

ОБ УПРАВЛЕНИИ ДВИЖЕНИЕМ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЛАТФОРМЫ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ ПОДВИЖНОСТИ

Механизмы, известные как механизмы с параллельной структурой, имеют ряд преимуществ по сравнению с традиционными механизмами промышленных роботов. Замкнутая кинематическая цепь обеспечивает более высокую жесткость всей конструкции и меньшую нагрузку на каждый привод, что приводит к повышению точности позиционирования машины.

Существует, однако, важная особенность механизмов с замкнутой кинематической цепью – существование у таких механизмов особых положений. Эту особенность необходимо учитывать при выборе законов управления машинами с такого рода механизмами.

Одноподвижные механизмы, как правило, проектируются таким образом, что особые положения в них не возникают. Для многоподвижных механизмов это не всегда возможно. Поскольку приближение к особому положению приводит к целому ряду негативных последствий, алгоритмы управления машинами с замкнутой кинематической цепью механизма должны предусматривать необходимость обхода особых положений. Таким образом, оценка качества конфигурации механизма как степени его близости к особому положению представляет собой насущную необходимость.

Рассмотрим машину типа платформы Стюарта (рис. 1), оборудованную восемью опорами («ногами»). Каждая опора присоединена к стойке сферической кинематической пары с пальцем, исключаяющим вращение опоры вокруг своей оси. Точки A_i ; $i=1, \dots, 8$ – центры этих сферических пар.

К платформе 1 каждая опора присоединена трехподвижной сферической кинематической парой, центр которой находится в точке B_i ; $i=1, \dots, 8$. Опора состоит из двух соосных стержней, соединенных поступательной кинематической парой. Каждая поступательная пара может быть связана передаточным механизмом со своим двигателем. В дальнейшем будем предполагать, что с двигателями связаны поступательные пары в шести активных опорах. Оставшиеся две опоры являются пассивными и их поступательные пары с двигателями не связаны. Система управления платформой допускает переключение опор из активного состояния в пассивное и обратно в любой момент времени.

В качестве обобщенных координат платформы q_s ; $s=1, \dots, 6$ могут рассматриваться расстояния между точками A_s и B_s в активных опорах. Пассивные опоры представляют собой пространственные двухзвенные группы Ассур, т.е. кинематические цепи с нулевой подвижностью, не изменяющие числа степеней подвижности механизма. Кинематическая схема платформы изображена на рис. 1.

Выходными координатами платформы являются координаты точки P – полюса платформы, эйлеровы углы ориентации платформы и длины двух пассивных опор, т.е. расстояния между точками A_i и B_i , соответствующими пассивным опорам.

Введем следующие обозначения:

$r_0 = (x_0 \ y_0 \ z_0)^T$ – столбец координат полюса платформы в неподвижной системе отсчета;

$\Gamma = (\psi \ \vartheta \ \varphi)^T$ – столбец эйлеровых углов ориентации платформы;

$r_{Ai} = (x_{Ai} \ y_{Ai} \ z_{Ai})^T$ – столбец координат точек A_i в неподвижной системе отсчета;

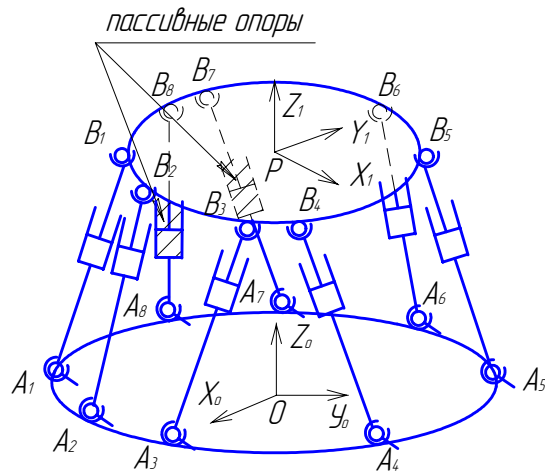


Рис. 1. Кинематическая схема платформы

$r_{Bi} = (x_{Bi} \quad y_{Bi} \quad z_{Bi})^T$ – столбец координат точек B_i в подвижной системе координат, связанной с платформой;

$$A_{0,1} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \vartheta & -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \cos \vartheta & \sin \psi \sin \vartheta \\ \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \vartheta & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \vartheta & -\cos \psi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta & \cos \varphi \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix}$$

– матрица направляющих косинусов осей платформы относительно осей неподвижной системы координат.

