

УЧЁТ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИССИПАТИВНЫХ СИЛ ПРИ ОГРАНИЧЕННОЙ ИСХОДНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Предварительные замечания

Несмотря на то, что роль диссипативных сил при формировании колебательных процессов в механизмах и приводах машин чрезвычайно велика, именно учет этих сил нередко оказывается наиболее уязвимым местом в динамических исследованиях и инженерных расчетах. Последнее связано с несколькими причинами. Во-первых, большое число диссипативных факторов, сложность и многообразие энергетических потерь при колебаниях существенно затрудняет корректное математическое описание диссипативных сил. При этом мы располагаем ограниченной исходной информацией, заимствованной из экспериментальных материалов в форме некоторых интегральных диссипативных характеристик таких как коэффициент рассеяния ψ или логарифмический декремент \mathfrak{A} , которые получены, как правило, при моногармонических колебаниях эталонных моделей. Во-вторых, при практическом использовании этих параметров нередко допускаются принципиальные ошибки, в результате которых возникают существенные искажения в прогнозируемых колебательных процессах не только количественно, но также и качественного характера [1...5].

Дополнительные осложнения возникают при учете диссипации в резонансных колебательных режимах. Так, в частности, в задачах динамики цикловых механизмов в колебательных процессах из-за переменности параметров существенную роль в формировании диссипации "быстрых" движений, обусловленных сопровождающими свободными колебаниями, играет медленно меняющаяся составляющая [6].

В данной статье в развитие работ [1...5] акцентируется внимание на рациональном учете диссипативных факторов при учете ограниченности исходной информации. При этом здесь не ставится задача обзора многочисленных библиографических источников, посвященных освещению теоретических аспектов проблемы рассеяния энергии в различных элементах механических систем.

Гармоническая линеаризация диссипативных сил.

Суть этой процедуры состоит в замене в общем случае нелинейной силы сопротивления – линейной в предположении колебательного процесса, близкого к моногармоническому. Поскольку при этом в первом приближении соблюдаются условия энергетического баланса, данную процедуру нередко называют эквивалентной.

Для систем с одной степенью свободы возникающая при колебаниях сила сопротивления не зависимо от ее природы может быть описана следующим образом

$$R = -|R(q, \dot{q})| \text{sign} \dot{q} \quad (1)$$

где q – обобщенная координата.

Модуль силы в одних случаях не зависит от обобщенной скорости (позиционные силы трения), а в других не зависят от обобщенной координаты («вязкое» трение). Различают также позиционно-вязкое трение, при котором сила сопротивления описывается зависимостью [7]

$$R = f(q)\dot{q} \quad (2)$$

В распространенном частном случае модуль силы в формуле (1) может сохранять постоянное значение ("сухое" или кулоново трение).

Для нелинейной силы сопротивления рассеянная за один цикл энергия ΔE_- определяется как

$$\Delta E_- = \int_0^{\tau} R \dot{q} dt = -A \int_0^{2\pi} |R(A \sin \varphi, \omega A \cos \varphi) \cos \varphi| d\varphi \quad (3)$$

Здесь принято $q = A \sin \varphi$, где $\varphi = \Omega t + \gamma$; $\tau = 2\pi / \Omega$ – период колебаний.

С другой стороны, для «линейной» силы эквивалентного сопротивления имеем $R_s = -b\dot{q}$; при этом $\Delta E_- = -\pi b A^2 \Omega$. Тогда при учете (3)

$$b = \Delta E_- / (\pi A^2 \Omega) = \psi c / (2\pi \Omega) \quad (4)$$

где ψ – коэффициент рассеяния, c – коэффициент жесткости.

Из (4) следует, что коэффициент рассеяния ψ при моногармоническом режиме не зависит от амплитуды только в том случае, если энергия диссипации пропорциональна квадрату амплитуды. Как показывает эксперимент, в задачах динамики механизмов зависимость коэффициента ψ от Ω нередко проявляется очень слабо, поэтому обычно принимают $\psi(\Omega) \approx \text{const}$; в подобных случаях площадь петли гистерезиса не зависит от частоты, и сопротивление считают частотно-независимым.

