

## ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ЭВОЛЬВЕНТНЫХ ПЕРЕДАЧ ОБОБЩЕННОГО ИСХОДНОГО КОНТУРА

### 1. Введение

В настоящий момент самое широкое приложение в практике при геометрическом расчете эвольвентных передач нашла *традиционная теория* (ТТ), в которой основополагающим началом является *традиционный исходный контур* (ТИК). По существу ТТ связана непосредственно с изготовлением зубчатых колес, а ТИК (рис. 1) принят в качестве исходной базы для определения геометрических форм и размеров зубчатых колес и зуборезных инструментов [11]. При этом геометрия ТИК вполне определена четырьмя независимыми параметрами (модуль  $m$ , угол профиля исходного контура  $\alpha$ , коэффициент высоты головки зуба  $h_a^*$  и коэффициент радиального зазора  $c^*$ ). Вопреки своему совершенному виду и неоспоримым достоинствам ТТ имеет один существенный недостаток, связанный с узкой областью существования зубчатых колес и передач, которые геометрически определены на основании ТИК. Особенно отчетливо этот недостаток проявляется при проектировании эвольвентных колес с малым числом зубьев и зубчатых передач с высоким коэффициентом перекрытия.

Для расширения области существования эвольвентного зацепления известный русский учёный Э.Б. Вулгаков и его сотрудники разрабатывают другую теорию [12], [13], названную ими *теорией в обобщенных параметрах* (ТОП). Основной подход, на основании которого строится ТОП, связан с отрицанием ТИК как исходного начала для определения эвольвентной геометрии и назначение новых независимых параметров, непосредственно связанных с эвольвентным профилем. Этот подход в большой степени расширил возможности проектирования. С помощью ТОП стало возможным синтезировать такие зубчатые передачи, в отношении которых раньше считалось, что их невозможно сделать при эвольвентном зацеплении. Положительные результаты всё-таки не привели к массовому применению ТОП в практике и к изменению действующих стандартов [16]. Причины этого, вероятно, заложены в незнании ТОП многими специалистами и в непопулярной идее этой теории, согласно которой ТОП ориентирована не на развитие ТТ, а на её отрицание.

В ряде публикаций в последнее время наблюдается повышенный интерес к *эвольвентному зацеплению с несимметричными профилями*. При этом в одной части таких публикаций [11], [15] заложены принципы ТТ, а в другой части [14], [17], [18], [19] – принципы ТОП. Использование несимметричных профилей приводит к определённым преимуществам. Самые существенные среди них связаны с расширением области существования эвольвентного зацепления и с повышением контактной прочности в рабочем направлении движения, вследствие увеличения активного угла профиля за счет пассивного.

Несимметричность эвольвентного зацепления, по мнению автора статьи, можно осуществить не только по отношению к боковым профилям, но и в тангенциальном направлении [3], [4], [5] путем изменения толщины зубьев за счет ширины впадины производящего инструмента. Совмещение радиального смещения исходного контура и тангенциальной несимметричности зубьев [6], [7], [8] и назначение *обобщенного исходного контура* (ОИК) [1], [2], определяемого большим числом независимых параметров (рис. 2), значительно расширяет область существования эвольвентного зацепления. Это является предпосылкой для создания новой *обобщенной теории* (ОТ), в которой совмещаются преимущества ТТ и ТОП. В этой связи в настоящей статье предлагается обобщенная методика геометрического расчета всех возможных разновидностей цилиндрических эвольвентных передач внешнего зацепления, в которой вычислительные формулы для симметричных передач (ГОСТ 16532-70) получаются как частный случай при использовании предложенных формул.

## 2. Обобщенный исходный контур

Э.Б. Вулгаков считает, что “основным виновником” ограниченных возможностей ТТ является ТИК. Поэтому на основе его отрицания он разрабатывает ТОП и расширяет возможности геометрического синтеза. В этом смысле простая форма ТИК (см. рис. 1), определяемая только четырьмя независимыми параметрами, действительно задерживает развитие геометрической теории. По мнению автора статьи, причины, ограничивающие возможности традиционного синтеза, связаны не существованием исходного контура, а с частным случаем его определения. Возможен и другой подход, который, в отличие от подхода Вулгакова, связан с нахождением обобщенной формы исходного контура; после этого, с помощью утвержденного в практике традиционного принципа “от производящего контура к зубчатому колесу”, делается расчет геометрии зубчатых колес и зуборезных инструментов.

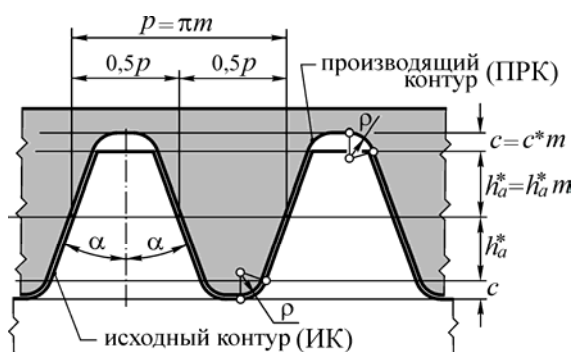


Рис. 1. Традиционный исходный контур

В этой связи предложенный ОИК (см. рис. 2), в отличие от ТИК, имеет несимметричные профили и определяется не четырьмя, а восемью независимыми параметрами (модуль  $m$ , активный профильный угол  $\alpha$ , пассивный профильный угол  $\alpha^{\wedge}$ , коэффициент полной высоты зуба  $h^*$  и высотные коэффициенты переходных участков  $g_1^*$ ,  $g_2^*$ ,  $g_1^{\wedge}$ ,  $g_2^{\wedge}$ ).

