

ТЕОРЕМА О РАВНОВЕСИИ ЗАМКНУТОГО КОНТУРА

1. Введение

В теоретической механике для определяемой по положению механической системы используется условие равенства числа степеней свободы числу обобщённых координат [1, стр. 33]. Согласно этому условию в теории механизмов и машин используется концепция построения плоских механизмов по принципу Ассура [2]. По этой концепции число начальных (или входных) звеньев механизма должно быть равно числу степеней свободы, а выходным звеном является звено структурной группы с нулевой подвижностью (группы Ассура). Однако теоретически возможна иная концепция построения механизма, при которой выходное звено аналогично входному звену, присоединено к стойке и не принадлежит группе Ассура, а группа Ассура используется как промежуточная передаточная цепь между входным и выходным звеньями. Такая концепция построения механизма в общем случае приводит к появлению лишней степени свободы и к потере кинематической определенности цепи. Однако если структура группы Ассура обеспечивает появление дополнительной связи, выраженной аналитически, определенность кинематической цепи будет иметь место. Ранее выполненные исследования показали, что структурная группа в виде замкнутого четырехзвенного контура накладывает дополнительную связь на движение звеньев [3, 4], что приводит к определенности кинематической цепи с двумя степенями свободы при наличии только одного входа. Целью настоящей работы является доказательство теоремы о возможности передачи движения от входного звена (или звеньев) к выходному звену через промежуточную кинематическую цепь в виде замкнутого контура. Исследования выполнены на основе законов теоретической механики и теории механизмов и машин.

2. Постановка задачи исследования

Объектом исследования (рис. 1) в общем случае является кинематическая цепь, содержащая структурную группу с нулевой подвижностью в виде замкнутого контура, присоединённую к начальным звеньям (например, кинематическая цепь, содержащая замкнутый контур из шести звеньев, присоединённый к трём начальным звеньям).

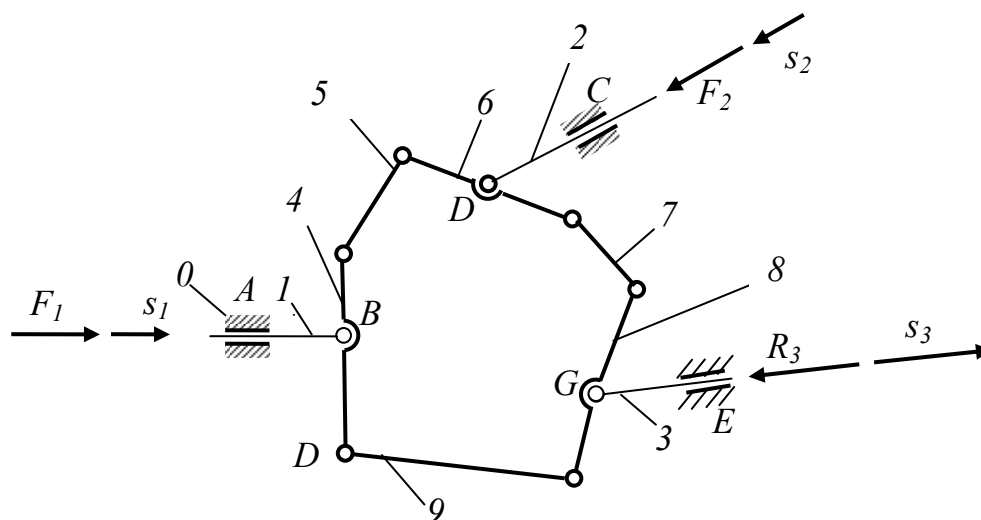


Рис. 1. Кинематическая цепь с замкнутым контуром

Число степеней свободы кинематической цепи W равно числу начальных звеньев N . Действующие силы приложены только к начальным звеньям.

В общем случае такая цепь не может находиться в равновесии, так как в ней на структурной группе с нулевой подвижностью отсутствуют внешние силы, по которым можно было бы определить требуемые обобщённые силы на начальных звеньях. Однако структурная группа в виде подвижного замкнутого контура (например, четырёхзвенного) позволяет получить теоретические закономерности, допускающие выполнение условий равновесия под действием сил со стороны начальных звеньев [3, 4]. Для этого звенья контура, присоединённые к начальным звеньям цепи (активные звенья), должны чередоваться с промежуточными звеньями. Тогда число активных звеньев контура равно числу начальных звеньев, общее число звеньев контура $n = 2N$. Число вращательных кинематических пар пятого класса $p_5 = 3N$. Рассматриваемая на рис. 1 кинематическая цепь содержит стойку 0, три начальных звена 1, 2, 3 с поступательными парами и шестизвенный замкнутый контур. Контур содержит три активных 4, 6, 8, три промежуточных 5, 7, 9 звеньев и девять вращательных кинематических пар.