С учетом сделанных обозначений уравнения геометрии платформы запишутся в форме:

$$\Psi_s(Z, q) = r_0^T r_0 + r_{Bs}^T r_{Bs} + r_{As}^T r_{As} + 2r_0^T A_{0,1} r_{Bs} - 2r_0^T r_{As} - 2r_{As} A_{0,1} r_{Bs} - q_s^2 = 0; \quad s \in S, \quad (1)$$

$$\Theta_k(Z, l_k) = (r_0^T r_0 + r_{Bk}^T r_{Bk} + r_{Ak}^T r_{Ak} + 2r_0^T A_{0,1} r_{Bk} - 2r_0^T r_{Ak} - 2r_{Ak} A_{0,1} r_{Bk})^{\frac{1}{2}} - l_k = 0; \quad k \in \bar{S}. \quad (2)$$

Здесь $Z = \begin{bmatrix} r_0 \\ \Gamma \end{bmatrix}$, S – множество номеров активных опор, а \bar{S} – множество номеров пассивных опор.

Введем матрицы-столбцы Ψ с элементами $\Psi_s; s \in S$, Θ с элементами $\Theta_k; k \in \bar{S}$ и l с элементами $l_k; k \in \bar{S}$. Матрица Якоби системы уравнений геометрического анализа платформы может быть записана в виде

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial Z} & \frac{\partial \Psi}{\partial l} \\ \frac{\partial \Theta}{\partial Z} & \frac{\partial \Theta}{\partial l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial Z} & 0 \\ \frac{\partial \Theta}{\partial Z} & -E \end{bmatrix}, \quad \text{здесь } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ – единичная матрица.}$$

Таким образом, якобиан системы уравнений определяется из соотношения

$$\det H = \left| \frac{\partial \Psi}{\partial Z} \right|.$$

Заметим, что состав вектора Ψ меняется при изменении состава активных опор, поэтому каждому набору активных опор соответствуют свои особые положения. Поскольку все опоры равноправны, в качестве критерия качества положения механизма может быть принят модуль якобиана $|\det H|$. Тогда в каждом положении следует выбирать такой набор активных опор, которому соответствует наибольшее значение модуля этого определителя.

Предположим теперь, что к платформе приложена внешняя нагрузка, заданная в форме главного вектора \mathbf{F} и главного момента относительно центра масс \mathbf{M} с проекциями на оси неподвижной системы координат F_x, F_y, F_z и M_x, M_y, M_z соответственно. Для простоты будем считать, что центр масс платформы совпадает с началом подвижной системы координат.

$$P = (F_x \quad F_y \quad F_z \quad M_x \quad M_y \quad M_z)^T.$$

Внешние силы и моменты, приложенные к опорам, будем считать пренебрежимо малыми. Предполагая связи, наложенные на движение звеньев системы, идеальными и обозначая столбец обобщенных уравновешивающих сил через Q , имеем

$$P^T \cdot \delta Z^* + Q^T \cdot \delta q = 0, \quad (3)$$

причем $\delta Z^* = \begin{bmatrix} \delta r_0 \\ \delta \Gamma^* \end{bmatrix}$, где δr_0 – столбец возможных изменений координат точки

P , а $\delta \Gamma^*$ – столбец проекций на оси неподвижной системы координат вектора малого поворота платформы при возможном изменении углов Эйлера $\delta \Gamma = (\delta \psi \quad \delta \nu \quad \delta \varphi)^T$. Нетрудно показать, что $\delta \Gamma^* = B(\Gamma) \cdot \delta \Gamma$, причем матрица

$$B(\Gamma) = \begin{bmatrix} 0 & \cos \psi & \sin \psi \sin \vartheta \\ 0 & \sin \psi & -\cos \psi \sin \vartheta \\ 1 & 0 & \cos \vartheta \end{bmatrix}.$$

Введя матрицу $G(\Gamma) = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & B(\Gamma) \end{bmatrix}$, где E – единичная матрица, получаем:

$$\delta Z^* = G(\Gamma) \cdot \delta Z, \text{ а } \delta Z = \begin{bmatrix} \delta r_0 \\ \delta \Gamma \end{bmatrix}.$$

Поскольку система уравнений (1) справедлива при всех возможных значениях переменных q и Z ,

$$\delta \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial Z} \cdot \delta Z + \frac{\partial \Psi}{\partial q} \delta q = 0, \quad (4)$$