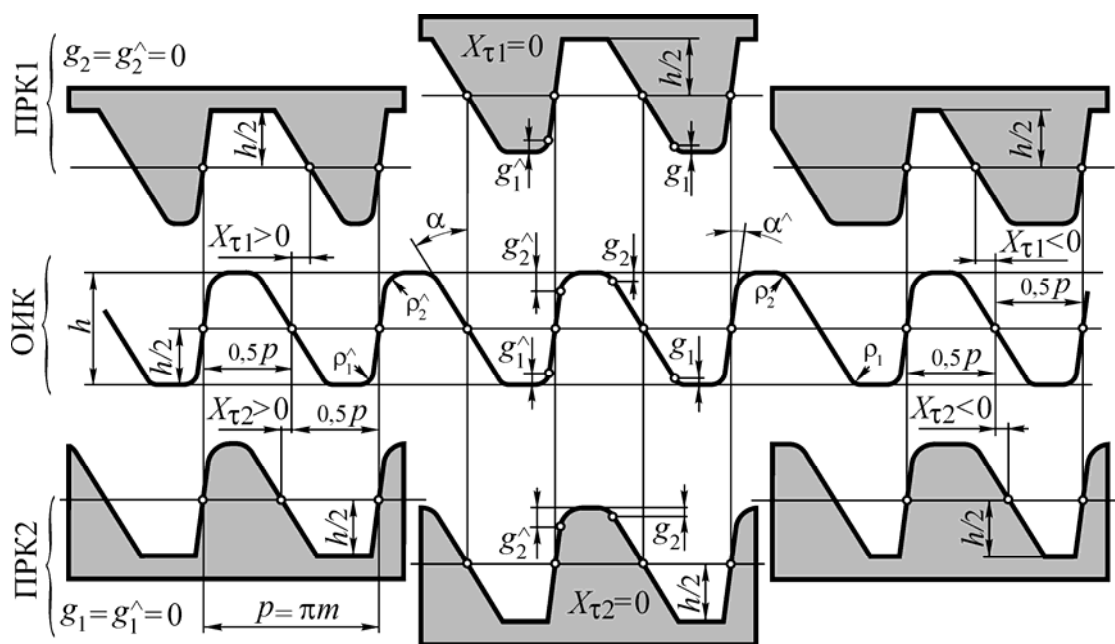


Рис. 2. Обобщенный исходный контур

Линейные размеры ОИК вычисляются по следующим формулам

$$p = \pi m, \quad h = h^* m, \quad g_1 = g_1^* m, \quad g_2 = g_2^* m, \quad g_1^\wedge = g_1^{\wedge*} m, \quad g_2^\wedge = g_2^{\wedge*} m, \quad (1)$$

а независимые параметры ТИК ( $\alpha$ ,  $h_a^*$  и  $c$ ) получаются, когда выполнены условия

$$\alpha = \alpha^\wedge, \quad h_a^* = 0,5 h^* - c^*, \quad c^* = g_1^* = g_2^* = g_1^{\wedge*} = g_2^{\wedge*}. \quad (2)$$

В понятие ОИК, в отличие от понятия ТИК, вкладывается более широкий смысл по отношению к получаемым производящим контурам. В самом общем случае ОИК определяет геометрию двух разных производящих реечных контуров. Первый (ПРК1) используется для профилирования инструмента шестерни, а второй (ПРК2) – для инструмента колеса. Кроме того, расположение противоположащих профилей в производящих контурах получается тангенциальным смещением профилей ОИК (далее используется только короткое понятие *тангенциальное смещение*). Существование *тангенциального смещения* при определении производящих контуров является основным моментом ОТ. Это в значительной степени расширяет область существования синтезированных передач. Тангенциальные смещения  $X_{\tau 1}$  и  $X_{\tau 2}$  в двух производящих контурах и сумма этих смещений  $X_{\tau \Sigma}$  определяются уравнениями

$$X_{\tau 1} = x_{\tau 1} m, \quad X_{\tau 2} = x_{\tau 2} m, \quad X_{\tau \Sigma} = x_{\tau \Sigma} m = (x_{\tau 1} + x_{\tau 2}) m, \quad (3)$$

где  $x_{\tau 1}$ ,  $x_{\tau 2}$  и  $x_{\tau \Sigma}$  – коэффициенты. При этом тангенциальное смещение положительное ( $X_{\tau} > 0$ ), если ширина впадины зуба производящего инструмента средней прямой  $m$ - $m$  (рис. 2 и 3) больше, чем толщина зуба, и отрицательное ( $X_{\tau} < 0$ ) в обратном случае.

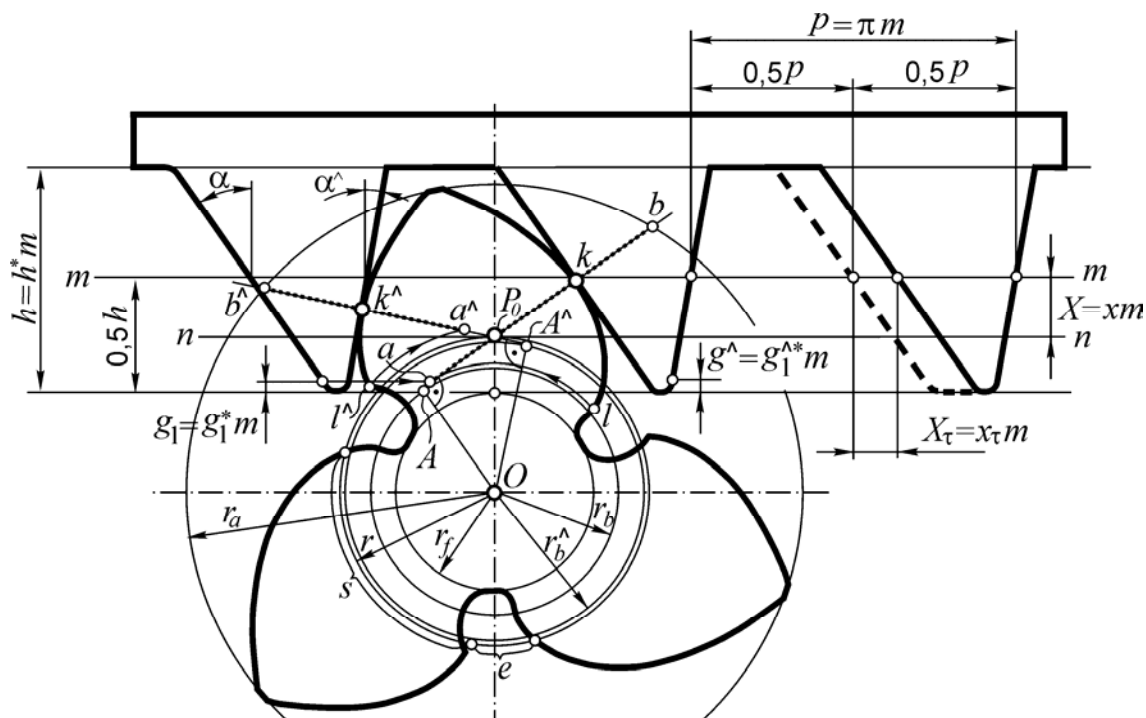


Рис. 3. Станочное зацепление шестерни с производящей рейкой

ОИК, ПРК1 и ПРК2 различаются между собой не только по отношению тангенциального смещения, но и по числу, местоположению и величине переходных участков. В этом смысле ОИК определяется четырьмя переходными участками, а в производящих контурах этих участков два. Они расположены только у вершин зубьев, как показано на рис. 2.

### 3. Двустороннее смещение эвольвентных колес

Геометрия зубчатых колес в ОТ (как и в ТТ) определяется с помощью представленного на рис. 3 станочного реечного зацепления. В общем случае, как видно непосредственно из этой схемы, относительное положение инструмента и заготовки получено смещением прямолинейных профилей ОИК в двух направлениях – радиальном и тангенциальном. При этом радиальное смещение осуществлено смещением исходного контура на величину  $X=x_t m$ , а тангенциальное – смещением боковых профилей ОИК на величину  $X_\tau=x_\tau m$  по отношению к их номинальному положению. В результате двустороннего смещения толщина зубьев  $s$  и ширина впадин  $e$  по дуге делительной окружности (с радиусом  $r$ ) получаются разными. В зависимости от соотношений этих величин и вида смещения, в общем случае, возможны восемь разновидностей зубчатых колес (рис. 4). Если сравнить с ТТ, то там разновидностей колес только три (нулевое, радиально-положительное и радиально-отрицательное).