При позиционных силах сопротивления одной из самых распространенных ошибок, допускаемых при расчете колебаний, является сохранение постоянных значений b при варьировании параметрами системы. Нередко при использовании формулы (4) возникают затруднения при выборе частоты Ω . Так, в частности, при доминирующем гармоническом возмущении в задачах динамики механизмов иногда принимают частоту $\Omega = \omega$, где ω – частота возмущения, обычно совпадающая с частотой вращения главного вала. Далее определенный подобным образом коэффициент b используют также и для расчета затухания сопровождающих свободных колебаний с собственной частотой k , что приводит к грубым ошибкам. Нам представляется, что даже при предварительных оценочных расчетах следует принимать $\Omega = k$. При этом не следует опасаться искажения колебательных процессов с частотой ω , поскольку диссипативная сила играет существенную роль лишь в резонансной зоне, когда $\omega = k$ (о более строгом подходе см. ниже).

При кулоновом трении $R = -P \text{sign} \dot{q}$ имеем $\Delta E_- = -4PA$; при этом

$$b = 4P / (\pi A \Omega); \psi = 8P / (cA) \quad (5)$$

При вязком трении на основании эксперимента могут быть получены эмпирические формулы вида

$$|R| = \sum_{s=1}^N \beta_s A |\dot{q}^s|. \quad (6)$$

Тогда на основании (3) и (4)

$$b = \frac{4}{\pi} \sum_{s=1}^N \beta_s A^{s-1} \Omega^{s-1} \int_0^{\pi/2} \cos^{s+1}(\varphi) d\varphi = \begin{cases} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots s}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (s+1)} & (s = 2n); \\ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots s}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (s+1)} & (s = 2n+1). \end{cases} \quad (7)$$

Особенности проявления позиционно-вязкого сопротивления подробно рассмотрены в монографии [7]. В этом случае при действии вибрации не происходит сколько-нибудь значительных качественных изменений сил сопротивления, однако количественные характеристики этих сил могут существенно измениться.

Использование эквивалентной линеаризации диссипативных сил при анализе систем со многими степенями свободы

Предполагая, что диссипативные силы пренебрежимо мало влияют на собственные частоты и формы колебаний, осуществим переход к нормальным координатам в соответствии с линейным преобразованием

$$\mathbf{q} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\eta} \quad (8)$$

где \mathbf{q} , $\boldsymbol{\eta}$ – матрицы-столбцы обобщенных и нормальных координат, $\boldsymbol{\alpha}$ – квадратная матрица коэффициентов формы, в которой каждый столбец отвечает фиксированной собственной частоте k_r .

В каждое дифференциальное уравнение введем эквивалентную диссипативную силу $\mathbf{R} = -\mathbf{b}^* \dot{\boldsymbol{\eta}}$ Тогда

$$\mathbf{a}^* \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{b}^* \dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{c}^* \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\alpha} \mathbf{Q} \quad (9)$$

где $\mathbf{a}^* = \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{a} \boldsymbol{\alpha}$; $\mathbf{c}^* = \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{c} \boldsymbol{\alpha}$ – диагональные матрицы; \mathbf{a} , \mathbf{c} – матрицы инерционных и квазиупругих коэффициентов в исходной системе координат;

$\mathbf{b}^* = \text{diag}\{b_1^*, \dots, b_H^*\}$ – диагональная матрица коэффициентов эквивалентного линейного сопротивления, элементы которой b_r^* определены по формуле (4) при $\Omega = k_r$.

Если в исходной системе координат представить диссипативные силы как $\mathbf{R} = -\mathbf{b} \dot{\mathbf{q}} = -\mathbf{b} \boldsymbol{\alpha} \dot{\boldsymbol{\eta}}$, то

$$\mathbf{b} = (\boldsymbol{\alpha}^T)^{-1} \mathbf{b}^* \boldsymbol{\alpha}^{-1} \quad (10)$$

Формула (10) позволяет определять матрицу \mathbf{b} в исходной системе координат, не прибегая к процедуре перехода к нормальным координатам, что существенно упрощает учет диссипативных сил при численном моделировании на ЭВМ.

Следует, однако, иметь в виду, что изложенный выше подход базируется на предположении об отсутствии диссипативных связей между различными формами колебаний, когда не происходит перекачки энергии, обусловленной диссипацией, из одной формы в другую. Это предположение носит достаточно правдоподобный характер при какой-либо доминирующей частоте колебательного процесса. В противном случае полученные подобным образом результаты требуют уточнения.

