

О НЕКОТОРЫХ НАПРАВЛЕНИЯХ МОДЕРНИЗАЦИИ КУРСА ТММ¹

I. Введение

Потребность в модернизации разделов, посвященных методам структурного, геометрического, кинематического и динамического анализа механизмов, обусловливалась следующими обстоятельствами.

- a) В последние десятилетия существенно расширилось многообразие механизмов, используемых в машинах различного назначения. В первую очередь, речь идет о появлении широкого класса многодвигательных машин, в которых используются механизмы с несколькими степенями подвижности. К существовавшим ранее подъемно-транспортным машинам добавились манипуляторы и роботы, всевозможные позиционирующие платформы, станки с программным управлением. Все большее распространение получают технологические машины, в которых согласование программных движений рабочих органов обеспечивается независимыми приводами, движения которых согласовывается системами управления.
- b) Повышаются требования к точности механизмов, к уровням динамических ошибок программных движений, к виброактивности машин. Для выполнения этих требований необходимо развивать методы динамического анализа механизмов, усложнять их динамические модели, переходить к моделям, учитывающим упругость звеньев. В связи с этим становится необходимым введение в курс ТММ разделов «Механизмы с упругими звеньями» и «Колебания в машинах».
- c) Возможность широкого использования ЭВМ в учебном процессе и при проведении инженерных расчетов привела к коренным изменениям методов анализа механизмов. Появилась возможность усложнения расчетных схем, всестороннего анализа сложных пространственных механизмов, учета сил трения в кинематических парах и т.п.

Модернизация курса теории механизмов и машин проводилась в последнее десятилетие различными кафедрами ТММ и прикладной механики российских вузов. Особое значение имела модернизация курса, проводившаяся в МВТУ им. Н.Э.Баумана и получившая отражение в учебнике «Теория механизмов и машин» под редакцией академика К.В.Фролова. Изложение новых разделов курса, например, теории виброактивности машин и их виброзащиты, имело первостепенное значение и способствовало успеху учебника.

Модернизация курса ТММ, проводившаяся в СПбГПУ, получила несколько иное направление. Нам представляется полезным обобщить основные результаты модернизации, что мы и попытались сделать в этом методическом материале. Он, конечно, не претендует на полное изложение модернизированного курса. Основное внимание в нем уделяется новым понятиям и новым методам, представляющимся нам наиболее интересными и перспективными.

В настоящее время в связи с организацией в СПбГТУ магистерской подготовки по программе «Теория механизмов и машин» модернизация учебного курса ТММ стала особенно актуальной.

¹ В сокращенном виде настоящая работа была доложена на заседании научно-методического совета по теории механизмов и машин 20 апреля 2000 года.

Модернизация курса сопровождалась разработкой компьютерных программ для структурного, геометрического, кинематического и динамического анализа механизмов и их синтеза¹.

II. Структурный анализ механизмов

1. Структурный анализ обычно рассматривается как способ классификации механизмов и их описания. Вместе с тем, он является основой методов их последующего анализа, основой алгоритмов кинематического и силового расчетов. Эта сторона структурного анализа становится теперь особенно важной, поскольку она связана с представлением механизма в форме, удобной для введения в ЭВМ. Развитие структурного анализа привело к ряду существенных изменений в системе понятий, относящихся к структуре. Современные механизмы с многими степенями подвижности, с внутренними входами выходят за рамки традиционных ассуровских представлений и требуют некоторой модернизации структурных описаний.
2. В основе новых структурных представлений лежит следующее определение структурной группы.
Структурной группой называется кинематическая цепь с заданным расположением входов, в которой число входов совпадает с числом степеней подвижности. При этом звенья цепи предполагаются жесткими, а при определении числа степеней подвижности учитываются внутренние и внешние входы кинематической цепи, связи, накладываемые как внутренними, так и внешними кинематическими парами. Вводится понятие *простейшей* структурной группы, как такой, которая не может быть разделена на несколько более простых групп. Если число степеней подвижности и число входов равны нулю, то структурная группа является обычной группой Ассура.
3. При присоединении структурных групп последовательно к стойке на каждом этапе образуется механизм, в котором число степеней подвижности w равно числу входов n ; такой механизм называется *нормальным*. Введенное понятие структурной группы позволяет описать структуру любого нормального механизма; тем самым формируется расчетная модель механизма, пригодная для его геометрического, кинематического и динамического анализа, поскольку все этапы анализа могут проводиться последовательно для каждой структурной группы отдельно. Становится возможным описание механизма *структурным графом*, вершинами которого являются структурные группы, а ребрами – кинематические пары, их соединяющие.
Развиваются и методы структурного анализа на основе представления механизма графом, в котором вершинами являются звенья, а ребрами – кинематические пары.
4. Особо рассматриваются *механизмы с избыточными связями*. При этом в процессе структурного анализа осуществляется разделение всех связей, создаваемых кинематическими парами, на две группы. Связь, устранение которой не изменяет числа степеней подвижности механизма, называется *неосвобождающей*, а связь, устранение которой приводит к увеличению числа степеней подвижности на единицу – *освобождающей*. Такое разделение оказывается