Для колес без смещения выполняется равенство  $s = e$ . Это же самое равенство будет выполняться и для колес с двусторонним смещением, но при дополнительном условии:

$$x_\tau + x(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha') = 0. \quad (4)$$

Такое двустороннее смещение называется *равновесным смещением*.

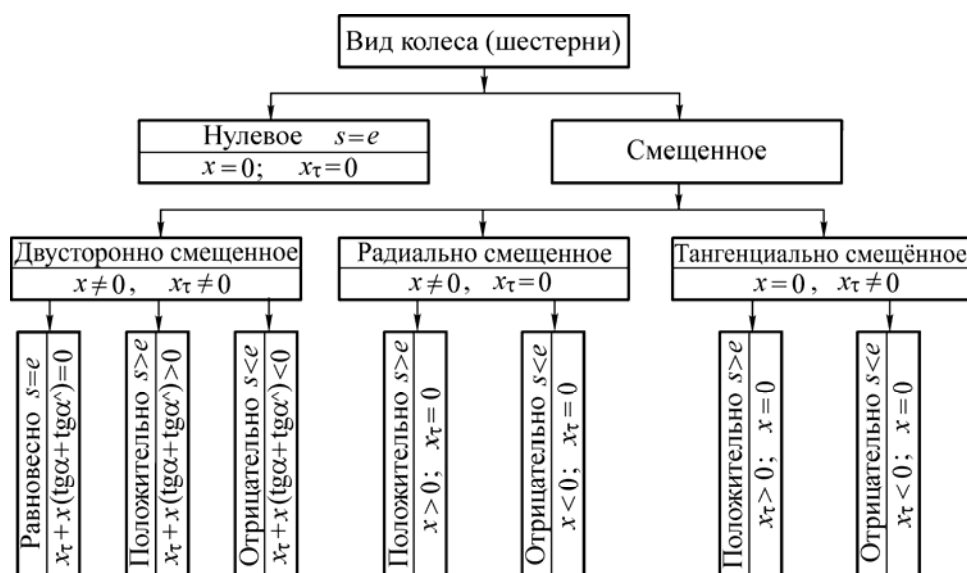


Рис. 4. Разновидности зубчатых колес

От выбора  $x$  и  $x_\tau$  в большой мере зависят геометрия зубчатых колес, качественные показатели зацепления и нагрузочная способность передачи. При этом для каждой передачи четыре коэффициента  $x_1, x_{\tau 1}, x_2$  и  $x_{\tau 2}$  назначают индивидуально, в соответствии с её предназначением и предъявляемыми к ней требованиями. Выбор рациональных коэффициентов смещения – это один из основных этапов геометрического синтеза зубчатой передачи в предлагаемой методике.

### 4. Обобщённое образование эвольвентной передачи внешнего зацепления

Принцип, на основании которого образуется эвольвентная передача обобщенного внешнего зацепления, поясняется с помощью рис. 5. На нём показано во взаимной связи эвольвентное зацепление косозубых колес и инструментальные зацепления этих колес с

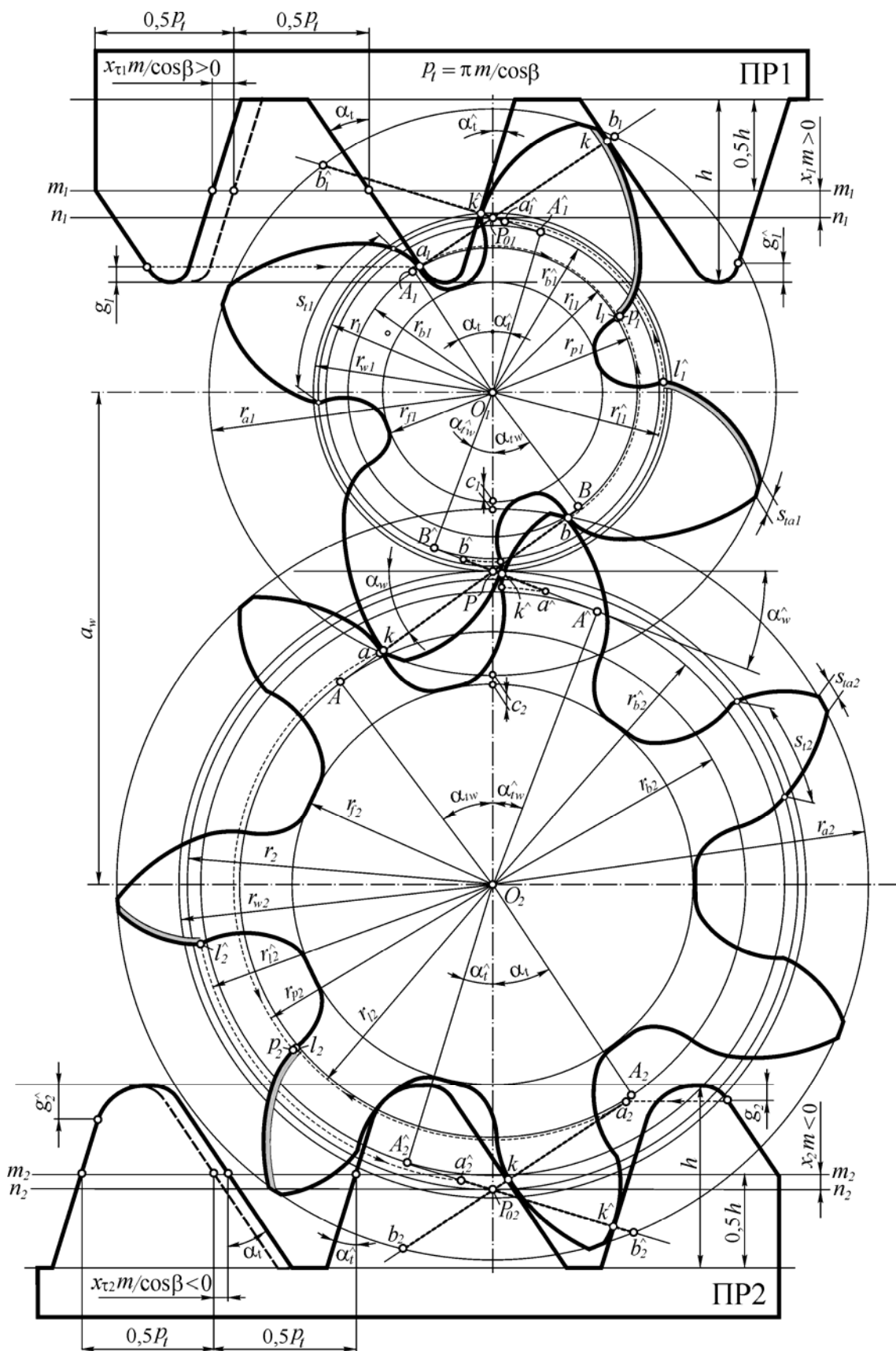


Рис. 5. Обобщенное эвольвентное зацепление

производящими рейками ПР1 и ПР2 в торцевом сечении. Образование обобщенного зацепления сначала устанавливается выбором ОИК, а потом, после назначения коэффициентов тангенциального смещения  $x_{\tau 1}$  и  $x_{\tau 2}$ , определяется геометрия ПР1 и ПР2. Каждая из этих двух производящих реек может быть с нулевым, положительным или отрицательным тангенциальным смещением боковых профилей, пока у ОИК нет смещения в тангенциальном направлении. Далее, полученными производящими рейками и заданными коэффициентами радиального смещения  $x_1$  и  $x_2$  определяется геометрия шестерни и колеса в станочном зацеплении. Впоследствии они образуют зацепление в обобщенной эвольвентной передаче. На рис. 6 представлена обобщенная классификация эвольвентных передач в зависимости от условий, накладываемых на радиальные и тангенциальные смещения.