Уточненная эквивалентная линеаризация диссипативных сил при неоднородных колебаниях

Подобные режимы, как уже отмечалось, наблюдаются при квазигармоническом силовом или кинематическом возбуждении системы и одновременном возбуждении интенсивных сопровождающих свободных колебаний.

Аналогичная ситуация возникает при резонансе на одной из частот и достаточно сильном (хотя и нерезонансном) возбуждении на другой частоте, при совместном

возбуждении вынужденных и параметрических колебаний и в ряде других случаев.

В подобных случаях уровень амплитуды по крайней мере одной из гармоник существенным образом зависит от диссипации, на которую влияют колебания на других частотах. Поскольку эта проблема была подробно рассмотрена в ряде работ автора [1...5], здесь мы ограничимся лишь анализом конкретной задачи, иллюстрирующей существенное проявление нелинейного характера диссипативных сил. Рассмотрим колебательную систему, описываемую дифференциальным уравнением

$$\ddot{q} + 2\delta k\dot{q} + k^2 q = f_1 \sin \Omega t + f_2 \sin \omega t, \quad (11)$$

где $\delta = \psi / (4\pi)$ – коэффициент демпфирования; k – собственная частота (в предположении пренебрежимо малого влияния диссипативных сил).

Если $\Omega = k$ и принято $\psi = \psi_0$ и $\delta = \delta_0$, где индекс 0 отвечает диссипативным факторам, полученным при моногармоническом режиме, то амплитуды вынужденных колебаний равны

$$A_\Omega^0 = f_1 / (2k^2\delta_0), \quad A_\omega = f_2 / \sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4k^2\delta_0^2} \approx f_2 / |k^2 - \omega^2|. \quad (12)$$

Здесь A_Ω^0 отвечает резонансной частоте $\Omega = k$. а A_ω - частоте ω : при этом предполагается, что частота ω существенно удалена от резонансной зоны. Введем в рассмотрение отношение амплитуд $\xi_0 = A_\Omega^0 / A_\omega$. Согласно (12)

$$\xi_0 = \frac{f_1 |1 - z^2|}{2f_2\delta_0}, \quad (13)$$

где $z = \omega / k$.

Полученный результат отвечает линейной теории. Однако, как было впервые установлено в работе [1], при неоднородных колебаниях в соответствии с формулой (3) эффективное значение диссипативных факторов может уменьшаться: $\psi = \psi_0\Phi$, $\delta = \delta_0\Phi$, где $\Phi < 1$. Это происходит за счет частичных энергетических потерь при колебаниях с нерезонансной частотой, что сопровождается неполным замыканием петель гистерезиса на рассматриваемой частоте. Таким образом, с учетом нелинейного характера диссипации имеет место возрастание резонансной амплитуды, описываемой функцией $\chi(\omega)$

$$\chi = A_\Omega / A_\Omega^0 = \xi / \xi_0 = \delta_0 / \delta = \Phi^{-1}(w), \quad (14)$$

где $w = A_\Omega k / A_\omega \omega = \xi / z$ – отношение максимальных виброскоростей на рассматриваемых частотах.

На рис. 1 представлены графики функции $\Phi(w)$ для ряда форм петель гистерезиса: прямоугольной (кривая 1), эллиптической (кривая 2), рессорной (кривая 3). При этом кривая 1 одновременно характеризует снижение эффективной силы кулонова трения при неоднородных колебаниях в соответствии с зависимостью $P = P_0\Phi(w)$, где P_0 – сила трения при моногармоническом режиме ($w \rightarrow \infty$).