¹ Одна из таких программ описана в работе: **Евграфов А.Н.** Программа расчета динамики однодвигательной машины // Теория механизмов и машин, вып. 1, 2003. с.83-91.

полезным, например, при силовом анализе. Обнаруживается, что в статически определимом механизме (с избыточными связями) реакции освобождающих связей могут быть определены, а реакции неосвобождающих связей определить невозможно.

5. Вводится понятие *структурного преобразования* механизмов. Под этим понимается условное изменение расположения входов. Целью структурного преобразования является обычно упрощение структуры механизма. Если преобразованный механизм разделяется на более простые структурные группы (с меньшим числом звеньев), то упрощается его анализ. В механизмах с несколькими степенями подвижности часто оказывается полезным *инверсное преобразование*, при котором выходные координаты механизма становятся входными, а входные – выходными. Инверсное преобразование особенно удобно для решения *обратных задач анализа*, геометрической и кинематической.

III. Методы геометрического анализа механизмов

1. Задача геометрического анализа – изучение функций положения механизма, которые для рычажных механизмов могут быть представлены в форме (1), где q_1, \dots, q_n – обобщенные входные координаты, $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ – параметры механизма.

$$x_k = \Pi_k(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m), k=1, \dots, N \quad (1)$$

Для механизмов с высшими парами функции положения зависят также от уравнений сопряженных поверхностей; этот случай будет далее рассмотрен особо. Непосредственная задача геометрического анализа – выявление зависимостей Π_k от q_s ; зависимость Π_k от α_i исследуется при геометрическом синтезе, а также при анализе точности механизма. В ряде случаев требуется решить обратную геометрическую задачу: при $N = n$ определить зависимость q_s от x_k . Такая задача возникает, например, при анализе механизмов роботов.

2. Геометрический анализ сопряжен с преодолением ряда проблем, связанных с нелинейностью уравнений (1) и, в большинстве случаев, с невозможностью их представления в явной форме. Функции (1) часто оказываются многозначными. В одних случаях (рис. 1) эта многозначность обусловлена существованием нескольких различных *сборок*; в других – существованием нескольких возможных положений для заданных значений обобщенных координат (рис. 2). В последнем случае переход от одного из возможных положений в другое сопровождается прохождением через *особое положение* механизма, что, как правило, является нежелательным. В этой связи возникает задача анализа особых положений и определения условий однозначности решения геометрической задачи.

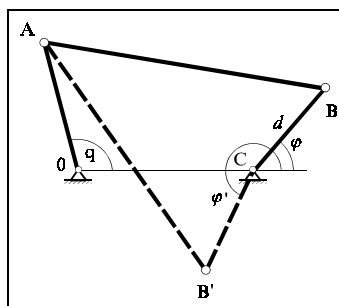


Рис. 1. Две сборки механизма: OABC и OAB'C

3. Для решения задач геометрического анализа рычажных механизмов предлагается следующий алгоритм.

- а) Геометрический анализ производится последовательно для каждой из структурной групп, начиная от стойки. Каждая последующая группа может присоединяться как к стойке, так и к любой из предыдущих групп в соответствии со структурной схемой механизма. Обратная задача решается аналогично, но для механизма инверсной структуры.