Рис. 6. Классификация эвольвентных передач

Из рисунка видно, что равенство  $a_w = a$ , характерное для нулевых передач, выполняется в трёх случаях. В двух из этих случаев (передачи “без смещения” и “равносмещенные” передачи) необходимо, чтобы  $x_{\Sigma} = x_1 + x_2 = 0$  и  $x_{\tau \Sigma} = x_{\tau 1} + x_{\tau 2} = 0$ . В третьем случае нулевая передача получается с двусторонним смещением, когда выполнено условие

$$\frac{x_{\tau \Sigma}}{x_{\Sigma}} = -2(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha'). \quad (5)$$

Передача с таким двусторонним смещением называется *равновесно смещенной передачей*. Условие (5) устанавливает границу разделения положительных и отрицательных передач.

## 5. Обобщенная методика геометрического расчета

К заданным величинам для геометрического расчета относятся: независимые параметры  $m, \alpha, \alpha', h^*, g_1^*, g_2^*, g_1'^*, g_2'^*$  ОИК и параметры  $z_1, z_2, c_1^*, c_2^*$  зубчатой передачи. Кроме них, в соответствии с решаемой задачей, задаются дополнительно еще пять из следующих шести взаимно связанных параметров:  $a_w, x_1, x_{\tau 1}, x_2, x_{\tau 2}$  и  $\beta$ . Геометрический синтез обобщенного зацепления часто связан с решением двух основных задач. В *первой* из них заданы  $x_1, x_{\tau 1}, x_2, x_{\tau 2}$  и  $\beta$ , требуется определить межосевое расстояние  $a_w$ . Во *второй* задаче межосевое расстояние  $a_w$  считается заданным. Возможен и комбинированный вариант, когда после решения первой задачи величина  $a_w$  округляется, и потом решается вторая задача. Последовательность решения первой задачи показана в таблицах 1, 2, 3 и 4, в которых из-за ограниченного объема статьи нетрадиционные вычислительные формулы даны без вывода.

Для осуществления взаимной связи между вычисляемыми величинами и выявления их физической сущности полученные результаты визуализированы на рис. 5. Кроме этого, на рис. 7 показаны характерные точки профилей и связанные с ними параметры.

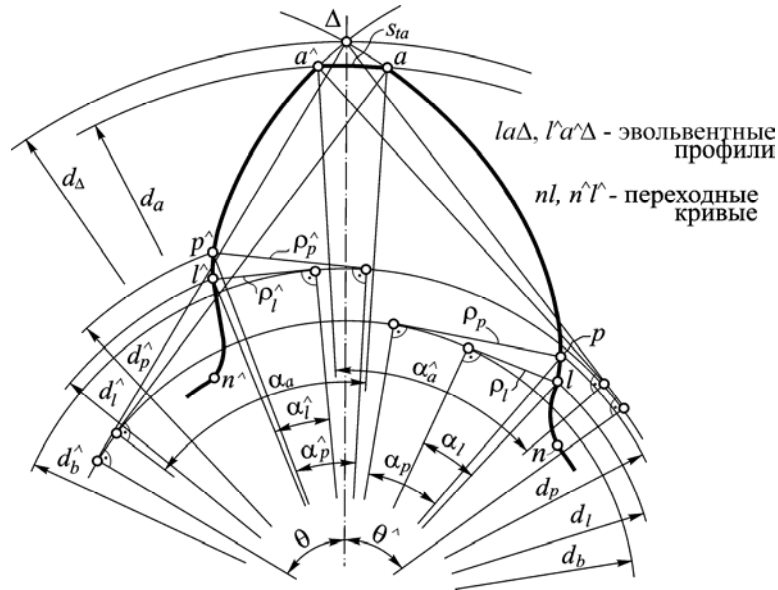


Рис. 7. Характерные точки активного и пассивного профилей

Расчёт коэффициента перекрытия по предлагаемой методике базируется на общем подходе, описанном в [10]. Он применим как для нормальных (неподрезанных), так и для подрезанных зубьев (традиционный подход применим только для нормальных зубьев). Начальная точка  $a$  и конечная точка  $b$  линии зацепления определяются не одной (как у традиционной методике), а тремя характерными схемами (рис. 8).

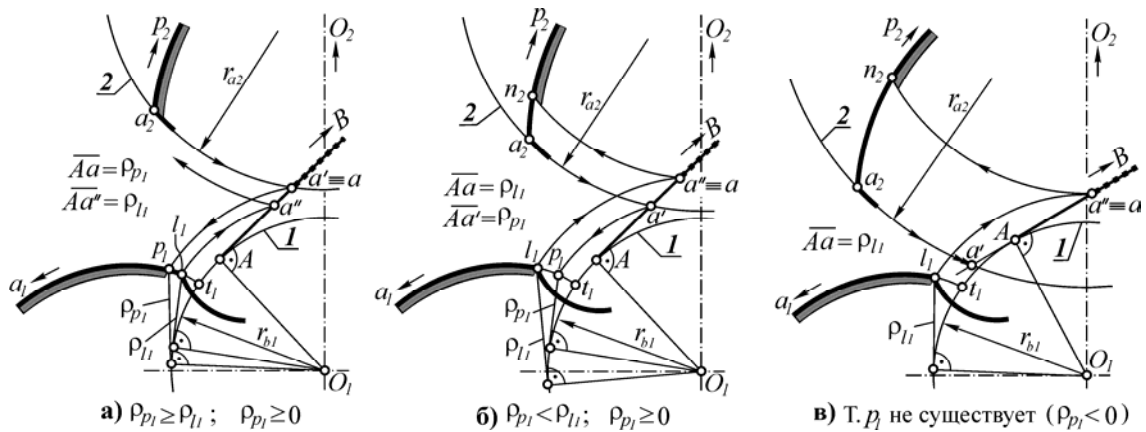


Рис. 8. Местоположение точки  $P$  подрезанного профиля и точки  $a$  начала зацепления

Решение второй задачи требует предварительного определения углов зацепления  $\alpha_{tw}$  и  $\hat{\alpha}_{tw}$  (они определяются по формулам, приведённым в табл. 2). После этого при помощи основного уравнения обобщенного зацепления

$$x_{\tau\Sigma} + x_{\Sigma} (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \hat{\alpha}) = (z_1 + z_2) (\operatorname{inv} \alpha_{tw} + \operatorname{inv} \hat{\alpha}_{tw} - \operatorname{inv} \alpha_t - \operatorname{inv} \hat{\alpha}_t) \quad (6)$$

находится связь между суммарными коэффициентами смещения  $x_{\Sigma}$  и  $x_{\tau\Sigma}$ . Далее, после уточнения значений  $x_1$ ,  $x_{\tau 1}$ ,  $x_2$ ,  $x_{\tau 2}$  и  $\beta$  решение выполняется так же, как и в первой задаче.