Взаимосвязь кинематических и силовых параметров замкнутого контура подчиняется законам теоретической механики и теории механизмов и машин и выражается следующей теоремой.

3. Теорема о равновесии замкнутого контура

Теорема. Замкнутый контур, который движется под действием произвольных внешних сил, находится в равновесии.

Рассмотрим отдельно замкнутый контур, находящийся в составе кинематической цепи (рис. 1). На контур передаются заданные внешние силы со стороны N начальных звеньев цепи. Внешняя сила на начальном звене вызывает перемещение, совпадающее по направлению с силой. Силы \bar{F}_k , передаваемые на активные звенья контура k ($k = 1, 2, \dots, N$) со стороны начальных звеньев, будут являться для него внешними силами. На каждое активное звено контура k действует внешняя сила \bar{F}_k и две реакции $\bar{R}_{ki}, \bar{R}_{kj}$ со стороны смежных промежуточных звеньев i, j . На каждом активном звене сила \bar{F}_k проектируется на координатные оси x и y . Ось x совпадает с вектором \bar{F}_k . Величины проекций: $F_{kx} = F_k, F_{ky} = 0$. Каждая из реакций $\bar{R}_{ki}, \bar{R}_{kj}$ соответственно будет иметь только одну составляющую R_{kix}, R_{kix} по направлению оси x . Таким образом, в каждой кинематической паре замкнутого контура имеет место только один силовой параметр. Общее число силовых параметров контура равно числу кинематических пар. При этом $p_5 = 3N$. Число заданных силовых параметров равно числу начальных звеньев N . Число определяемых параметров равно $K = p_5 - N = 2N$. Следовательно, на каждом активном звене контура имеют место 2 неизвестных параметра. Так как для каждого активного звена контура можно использовать два уравнения статики для определения двух неизвестных параметров, статическая определимость контура будет обеспечена.

Величины реакций $\bar{R}_{ki}, \bar{R}_{kj}$ на каждом звене k могут быть выражены через величину активной силы \bar{F}_k по условиям статики. Для каждого активного звена k контура имеем $R_{ki} = m_{ki}F_k, R_{kj} = m_{kj}F_k$, где R_{ki}, R_{kj} – величины реакций в кинематических парах, m_{ki}, m_{kj} – геометрические коэффициенты, зависящие от размеров звена.

Представленный замкнутый контур с приложенными силами можно рассматривать как склерономную механическую систему в состоянии равновесия, так как все внутренние

силы определены через внешние силы, то есть все действующие на контур силы являются известными. В такой системе возможные перемещения можно рассматривать как действительные. Для каждого активного звена k составим выражения равновесия по принципу возможных перемещений, принимая возможные перемещения за действительные

$$\bar{R}_{ki} \cdot \bar{s}_{ki} + \bar{R}_{kj} \cdot \bar{s}_{kj} = \bar{F}_k \cdot \bar{s}_k. \quad (1)$$

Здесь $\bar{s}_{ki}, \bar{s}_{kj}, \bar{s}_k$ – действительные перемещения точек приложения реакций $\bar{R}_{ki}, \bar{R}_{kj}$ и внешних сил контура \bar{F}_k .

Сложим составленные выражения для всех активных звеньев N . Получим

$$\sum_{k=1}^N (\bar{R}_{ki} \cdot \bar{s}_{ki} + \bar{R}_{kj} \cdot \bar{s}_{kj}) = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \bar{s}_k. \quad (2)$$

В левой части уравнения имеет место сумма работ внутренних сил контура. Так как связи являются идеальными и стационарными, то работа реакций связей равна нулю [1].

$$\sum_{k=1}^N (\bar{R}_{ki} \cdot \bar{s}_{ki} + \bar{R}_{kj} \cdot \bar{s}_{kj}) = 0. \quad (3)$$