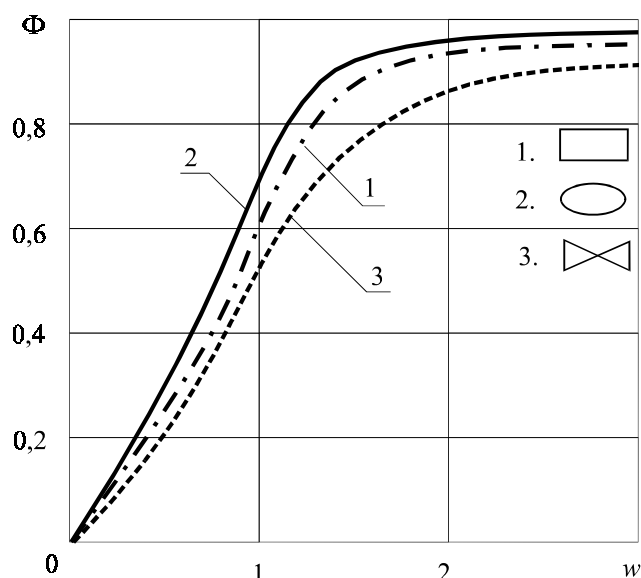


Рис. 1. Графики $\Phi(w)$

Аналитические зависимости $\Phi(w)$ для $\omega \ll k$ и $\omega \gg k$ приведены в работах [1], [2], [3]. Как следует из графиков, форма петли гистерезиса так же, как и при моногармонических режимах, проявляется слабо, что позволяет пользоваться этими результатами, когда отсутствуют достоверные сведения по данному вопросу. При $\omega \rightarrow \infty$ имеем $\Phi \rightarrow 1$ и $\chi \rightarrow 1$.

Согласно вышеизложенному, функцию $\chi(w)$ можно квалифицировать как коэффициент возрастания резонансных амплитуд. Для практических расчетов необходимо найти $\chi(w_0)$, где $w_0 = A_{\Omega}^0 / (A_{\omega} z)$. При этом $w = \chi w_0$, и следовательно, $\chi \Phi(\chi w_0) = 1$. На рис. 2 представлены усредненные характеристики $\chi(w)$ и $\chi(w_0)$ (кривые 1, 3). Кроме того, приведены характеристики (кривые 2, 4), полученные по аппроксимирующим зависимостям

$$\chi = 1 + \xi_1 / w, \quad \chi = 1 + \xi_2 / w_0, \quad (15)$$

где $\xi_1 = 1,5$; $\xi_2 = 0,5$.

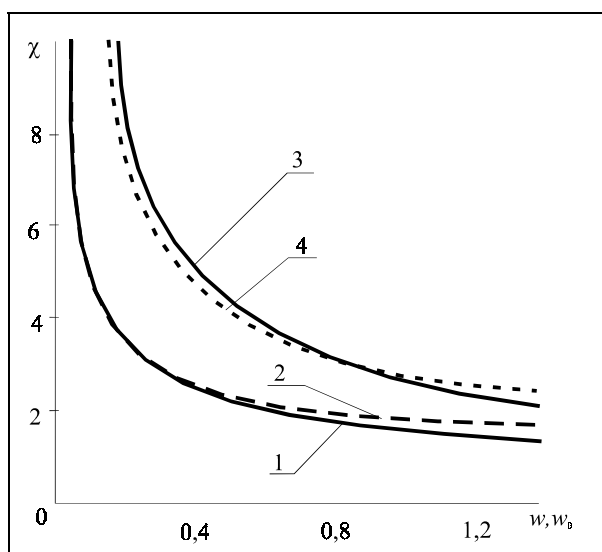


Рис. 2. Графики коэффициентов возрастания резонансных амплитуд

Для проверки полученных аналитических зависимостей был проведен численный эксперимент, результаты которого представлены на рис. 3, на котором сопоставлены результаты моделирования в линейной (рис. 3, а) и нелинейной (рис. 3, б) постановке задачи. В последнем случае диссипация была введена следующим образом

$$\delta = \begin{cases} 0, & \text{если } \text{sign } \dot{q}_k = \text{sign}(\dot{q}_k + \dot{q}_\omega); \\ 0,05, & \text{если } \text{sign } \dot{q}_k \neq \text{sign}(\dot{q}_k + \dot{q}_\omega), \end{cases} \quad (16)$$

где $\dot{q}_k, \dot{q}_\omega$ - виброскорости на резонансной и нерезонансной частотах.