Таблица 1

Исходные данные для геометрического расчета

Наименование независимого параметра		Обозначение	Пример	
Модуль		$m$	10	
Делительный угол наклона линии зуба		$\beta$	$22^0$	
Число зубьев	шестерни	$z_1$	4	
	колеса	$z_2$	7	
Обобщенный исходный контур (ОИК)	активный угол профиля	$\alpha$	$32^0$	
	пассивный угол профиля	$\alpha^\wedge$	$16^0$	
	коэффициент высоты зуба	$h^*$	2,2	
	Коэффициент высоты перехода	активного профиля шестерни	$g_1^*$	0,12
		пассивного профиля шестерни	$g_1^{\wedge*}$	0,15
		активного профиля колеса	$g_2^*$	0,14
пассивного профиля колеса		$g_2^{\wedge*}$	0,35	
Коэффициент радиального зазора	шестерни	$c_1^*$	0,08	
	колеса	$c_2^*$	0,05	
Коэффициент радиального смещения	шестерни	$x_1$	0,31	
	колеса	$x_2$	-0,18635	
Коэффициент тангенциального смещения	шестерни	$x_{\tau 1}$	0,27	
	колеса	$x_{\tau 2}$	-0,17	

Таблица 2

Расчет межосевого расстояния  $a_w$  при заданных коэффициентах  $x_1, x_2, x_{\tau 1}$  и  $x_{\tau 2}$

Наименование параметра		Обозначение	Расчетная формула	Пример
Делительное межосевое расстояние		$a$	$a = m(z_1 + z_2)/2 \cos \beta$	59,3194
Торцовые углы ОИК	активного профиля	$\alpha_t$	$\alpha_t = \arctg(\operatorname{tg} \alpha / \cos \beta)$	$33,9777^0$
	пассивного профиля	$\alpha_t^\wedge$	$\alpha_t^\wedge = \arctg(\operatorname{tg} \alpha^\wedge / \cos \beta)$	$17,1850^0$
Коэффициент суммы	радиальных смещений	$x_\Sigma$	$x_\Sigma = x_1 + x_2$	0,12365
	тангенциальных смещений	$x_{\tau \Sigma}$	$x_{\tau \Sigma} = x_{\tau 1} + x_{\tau 2}$	0,10
Углы зацепления (Определяются в результате решения приведённой системы уравнений)	активного профиля	$\alpha_{tw}$	$\operatorname{inv} \alpha_{tw} + \operatorname{inv} \alpha_{tw}^\wedge = \frac{x_{\tau \Sigma} + 2x_\Sigma (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha^\wedge)}{z_1 + z_2} + \operatorname{inv} \alpha_t + \operatorname{inv} \alpha_t^\wedge$ $\frac{\cos \alpha_{tw}}{\cos \alpha_{tw}^\wedge} = \frac{\cos \alpha_t}{\cos \alpha_t^\wedge}$	$36,2535^0$
	пассивного профиля	$\alpha_{tw}^\wedge$		$21,7151^0$
Межосевое расстояние		$a_w$	$a_w = a \frac{\cos \alpha_t}{\cos \alpha_{tw}}$ , или	61



		$a_w = a \frac{\cos \hat{\alpha}_t}{\cos \hat{\alpha}_{tw}}$	
--	--	--	--

Таблица 3

Геометрические размеры и параметры колес

Наименование параметра		Обозначение	Расчетная формула	Пример
Коэффициент наименьшего радиального смещения	активного профиля	$x_{\min}$	$x_{i,\min} = 0,5(h^* - z_i \sin^2 \alpha_t / \cos \beta) - g_i^*$	0,3063 -0,2190
	пассивного профиля	$\hat{x}_{\min}$	$x_{i,\min}^{\hat{}} = 0,5(h^* - z_i \sin^2 \hat{\alpha}_t / \cos \beta) - g_i^{*\hat{}}$	0,7617 0,4205
Коэффициент наименьшего тангенциального смещения		$x_{\tau \min}$	$x_{\tau 1, \min} = x_{\tau 2, \min} = 0,5[h^* (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \hat{\alpha}) - \pi]$	-0,5680
Коэффициент максимального тангенциального смещения		$x_{\tau \max}$	$x_{\tau i, \max} = 0,5\pi - (0,5h^* - g_i^*) \operatorname{tg} \alpha - (0,5h^* - g_i^{*\hat{}}) \operatorname{tg} \hat{\alpha} - g_i^* \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha/2) - g_i^{*\hat{}} \operatorname{tg}(45^\circ + \hat{\alpha}/2)$	0,2705 0,0388
Делительный диаметр		$d$	$d_i = m z_i / \cos \beta$	43,141 75,497
Основной диаметр	активный	$d_b$	$d_{bi} = d_i \cos \alpha_t$	35,7752 62,6066
	пассивный	$\hat{d}_b$	$d_{bi}^{\hat{}} = d_i \cos \hat{\alpha}_t$	41,2154 72,1269
Диаметр впадин		$d_f$	$d_{fi} = d_i - (h^* - 2x_i)m$	27,341 49,770
Начальный диаметр	шестерни	$d_{w1}$	$d_{w1} = 2a_w / (z_2 / z_1 + 1)$	44,364
	колеса	$d_{w2}$	$d_{w2} = 2a_w - d_{w1}$	77,636
Радиальный зазор	шестерни	$c_1$	$c_1 = c_1^* m$	0,8
	колеса	$c_2$	$c_2 = c_2^* m$	0,5
Коэффициент уравнивающего смещения		$\Delta y$	$\Delta y = x_\Sigma - (a_w - a) / m$	-0,0444
Диаметр вершин зубьев	шестерни	$d_{a1}$	$d_{a1} = 2a_w - d_{f2} - 2c_1^* m$ , или $d_{a1} = d_1 + 2m(h^*/2 - c_1^* + x_1 - \Delta y)$	70,630
	колеса	$d_{a2}$	$d_{a2} = 2a_w - d_{f1} - 2c_2^* m$ , или $d_{a2} = d_2 + 2m(h^*/2 - c_2^* + x_2 - \Delta y)$	93,659
Окружная делительная толщина зуба в торцевой плоскости		$s_t$	$s_{ti} = \frac{m}{\cos \beta} \left[ \frac{\pi}{2} + x_{\tau i} + x_i (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \hat{\alpha}) \right]$	22,912 13,276
Делительная нормальная толщина зуба		$s$	$s_i = s_{ti} \cos \beta$	21,234 12,309
Угол профиля в точке на окружности вершин	активного профиля	$\alpha_a$	$\alpha_{ai} = \arccos(d_{bi} / d_{ai})$	59,5678 <sup>0</sup> 48,0520 <sup>0</sup>
	пассивного профиля	$\hat{\alpha}_a$	$\alpha_{ai}^{\hat{}} = \arccos(d_{bi}^{\hat{}} / d_{ai})$	54,2999 <sup>0</sup> 39,6367 <sup>0</sup>
Угол наклона линии зуба на поверхности вершин		$\beta_a$	$\beta_{ai} = \arctg(d_{ai} \operatorname{tg} \beta / d_i)$	33,4830 <sup>0</sup> 26,6208 <sup>0</sup>
Толщина зуба на поверхности вершин в торцевой плоскости		$s_{ia}$	$s_{ta,i} = d_{ai} \{ \pi / 2 z_i + [x_i (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \hat{\alpha}) + x_{\tau i}] / z_i +$	1,6035 1,4705