откуда

$$\delta Z = - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial Z} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial \Psi}{\partial q} \right) \cdot \delta q \quad (5)$$

В силу произвольности вариаций обобщенных координат из соотношения (3) получаем

$$Q = \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial Z} \right)^{-1} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial q} \right]^T G(\Gamma)^T \cdot P \quad (6)$$

Из равенства (6) нетрудно видеть, что при произвольной нагрузке с приближением механизма к особому положению норма столбца обобщенных движущих сил неограниченно возрастает. Таким образом, эта норма может характеризовать степень близости механизма к особому положению. В качестве нормы можно предложить, например, сумму квадратов обобщенных движущих сил. В этом случае при каждом выборе шести активных опор из восьми возможных выбираются такие опоры, которым в заданном положении соответствует наименьшая сумма квадратов движущих моментов. Полагая

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial Z} \right)^{-1} = \frac{1}{\Delta} \tilde{\Psi}', \quad (7)$$

где $\Delta = \det \left(\frac{\partial \Psi}{\partial Z} \right)$, а $\tilde{\Psi}'$ – матрица, присоединенная к якобиевой, получим для этого критерия

$$Q^T Q = \frac{1}{\Delta^2} P^T G(\Gamma) \left(\tilde{\Psi}' \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial q} \right) \left(\tilde{\Psi}' \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial q} \right)^T G(\Gamma)^T P \quad (8)$$

Предположим теперь, что приводы активных опор являются упругими с жесткостью c , в то время как приводы пассивных опор имеют нулевую жесткость. Полагая массу платформы равной M , а ее тензор инерции в собственных осях заданным матрицей J , определим собственные частоты малых колебаний платформы в окрестности положения равновесия при заторможенных активных приводах, пренебрегая массами опор. Будем считать, что столбец q есть набор обобщенных координат, соответствующих положениям заторможенных валов двигателей, а $\eta = (\eta_1 \ \eta_2 \ \eta_3 \ \eta_4 \ \eta_5 \ \eta_6)^T$ – столбец изменений обобщенных координат за счет деформации приводов. В этих обозначениях обобщенная сила упругости Q_y :

$$Q_y = -(c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2 + c_3 \eta_3 + c_4 \eta_4 + c_5 \eta_5 + c_6 \eta_6) = -C \eta,$$

где C – диагональная матрица жесткостей активных приводов. Из условия равенства возможных работ получаем

$$-C \eta = \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial Z} \right)^{-1} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial q} \right]^T G(\Gamma)^T \cdot P.$$

Здесь $P = (\Phi_x \ \Phi_y \ \Phi_z \ M_x^\Phi \ M_y^\Phi \ M_z^\Phi)^T$ – столбец сил и моментов сил инерции платформы при малых свободных колебаниях.

Столбец проекций вектора сил инерции на оси неподвижной системы координат может быть представлен в форме $\Phi = -m\ddot{r}_0$, а столбец проекций главного момента сил инерции на оси неподвижной системы координат – в форме $M_\Phi = -A_{0,1}JA_{0,1}^TB(\Gamma)\ddot{\Gamma}$. Таким образом, имеем

$$P = -\begin{bmatrix} mE & 0 \\ 0 & A_{0,1}JA_{0,1}^TB(\Gamma) \end{bmatrix} \cdot \ddot{Z} = -W(\Gamma) \cdot \ddot{Z}, \quad W(\Gamma) = \begin{bmatrix} mE & 0 \\ 0 & A_{0,1}JA_{0,1}^TB(\Gamma) \end{bmatrix}$$

Заметим, что $\dot{Z} = -\left(\frac{\partial\Psi}{\partial Z}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial\Psi}{\partial q}\right)\dot{\eta}$, причем в силу малости колебаний

$$\ddot{Z} = -\left(\frac{\partial\Psi}{\partial Z}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial\Psi}{\partial q}\right)\ddot{\eta}.$$

Обозначая произведение матриц

$$U(\Gamma) = G^T(\Gamma) \cdot W(\Gamma) = \begin{bmatrix} mE & 0 \\ 0 & B^T(\Gamma)A_{0,1}JA_{0,1}^TB(\Gamma) \end{bmatrix},$$

где J – матрица составляющих тензора инерции платформы в собственных осях, получаем уравнение малых свободных колебаний в форме:

$$C\eta + \frac{1}{\Delta^2} \left(\tilde{\Psi}' \cdot \frac{\partial\Psi}{\partial q} \right)^T \cdot U(\Gamma) \cdot \left(\tilde{\Psi}' \cdot \frac{\partial\Psi}{\partial q} \right) \ddot{\eta} = 0.$$

Легко убедиться в том, что при стремлении якобиана $\Delta = \det(\partial\Psi/\partial Z)$ к нулю коэффициент при $\ddot{\eta}$ неограниченно растет, что приводит к уменьшению низшей собственной частоты. В особом положении низшая собственная частота системы, описанной выше, обращается в нуль.