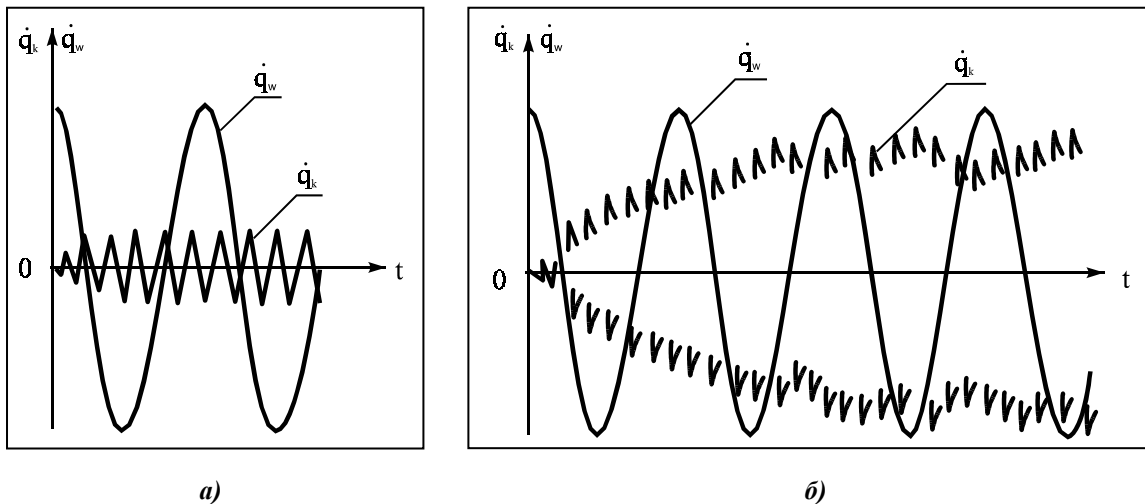


Рис. 3. Сопоставление результатов численного моделирования при линейной и нелинейной постановке задачи

Сопоставление этих двух графиков наглядно свидетельствует о возрастании резонансной амплитуды при учете нелинейного характера диссипативных сил и хорошем совпадении с аналитическими результатами. Таким образом, принцип суперпозиции, свойственный линейным системам, при бигармонических колебаниях может привести к значительным ошибкам. Аналогичные выводы были также получены на основании анализа экспериментальных данных [8].

В работе [2] качественно близкие выводы получены при анализе полигармонических режимов.

Влияние высокочастотных возмущений на условия параметрического возбуждения

Существенное снижение эффективных параметров диссипации может сказаться на критическом уровне диссипации, обеспечивающем динамическую устойчивость в зонах параметрических резонансов [3. 4] В частности, для подавления главного параметрического резонанса должно соблюдаться условие $\psi > \pi \varepsilon$, где ε - глубина пульсации. При наличии "несущей" нерезонансной частоты коэффициент рассеяния, как уже отмечалось, может уменьшиться; при этом условие динамической устойчивости примет вид

$$\psi_0 \Phi(\omega) \geq \pi \varepsilon, \quad (17)$$

где ψ_0 отвечает $\zeta = 1$, то есть моногармоническому режиму.

Пусть при некотором амплитудном уровне условие (17) оказалось нарушенным. Тогда амплитуда параметрических колебаний начнет возрастать, что будет сопровождаться одновременным ростом отношения виброскоростей w . Однако при этом увеличивается функция $\Phi(w)$ (см. выше), а следовательно, возникают предпосылки для восстановления условия (17). Таким образом, учет нелинейности системы может привести к параметрическим колебаниям с ограниченной резонансной амплитудой, в то время как в линейной постановке колебания либо затухают, либо неограниченно возрастают. Остановимся на количественной оценке амплитудного уровня при параметрическом резонансе с учетом исследуемого нелинейного эффекта. Обратимся к дифференциальному уравнению

$$a\ddot{q} + c_0\dot{q} = \mu(\varepsilon c_0 q \sin \omega_1 t - b\dot{q} - |P| \text{sign} \dot{q}) + F_0 \sin \omega_2 t, \quad (18)$$

где a, c_0 – инерционный и квазиупругий коэффициенты;

$$b = \psi c_0 / (2\pi k_0);$$

$$k_0 = \sqrt{c_0 / a};$$

$|P|$ – сила кулонова трения;

ε – глубина пульсации;

ω_1, ω_2 – частоты параметрического и силового возбуждения;

μ – малый параметр.

Исследуем поведение системы в зоне основного параметрического резонанса $\omega_1 = 2k_0$. Изменение энергии за период колебаний $\tau = 2\pi / k_0$ определяется как

$$\Delta E = \int_0^\tau Q \dot{q} dt = \Delta E_+ - \Delta E_-, \quad (19)$$

где $\Delta E_+ = 0,5\pi\varepsilon c_0 A_k^2$ – вносимая энергия;

$\Delta E_- = 0,5\psi c_0 A_k^2 + 4|P|A_k$ – отводимая энергия;

A_k – амплитуда колебаний, отвечающая «собственной» частоте k .

