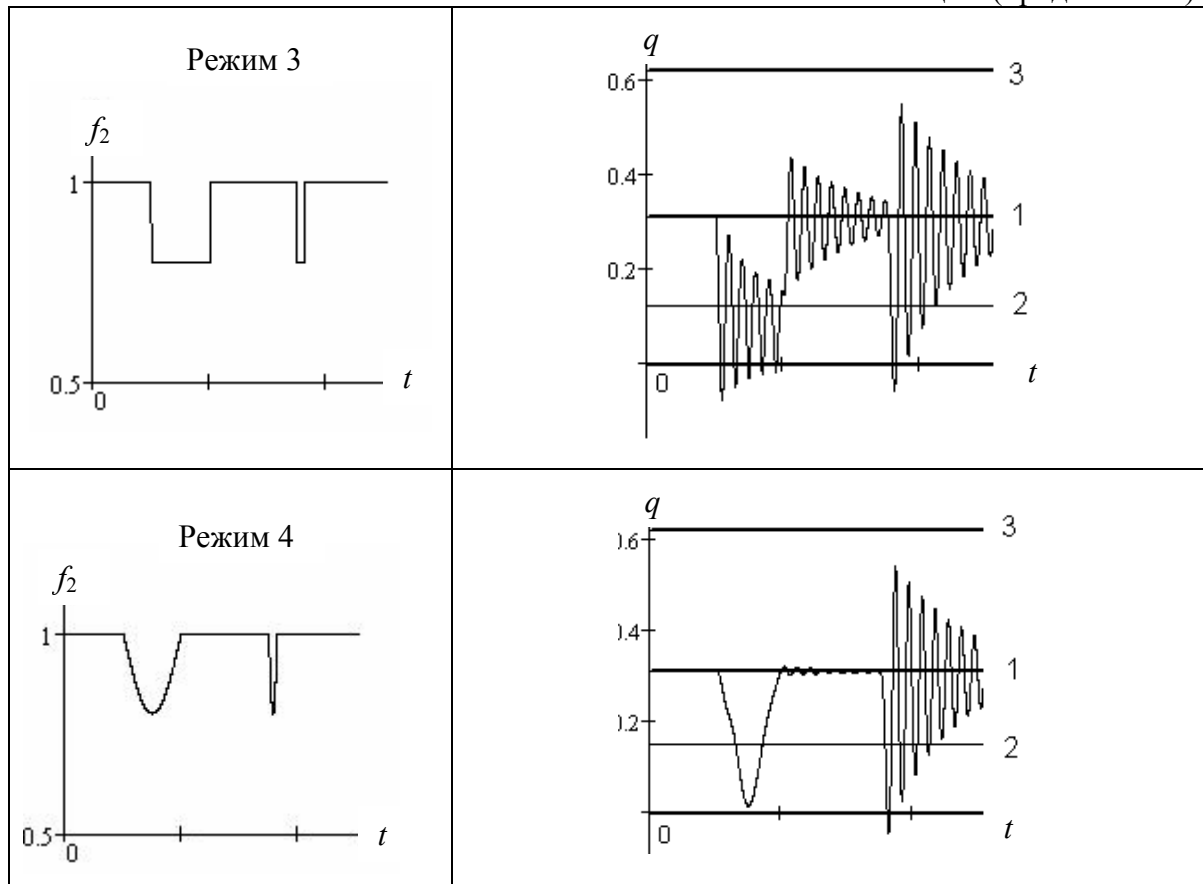


Таблица 2 (продолжение)



Режимы 1 и 2 иллюстрируют динамические эффекты при импульсном характере увеличения длины $l(t)$ на отрезке времени Δt . В этом случае новое положение равновесия соответствует росту приведённого коэффициента жёсткости, что связано с возрастанием угла θ (см. (1)). При относительно большом значении длительности для первого из двух последовательных импульсов в режиме 1 имеем чёткое разделение двух «скачков» в начале и в конце импульса. При «коротком» импульсе положение равновесия практически остаётся неизменным, причём амплитуда колебаний близка к максимальному отклонению при первом импульсе. Режим 2 отличается более гладкой формой функции f_1 , что привело к существенному уменьшению амплитуд колебаний от первого импульса и почти не повлияло на амплитуду от второго импульса. Это полностью согласуется с результатами аналитического исследования (см. пояснения к рис. 6).

К аналогичным выводам приводит анализ режимов 3, 4 ($i = 2$), однако в этом случае влияние формы импульса при относительно больших значениях Δt проявлялся более резко. В частности, в режиме 4 после первого импульса свободные колебания практически не возникают, в то время как после «короткого» импульса амплитуда пренебрежимо мало отличается от режима 3. Существенным отличием режимов 3, 4 ($i = 2$) от режимов 1, 2 ($i = 1$) является более интенсивный отклик на импульсное возмущение. По существу, в режиме обеих групп имеет место примерно одинаковый уровень амплитуд возбуждаемых колебаний, однако в первом случае относительное значение импульса $|\Delta f_i(0)|$ составляло 100%, а во втором – 20%. Это связано со значительным снижением при $i = 2$ приведённой жёсткости по мере приближения к $q = 0$ и $\theta = 0$ (см.(1)). При этом существенным образом

проявляется параметрический характер возбуждения, в то время как при $i = 1$ возбуждение в основном является кинематическим.

Анализ режимов 3, 4 также показывает, что при определённых условиях $q < 0$. Это соответствует разрыву кинематических контактов между компенсатором натяжения и гибким элементом, что приводит к возникновению виброударных режимов. Этот случай также интересен с позиций динамического анализа прыжков на батуте.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Вульфсон И.И.** Исследование колебаний механизмов с гибкими связями при параметрическом и кинематическом возбуждении // Теория механизмов и машин. Т.6. №1(15). 2010. С.3–13.
2. **Вульфсон И.И.** Колебания машин с механизмами циклового действия. – Л.: Машиностроение, 1990. – 306 с.
3. **Vul'fson J.I.** Analytical investigation of the vibration of mechanisms caused by parametric impulses. // Mechanism and Machine Theory. Vol.10, 1973. Pp. 305–313.

Поступила в редакцию 31.05.2010