			$+(\text{inv } \alpha_t + \text{inv } \hat{\alpha}_t)/2 - (\text{inv } \alpha_{ai} + \text{inv } \hat{\alpha}_{ai})/2\}$	
Нормальная толщина зуба на поверхности вершин		$s_a$	$s_{ai} = s_{ta,i} \cos \beta_{ai}$	1,337 1,315
Угол окружности заострения вершин зубьев в точке	активного профиля	$\theta$	Определяются в результате решения системы уравнений: $\text{inv } \theta_i + \text{inv } \hat{\theta}_i = \text{inv } \alpha_t + \text{inv } \hat{\alpha}_t +$ $+ [\pi + 2x_i(\text{tg} \alpha + \text{tg} \hat{\alpha}) + 2x_{\tau i}] / z_i$ $\frac{\cos \theta_i}{\cos \hat{\theta}_i} = \frac{\cos \alpha_t}{\cos \hat{\alpha}_t}$	$z_1 = 4$ $60,0519^0$ $48,8599^0$ $z_2 = 7$ $54,8914^0$ $40,7165^0$
	пассивного профиля	$\hat{\theta}$		
Диаметр окружности заострения вершин зубьев		$d_\Delta$	$d_{\Delta i} = d_i \frac{\cos \alpha_t}{\cos \theta_i} = d_i \frac{\cos \hat{\alpha}_t}{\cos \hat{\theta}_i}$	71,663 95,161
Радиус кривизны зуба в граничной точке	активного профиля	$\rho_l$	При $x_i \geq x_{i \min}$ : $\rho_{li} = 0,5d_i \sin \alpha_t - m[0,5h^* - g_i^* - x_i] / \sin \alpha_t$ При $x_i < x_{i \min}$ : $\rho_{li} \approx m[0,5(h^* - z_i \sin^2 \alpha_t / \cos \beta) - g_i^* - x_i]$	0,0668 0,5847
	пассивного профиля	$\hat{\rho}_l$	При $x_i \geq \hat{x}_{i \min}$ : $\hat{\rho}_{li} = 0,5d_i \sin \hat{\alpha}_t - m[0,5h^* - \hat{g}_i^* - x_i] / \sin \hat{\alpha}_t$ При $x_i < \hat{x}_{i \min}$ : $\hat{\rho}_{li} \approx m[0,5(h^* - z_i \sin^2 \hat{\alpha}_t / \cos \beta) - \hat{g}_i^* - x_i]$	4,5170 6,0682
Угол профиля в граничной точке	активного участка	$\alpha_l$	При $x_i \geq x_{i \min} \rightarrow \text{tg} \alpha_{li} = \text{tg} \alpha_t - \frac{4 \cos \beta [0,5h^* - g_i^* - x_i]}{z_i \sin 2\alpha_t}$ При $x_i < x_{i \min} \rightarrow \text{tg} \alpha_{li} = 2\rho_{li} / d_{bi}$	0,2139 <sup>0</sup> 1,0701 <sup>0</sup>
	пассивного участка	$\hat{\alpha}_l$	При $x_i \geq \hat{x}_{i \min} \rightarrow$ $\text{tg} \hat{\alpha}_{li} = \text{tg} \hat{\alpha}_t - \frac{4 \cos \beta [0,5h^* - \hat{g}_i^* - x_i]}{z_i \sin 2\hat{\alpha}_t}$ При $x_i < \hat{x}_{i \min} \rightarrow \text{tg} \hat{\alpha}_{li} = 2\hat{\rho}_{li} / \hat{d}_{bi}$	12,3631 <sup>0</sup> 9,5514 <sup>0</sup>
Диаметр окружности в граничной точке	активного профиля	$d_l$	$d_{li} = d_{bi} / \cos \alpha_l$ , или $d_{li} = \sqrt{d_{bi}^2 + 4\rho_{li}^2}$	35,7755 62,6175
	пассивного профиля	$\hat{d}_l$	$\hat{d}_{li} = \hat{d}_{bi} / \cos \hat{\alpha}_l$ , или $d_{li} = \sqrt{\hat{d}_{bi}^2 + 4\hat{\rho}_{li}^2}$	42,1938 73,1409
Угол профиля в нижней контактной точке	активного участка	$\alpha_p$	$\text{tg} \alpha_{p1} = \text{tg} \alpha_{tw} - z_2(\text{tg} \alpha_{a2} - \text{tg} \alpha_{tw}) / z$ $\text{tg} \alpha_{p2} = \text{tg} \alpha_{tw} - z_1(\text{tg} \alpha_{a1} - \text{tg} \alpha_{tw})$	Если $\text{tg} \alpha_{p1} < 0$ точка $p$ не существует 3,9767 <sup>0</sup> 10,1842 <sup>0</sup>

	пассивного участка	$\hat{\alpha}_p$	$\operatorname{tg} \hat{\alpha}_{p1} = \operatorname{tg} \hat{\alpha}_{tw} - z_2 (\operatorname{tg} \hat{\alpha}_{a2} - \operatorname{tg} \hat{\alpha}_{tw}) / z_2$ $\operatorname{tg} \hat{\alpha}_{p2} = \operatorname{tg} \hat{\alpha}_{tw} - z_1 (\operatorname{tg} \hat{\alpha}_{a1} - \operatorname{tg} \hat{\alpha}_{tw}) / z_1$	Если $\operatorname{tg} \hat{\alpha}_{pi} < 0$ точка $p$ не существует	-19,5153 -9,6145
Радиус кривизны зуба в нижней контактной точке	активного профиля	$\rho_p$	$\rho_{p1} = a_w \sin \alpha_{tw} - 0,5 d_{b2} \operatorname{tg} \alpha_{a2}$ $\rho_{p2} = a_w \sin \alpha_{tw} - 0,5 d_{b1} \operatorname{tg} \alpha_{a1}$	Если $\rho_{pi} < 0$ точка $p$ не существует	1,2435 5,6234
	пассивного профиля	$\hat{\rho}_p$	$\hat{\rho}_{p1} = a_w \sin \hat{\alpha}_{tw} - 0,5 \hat{d}_{b2} \operatorname{tg} \hat{\alpha}_{a2}$ $\hat{\rho}_{p2} = a_w \sin \hat{\alpha}_{tw} - 0,5 \hat{d}_{b1} \operatorname{tg} \hat{\alpha}_{a1}$	Если $\hat{\rho}_{pi} < 0$ точка $p$ не существует	-7,3038 -6,1091
Диаметр окружности нижней контактной точки	активного профиля	$d_p$	$d_{pi} = d_{bi} / \cos \alpha_{pi}, \text{ или}$ $d_{pi} = \sqrt{d_{bi}^2 + 4\rho_{pi}^2}$		35,8615 63,6088
	пассивного профиля	$\hat{d}_p$	$\hat{d}_{pi} = \hat{d}_{bi} / \cos \hat{\alpha}_{pi}, \text{ или}$ $\hat{d}_{li} = \sqrt{\hat{d}_{pi}^2 + 4\hat{\rho}_{pi}^2}$		- -
П р и м е ч а н и е: 1) Во всех обозначениях нижний индекс $i$ равен 1 или 2. Случай $i = 1$ относится к шестерне и ПРК1; случай $i = 2$ относится к колесу и ПРК2 2) Расчет диаметра $d_p$ ( $\hat{d}_p$ ) не производится, если $\alpha_{pi} < 0$ и $\rho_{pi} < 0$ ( $\hat{\alpha}_{pi} < 0$ и $\hat{\rho}_{pi} < 0$ ).					