В качестве примера рассмотрена платформа со следующими характеристиками:

Масса платформы $m=10$ кг, осевые моменты инерции платформы $J_x=1$ кгм², $J_y=1$ кгм², $J_z=1$ кгм². Все жесткости приводов c считаются одинаковыми и равными 10^4 Н/м. Точки A_i расположены на окружности радиуса $2m$ с центром в начале координат под углами $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ, 215^\circ, 270^\circ, 315^\circ$ к оси Ox . Точки B_i находятся на окружности радиуса $1,6$ м с центром в начале подвижной системы координат под углами $0^\circ, 25^\circ, 100^\circ, 125^\circ, 190^\circ, 215^\circ, 280^\circ, 305^\circ$ к оси Px_1 .

В начальный момент $t=0$ начала подвижной и неподвижной систем координат совпадают, и углы Эйлера равны 0 . В конечный момент $t_T=15$ с координаты полюса платформы $x_p=-1$ м, $y_p=1$ м, $z_p=1$ м, а углы Эйлера $\psi=-40^\circ$, $\nu=40^\circ$, $\varphi=30^\circ$, причем все параметры изменяются равномерно.

Вся траектория платформы была разделена на 1000 шагов, и на каждом шаге вычислялись три критерия: якобиан системы уравнений Δ , сумма квадратов движущих моментов $Q_o^T Q_o$ и низшая собственная частота. После этого выбирался наилучший с точки зрения каждого критерия набор b активных ног из 28 вариантов.

Результаты расчетов приведены на графиках. На рис. 2 приведен график изменения якобиана, на рис. 3 показан график изменения суммы квадратов движущих сил, а на рис.4 – график изменения величины, обратной низшей собственной частоте. На рис.5 сплошной линией указана циклограмма работы 6-й, 7-й и 8-й ноги. Видно, что

переключения ног по всем критериям происходят в одни и те же моменты времени. Восьмая нога всегда пассивна, а шестая и седьмая ноги меняют свое состояние в моменты резкого изменения значений критериев.