Следовательно, работа внешних сил контура также равна нулю

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \bar{s}_k = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) выражает также условие равновесия внешних сил всей кинематической цепи. В уравнении (4) хотя бы одна из внешних сил должна быть силой сопротивления, иначе условие равновесия кинематической цепи в виде равенства работ движущих сил и сил сопротивления не будет выполняться. Звенья кинематической цепи, к которым приложены движущие силы, будут являться входными звеньями. Звено, к которому приложена сила сопротивления R , будет являться выходным звеном, s – перемещение точки приложения силы сопротивления. При одной силе сопротивления число движущих сил окажется на единицу меньше числа начальных звеньев. Тогда уравнение (4) примет вид

$$\sum_{k=1}^{N-1} \bar{F}_k \cdot \bar{s}_k = \bar{R} \cdot \bar{s}. \quad (5)$$

Для разрешения уравнения (5) оно должно содержать один неизвестный параметр. Логично считать заданными входные силы, входные перемещения и выходную силу сопротивления. Выходное перемещение s начального звена, к которому приложена выходная сила сопротивления, следует считать неизвестным параметром, зависящим от заданных сил и перемещений. Тогда выходное перемещение будет определено из выражения (5), и перемещения всех начальных звеньев будут известны. Соответственно будут известны перемещения всех остальных точек контура (на которых действуют внутренние реакции). Переход одного из начальных звеньев в состояние выходного звена приводит к получению числа входных звеньев на единицу меньше числа степеней свободы всей кинематической цепи. Однако уравнение (5) характеризует дополнительную связь, обеспечивающую сохранение определенности положения рассматриваемой кинематической цепи.

В итоге уравнение (5) означает, что статически и кинематически определимый подвижный контур находится в равновесии под действием произвольных внешних сил, что и требовалось доказать.

Таким образом, описанная ранее [3, 4] возможность передачи движения от входного звена к выходному звену через замкнутый четырёхзвенный контур получила своё подтверждение.

Следствие 1. Кинематическая цепь с замкнутым контуром обладает эффектом силовой адаптации.

Из формулы (5) можно определить величину выходного перемещения, совпадающего по направлению с силой сопротивления

$$s = \sum_{k=1}^{N-1} \bar{F}_k \cdot \bar{s}_k / R. \quad (6)$$

Согласно формуле (6) при постоянных движущих силах и входных перемещениях выходное перемещение S находится в обратно пропорциональной зависимости от переменной выходной силы сопротивления R . Эта зависимость выражает эффект силовой адаптации выходного звена к переменной силе сопротивления.

Следствие 2. В замкнутом контуре имеет место циркуляция энергии.

Реакции на активных звеньях контура путем смены знака могут быть отнесены к промежуточным звеньям. Аналогично перемещения точек приложения реакций можно рассматривать как перемещения точек промежуточных звеньев. Тогда из уравнения (3) получим условие равенства работ внутренних сил, действующих на промежуточных звеньях контура

$$- \sum_{k=1}^N (\bar{R}_{ki} \cdot \bar{s}_{ki} + \bar{R}_{kj} \cdot \bar{s}_{kj}) = 0. \quad (7)$$

Таким образом, на промежуточных звеньях подвижного замкнутого контура имеет место равновесие работ (вместо равновесия сил на каждом промежуточном звене).

Уравнение (7) содержит положительные и отрицательные члены и характеризует баланс работ сил на промежуточных звеньях контура, что отражает неизвестное ранее явление циркуляции энергии внутри контура во время его движения.

Заключение

Доказано, что подвижный замкнутый контур, движущийся под действием произвольных активных сил, находится в равновесии, является определимым по положению, статически определимым и имеет новые свойства. Доказанная теорема позволяет использовать концепцию построения механизма, согласно которой механизм содержит начальные звенья с приложенными силами и промежуточную кинематическую цепь в виде замкнутого контура. Одно из начальных звеньев является выходным звеном. Механизм, построенный по указанной концепции, обладает свойством силовой адаптации.

Силовая адаптация механизма с замкнутым контуром позволяет создавать адаптивные приводы машин с переменным передаточным отношением, зависящим от технологического сопротивления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Маркеев А.П.** Теоретическая механика. – М.: Наука, 1990. – 414 с.
2. **Левитский Н.И.** Теория механизмов и машин. – М.: Наука, 1979. – 576 с.

3. **Ivanov K.S.** Discovery of the Force Adaptation Effect. // Proceedings of the 11th World Congress in Mechanism and Machine Science. V. 2. April 1 – 4, 2004, Tianjin, China. – P. 581 – 585.
4. **Ivanov K.S.** Gear Automatic Adaptive Variator with Constant Engagement of Gears. // Proceedings of the 12th World Congress in Mechanism and Machine Science. Besancon. France. 2007, Vol. 2. – P. 182 – 188.

Поступила в редакцию 19.05.2010