Таблица 4

Расчет коэффициента перекрытия при прямом и обратном направлениях вращения

Наименование параметра	Обозначение	Расчетная формула	Пример	
Основной шаг в торцевой плоскости (активной, пассивной)	$p_b, \hat{p}_b$	$p_b = \pi m \cos \alpha_t / \cos \beta;$ $\hat{p}_b = \pi m \cos \hat{\alpha}_t / \cos \beta$	28,0978 32,3704	
Теоретический участок линии зацепления (активной, пассивной)	$l_{AB}, \hat{l}_{AB}$	$l_{AB} = a_w \sin \alpha_{tw}; \quad \hat{l}_{AB} = a_w \sin \hat{\alpha}_{tw}$	36,0729 22,5695	
Нерабочий начальный участок линии зацепления	активной	$l_{Aa}$	При $x_1 \geq x_{1\min} \rightarrow l_{Aa} = \rho_{p1}$ При $x_1 < x_{1\min}$ и $\rho_{l1} \leq \rho_{p1} \rightarrow l_{Aa} = \rho_{p1}$ При $x_1 < x_{1\min}$ и $\rho_{l1} > \rho_{p1} \rightarrow l_{Aa} = \rho_{l1}$	1,2435
	пассивной	$\hat{l}_{Aa}$	При $x_1 \geq \hat{x}_{1\min} \rightarrow \hat{l}_{Aa} = \hat{\rho}_{p1}$ При $\hat{x}_1 < \hat{x}_{1\min}$ и $\hat{\rho}_{l1} \leq \hat{\rho}_{p1} \rightarrow \hat{l}_{Aa} = \hat{\rho}_{p1}$ При $\hat{x}_1 < \hat{x}_{1\min}$ и $\hat{\rho}_{l1} > \hat{\rho}_{p1} \rightarrow \hat{l}_{Aa} = \hat{\rho}_{l1}$	4,5170
Нерабочий конечный участок линии зацепления	активной	$l_{Bb}$	При $x_2 \geq x_{2\min} \rightarrow l_{Bb} = \rho_{p2}$ При $x_2 < x_{2\min}$ и $\rho_{l2} \leq \rho_{p2} \rightarrow l_{Bb} = \rho_{p2}$ При $x_2 < x_{2\min}$ и $\rho_{l2} > \rho_{p2} \rightarrow l_{Bb} = \rho_{l2}$	5,6234
	пассивной	$\hat{l}_{Bb}$	При $x_2 \geq \hat{x}_{2\min} \rightarrow \hat{l}_{Bb} = \hat{\rho}_{p2}$ При $\hat{x}_2 < \hat{x}_{2\min}$ и $\hat{\rho}_{l2} \leq \hat{\rho}_{p2} \rightarrow \hat{l}_{Bb} = \hat{\rho}_{p2}$ При $\hat{x}_2 < \hat{x}_{2\min}$ и $\hat{\rho}_{l2} > \hat{\rho}_{p2} \rightarrow \hat{l}_{Bb} = \hat{\rho}_{l2}$	6,0682

Рабочий участок линии зацепления (активной, пассивной)	$l_{ab}, l_{ab}^{\wedge}$	$l_{ab} = l_{AB} - l_{Aa} - l_{Bb}; \quad l_{ab}^{\wedge} = l_{AB}^{\wedge} - l_{Aa}^{\wedge} - l_{Bb}^{\wedge}$	29,2059 11,9843
Коэффициент торцового перекрытия (активный, пассивный)	$\varepsilon_{\alpha}, \varepsilon_{\alpha}^{\wedge}$	$\varepsilon = \frac{l_{ab}}{p_b}, \quad \varepsilon_{\alpha}^{\wedge} = \frac{l_{ab}^{\wedge}}{p_b^{\wedge}}$	1,039 0,370
Рабочая ширина зацепления	$b_w$	$b_w = \min(b_{w1}; b_{w2})$ $b_{w1}$ - ширина шестерни, $b_{w2}$ - ширина колеса	100
Коэффициент осевого перекрытия (активный, пассивный)	$\varepsilon_{\beta}, \varepsilon_{\beta}^{\wedge}$	$\varepsilon_{\beta} = \varepsilon_{\beta}^{\wedge} = \frac{b_w \sin \beta}{\pi m}$	1,192
Коэффициент перекрытия (активный, пассивный)	$\varepsilon, \varepsilon^{\wedge}$	$\varepsilon = \varepsilon_{\alpha} + \varepsilon_{\beta}; \quad \varepsilon^{\wedge} = \varepsilon_{\alpha}^{\wedge} + \varepsilon_{\beta}^{\wedge}$	2,23 1,56
Характерные участки линии зацепления			
	П р и м е ч а н и е: 1) Точка А – начало теоретического участка линии зацепления. 2) Метод расчета – один и тот же, как для нормальных, так и для подрезанных зубьев.		

## 6. Проверка качества зацепления

Качество зубчатой передачи базируется на нескольких геометрических показателях, определяющих границы области её существования. В ходе геометрического расчета проверяются пять ограничительных условий, связанных с: 1) *реальным существованием ОИК*; 2) *подрезанием эвольвентных профилей*; 3) *заострением зубьев*; 4) *интерференцией в зацеплении*; 5) *коэффициентом перекрытия*. Выполнение условия 1 проверяется вычислением  $x_{\tau \min}$  и  $x_{\tau \max}$  по формулам, приведённым в табл. 3. Характер остальных четырех ограничительных условий, по существу, тот же самый, что и в традиционной методике. В общем случае для пассивных профилей допускается определённое подрезание [9], вследствие которого выполнение условий 2 и 5 не обязательно. Проверка условия 4 в общем случае связана с предварительным определением местоположения последней контактной точки  $p$  в соответствии с показанными на рис. 8 тремя разграничительными случаями. Если при проверке какое-либо условие окажется неудовлетворительным, следует, в зависимости от конкретной задачи, изменить  $x_1$ ,  $x_{\tau 1}$ ,  $x_2$  или  $x_{\tau 2}$ . В отдельных случаях может оказаться необходимым изменить и другие величины. После таких изменений все проверки повторяются.