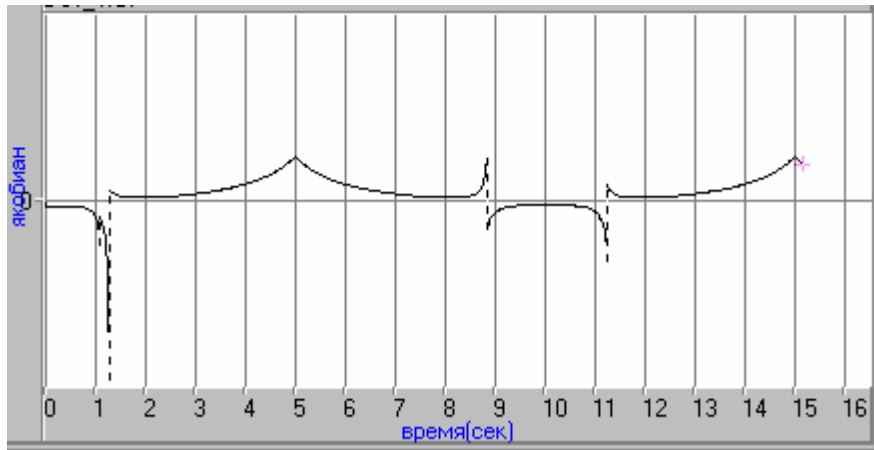


Рис. 2. Изменение якобиана при движении платформы

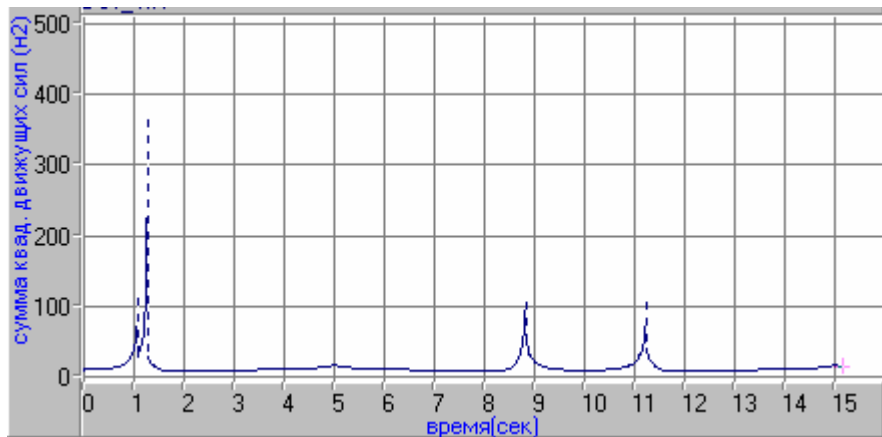


Рис.3. Изменение суммы квадратов обобщенных движущих сил

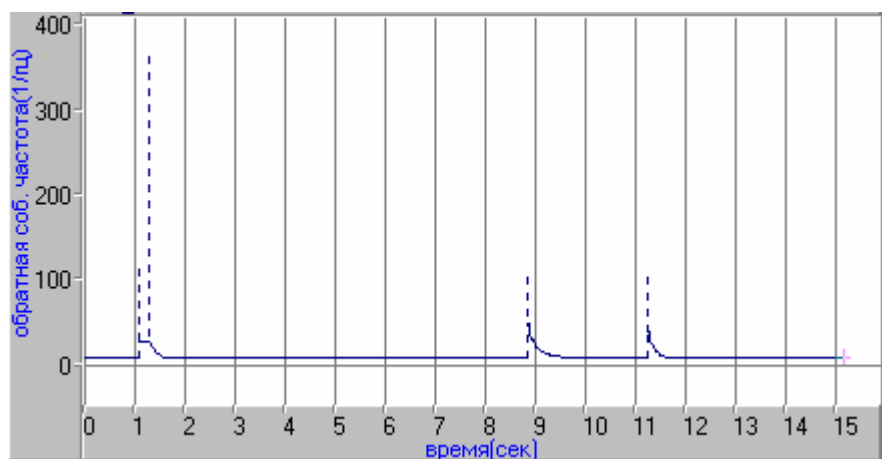


Рис.4. Изменение величины, обратной нижней собственной частоте системы

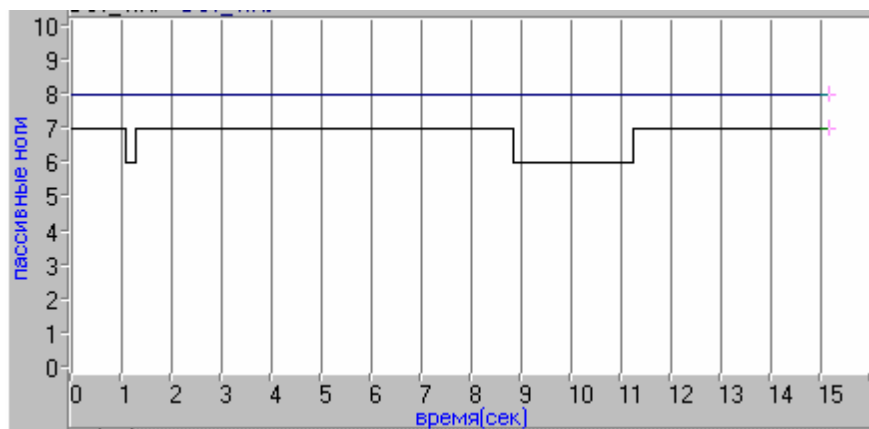


Рис.5. Изменение состава пассивных ног

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Коловский М. З., Слоущ А. В.** Об управлении движением замкнутых рычажных механизмов с избыточными входами. Труды 2 летней школы «Нелинейные колебания-97». Институт проблем машиноведения РАН, 1998.
2. **Коловский М. З., Петров Г. Н., Слоущ А. В.** Об определении собственных частот позиционирующей платформы с упругими приводами. Проблемы машиностроения и надежности машин, 1999, № 5, стр 27-30
3. **Коловский М. З., Петров Г. Н., Слоущ А. В.** Об управлении движением замкнутых рычажных механизмов с несколькими степенями свободы. Проблемы машиностроения и надежности машин, 2000, №4.