Пусть $\omega_2 \gg k_0$. Тогда, принимая во внимание, что $\psi = \psi_0 \Phi(w)$ и $P = P_0 \Phi(w)$ при учете (14), (15) получаем

$$\Delta E_- = \frac{w}{w + \xi_1} (\psi_0 A_k - 8 \frac{|P_0|}{c_0}). \quad (20)$$

Здесь $w = A_k k_0 / (A_\omega \omega_2) = A_k / (A_\omega z)$;

A_ω – амплитуда вынужденных колебаний;

$z = \omega_2 / k_0$.

Устойчивому режиму отвечает $\Delta E < 0$. При этом на основании (19), (20)

$$A_k (\psi_0 - \pi\varepsilon) + 8 \frac{|P_0|}{c_0} - \xi_1 \varepsilon z A_\omega > 0. \quad (21)$$

При отсутствии силового возмущения ($A_\omega = 0$) и силы трения ($P_0 = 0$) на основании формулы (21) получаем известное условие устойчивости нулевого решения $\psi_0 > \pi\varepsilon$. При $\psi_0 < \pi\varepsilon$, $P_0 \neq 0$, $A_\omega = 0$ для затухания возбуждаемых параметрических колебаний необходимо

$$A_k < \frac{8|P_0|}{c_0(\pi\varepsilon - \psi_0)}, \quad (22)$$

что свидетельствует о возможности жесткого возбуждения в случае нарушения этого условия.

Далее учтем влияние высокочастотного силового возмущения ($A_\omega \neq 0$). Тогда на основании (21) получаем при $\psi_0 - \pi\varepsilon > 0$

$$A_k \geq A_k^* = \frac{\xi_2 \varepsilon z A_\omega - 8|P_0|/c_0}{\psi_0 - \pi\varepsilon}. \quad (23)$$

Формула (23) свидетельствует о возможности асинхронного возбуждения параметрических колебаний конечной амплитуды, т.е. появления устойчивого предельного цикла. Действительно, при $A_k > A_k^*$ колебания затухают, а при $A_k < A_k^*$ имеет место раскачка. Таким образом, $A_k = A_k^*$ соответствует устойчивому колебательному режиму на границе области динамической устойчивости. За счет силы сухого трения амплитуда A_k^* может быть сведена к нулю ($\xi_2 \varepsilon z A_\omega \leq 8|P_0|/c_0$); в этом случае нулевое решение оказывается устойчивым. Наконец, при $\psi_0 = 0$

$$A_k < \pi^{-1} [8|P_0|/(\varepsilon c_0) - \xi_1 z A_\omega]. \quad (24)$$

При $8|P_0|/(\varepsilon c_0) - \xi_1 z A_\omega \leq 0$ это условие не может быть соблюдено, что свидетельствует о неустойчивости решения независимо от амплитудного уровня A_k . Наблюдаемая при этом полная аналогия со случаем эквивалентного линейного сопротивления ($\psi_0 = 0$, $|P_0| = 0$) связана с известным эффектом вибрационной линеаризации сил сухого трения.

Переменность параметров также существенно проявляется в дестабилизирующей роли сухого трения в нерезонансных режимах [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вульфсон И.И. Определение приведенных значений параметров диссипации при бигармонических колебаниях. // Вибротехника. – 1968. №3(5). – с. 33-41.
2. Вульфсон И.И. Учет нелинейных диссипативных сил при полигармонических колебаниях элементов машин. // Вибротехника. – 1981. №4(38). – с. 63-70.
3. Вульфсон И.И. Влияние высокочастотных воздействий на условия параметрического возбуждения механизмов. // Машиноведение. – 1977. №5 – с. 35-41.
4. Вульфсон И.И. Колебания машин с механизмами циклового действия. – Л.: Машиностроение, 1990. – 309 с.
5. Dresig H., Vulfson J.I. Zur Dämpfungstheorie bei nichtharmonischer Belastung // Dämpfung und Nichtlinearität. – Dusseldorf: VDI-Verlag, 1993. s.141-156.
6. Вульфсон И.И. Нелинейные колебания в цикловых механизмах, вызванные нестационарными силами трения в кинематических парах // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 1999. №4 – с. 26-33.
7. Блехман И.И. Вибрационная механика. – М.: Физматлит, 1994. – 400 с.
8. Ottl D. Nichtlineare Dämpfung in Raumfahrstrukturen. Sammlung un Auswertung von experementellen Ergebnissen // Fortschritt-Berichte VDI. Reihe 11, №73. – Dusseldorf: K.PI-Verlag, 1985.