## 7. Численный пример

В качестве численного примера для иллюстрирования возможностей обобщенной методики выбрана зубчатая передача с  $z_1 = 4$  и  $z_2 = 7$ , которая, согласно известным методикам [15] и [16], является неосуществимой при  $\beta = 0$  вследствие недопустимо малого коэффициента перекрытия ( $\varepsilon_{\alpha} < 1$ ). Численные значения входных параметров, необходимых для геометрического расчета, приведены в табл. 1. Из них видно, что передача является косозубой с несимметричными профилями ( $\alpha \neq \alpha^{\wedge}$ ), зубчатые колеса имеют радиальные и тангенциаль-

ные смещения ( $x_1 \neq 0$ ,  $x_2 \neq 0$ ,  $x_{\tau 1} \neq 0$ ,  $x_{\tau 2} \neq 0$ ), а ОИК имеет разные значения величин  $g_i$  и  $c_i$  ( $g_1^* \neq g_2^* \neq g_1^{\wedge*} \neq g_2^{\wedge*} \neq c_1^* \neq c_2^*$ ). Сначала задача геометрического синтеза решается по формулам табл. 2 при заданных  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_{\tau 1}$  и  $x_{\tau 2}$ , в результате чего найдено межосевое расстояние  $a_w$ . Для этой цели предварительно определены углы зацепления  $\alpha_w$  и  $\alpha_w^{\wedge}$  с помощью приведенной в табл. 2 системы уравнений и специально разработанной программы [5]. Потом по формулам табл. 3 и 4 определяются остальные геометрические размеры зубчатых колес и параметры зубчатой передачи. Численные значения определяемых величин записаны в последней колонке таблиц. Расчет углов  $\theta$  и  $\theta^{\wedge}$ , определяющих заострения вершин зубьев, осуществляется путём решения второй системы трансцендентных уравнений. В результате сделанных расчетов и проверок ограничительных условий устанавливается работоспособность спроектированной передачи. Полученные результаты использованы при построении на рис. 5 в масштабе станочного зацепления двух колес и картины реального зацепления колеса. Коэффициент торцового перекрытия этой передачи (с малыми числами зубьев) в активном направлении вращения получается  $\varepsilon_{\alpha} = 1,039$ .

## 8. Заключение

Приведенные формулы геометрического расчета цилиндрических эвольвентных передач внешнего зацепления относятся к самому общему случаю, когда зацепление косозубое, двусторонне (радиально и тангенциально) смещенное, с несимметричными профилями, с двумя неодинаковыми радиальными зазорами, с разными по величине переходными участками, с подрезанными и неподрезанными профилями. Эту методику можно использовать при каждой частной разновидности эвольвентного зацепления, без необходимости привлечения новых расчетных формул. В практическом смысле обобщенная методика обеспечивает возможность создания одного общего программного продукта для компьютерного проектирования всех видов эвольвентных передач внешнего зацепления.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алипиев О., С. Антонов. Обобщен изходен контур в теорията на еволвентното зацепване. сп. Механика на машините. № 64. 2006. Варна. С. 121-125.
2. Алипиев О., С. Антонов. Външно еволвентно зацепване образувано с обобщен изходен контур. сп. Механика на машините. № 64. 2006. Варна. С. 126-130.
3. Алипиев О.Л. Обобщена методика за геометрично изчисляване на правозъбни еволвентни предавки с външно зацепване. Научни трудове на Русенски университет, том 45, серия 2.2. 2006. С. 230-235.
4. Алипиев О.Л. Обобщени зависимости за дебелината на зъбите на еволвентни колела с профилна и тангенциална несиметричност. сп. Механика на машините. № 68. 2007. Варна. С. 70-74.
5. Алипиев О., С. Антонов. Основно уравнение и задачи на обобщената геометрична теория при проектиране на еволвентни предавки с външно зацепване. сп. Механика на машините. № 68. 2007. Варна. С. 75-79.
6. Алипиев О.Л. Обобщено геометрично пресмятане на цилиндрични еволвентни предавки с външно симетрично и несиметрично зацепване. сп. Механика на машините. № 68. 2007. Варна. С. 80-87.
7. Алипиев О.Л. Потенциален коэффициент на припокриване на обобщен зъбен гребен в теорията на еволвентното зацепване. Научни трудове на Русенски университет, том 46, серия 1. 2007. С. 116-121.
8. Алипиев О.Л. Потенциален коэффициент на припокриване на зъбно колело в обобщената теория на еволвентното зацепване. Научни трудове на Русенски университет, том 46, серия 1. 2007. С. 122-128.

9. **Алипиев О., С Антонов, Т. Грозева.** Гранична точка на подрязване при еволвентни колела с прави зъби, формообразувани със зъбен гребен. сп. Механика на машините. № 75. 2008. Варна. С. 56-62.
10. **Алипиев О.Л.** Обобщено определяне на коэффициента на припокриване при еволвентното зацепване. сп. Механика на машините. №75. 2008. Варна. С. 63-70.
11. **Болтовский И.А.** и др. Справочник по геометрическому расчету эвольвентных зубчатых и червячных передач. – М.: Машиностроение, 1986. – 477 с.
12. **Вулгаков Э.Б.** Зубчатые передачи с улучшенными свойствами. – М.: Машиностроение, 1974. – 264 с.
13. **Вулгаков Э.Б.** Теория эвольвентных зубчатых передач. – М.: Машиностроение, 1995. – 320 с.
14. **Вулгаков Э.Б.** Новое поколение эвольвентных зубчатых передач. // Вестник машиностроения. № 1. 2004.
15. **Тимофеев Б.П., Д.А. Фролов.** Расчет геометрических параметров цилиндрических эвольвентных передач с несимметричными зубьями. // Теория механизмов и машин. №2(6), 2005. С. 15-21
16. **ГОСТ 16532-70.** Передачи зубчатые цилиндрические эвольвентные внешнего зацепления. Расчет геометрии.
17. **F.L. Litvin, Q. Lian, A.L. Kapelevich.** Asymmetric modified gear drives: reduction of noise, localization of contact, simulation of meshing and stress analysis, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 188 (2000), 363-390. This paper was presented on the workshop of the Gear Research Laboratory of University of Illinois at Chicago and NASA Glenn Research Center, Cleveland, May 18, 1999.
18. **A.L. Kapelevich, R.E. Kleiss.** Direct Gear Design for Spur and Helical Gears, Gear Technology, September/October 2002, 29 – 35.
19. **A.L. Kapelevich.** Direct Design Approach for High Performance Gear Transmissions, Gear Solutions, January 2004, 22-31. This article was presented at the Global Powertrain Congress 2007 June 17-19, 2007, Berlin, Germany and it was also published in the Global Powertrain Congress Proceedings, Vol. 39-42, 66-71.

*Поступила в редакцию 03.04.2008*

*После доработки 21.04.2008*