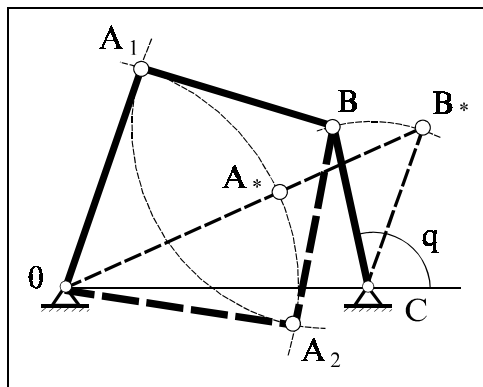


Рис. 2. Два положения звеньев OA и AB при одном значении обобщенной координаты q . OA^*B^*C – особое положение механизма

- б) Для каждой группы вводятся входные и выходные координаты. Входными являются обобщенные координаты q_s механизма, попавшие в данную группу, и координаты, определяющие положение кинематических пар предыдущих групп, к которым присоединяется рассматриваемая группа. Выходными координатами являются координаты, определяющие положение кинематических пар, к которым присоединяются последующие группы, а также выходные координаты механизма.
- в) Задание входных координат группы не определяет однозначно значения ее выходных координат. Чтобы устранить эту неоднозначность, вводятся дополнительные «групповые» координаты и составляются уравнения, связывающие групповые координаты с входными и выходными. С этой целью в рассматриваемой группе размыкаются некоторые кинематические пары с тем, чтобы эта группа приобрела структуру «дерева». Далее вводятся координаты, определяющие положение каждого последующего звена по отношению к предыдущему. Среди них могут оказаться входные координаты механизма; все остальные будут групповыми координатами. При этом число вводимых групповых координат всегда равно числу разомкнутых связей. Условия замыкания, составленные для всех разомкнутых связей, образуют «групповые уравнения», решение которых и приводит к решению задачи геометрического анализа.

4. Осуществление этого алгоритма иллюстрируется на примере плоского механизма с тремя степенями подвижности (рис. 3) с входными координатами q_1 , q_2 , q_3 . Он состоит из двух однозвенных одноподвижных групп I и II, присоединяемых к стойке (рис. 4), и трехзвенной одноподвижной группы III. Входные и выходные координаты для каждой из групп представлены в таблице. При этом выходными координатами всего механизма являются x_M , y_M , φ , определяющие положение «платформы» BC, позиционируемой тремя приводами. Уравнения (2) связывают входные и выходные координаты групп I и II; поскольку эти группы имеют структуру дерева, нет необходимости вводить

групповые координаты.

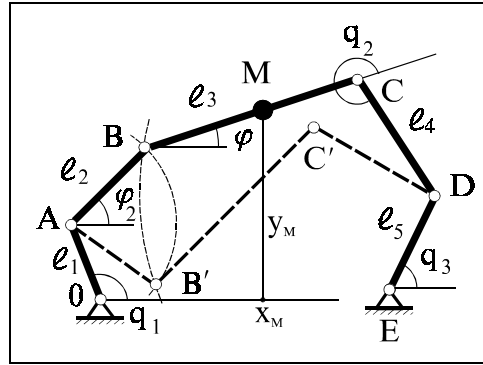


Рис. 3. Трехподвижный плоский механизм

Таблица

Входные и выходные координаты структурных групп

N группы	Входные координаты	Выходные координаты	Групповые координаты
I	x_0, y_0, q_1	x_A, y_A	-
II	x_E, y_E, q_3	x_D, y_D	-
III	x_A, y_A, x_D, y_D, q_2	x_M, y_M, φ	φ, φ_2

$$\begin{aligned}
 \text{I} \quad & x_A = x_0 + l_1 \cos q_1, & \text{II} \quad & x_D = x_E + l_5 \cos q_3, \\
 & y_A = y_0 + l_1 \sin q_1. & & y_D = y_E + l_5 \sin q_3.
 \end{aligned} \tag{2}$$

В группе III, разомкнув шарнир D, получаем «дерево»; введя две групповые координаты φ_2 и φ (число их равно числу разомкнутых связей) и проецируя контур ABCD на оси x и y , получим групповые уравнения (3), связывающие групповые координаты φ_2 и φ с входными x_A, y_A, x_D, y_D, q_2 .

$$\begin{aligned}
 \text{III} \quad & l_2 \cos \varphi_2 + l_3 \cos \varphi + l_4 \cos(\varphi + q_2) - x_D + x_A = F_1(\varphi_2, \varphi) = 0, \\
 & l_2 \sin \varphi_2 + l_3 \sin \varphi + l_4 \sin(\varphi + q_2) - y_D + y_A = F_2(\varphi_2, \varphi) = 0.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Задача геометрического анализа свелась таким образом к решению системы тригонометрических уравнений. После их решения найдем x_M, y_M, φ из соотношений (4).

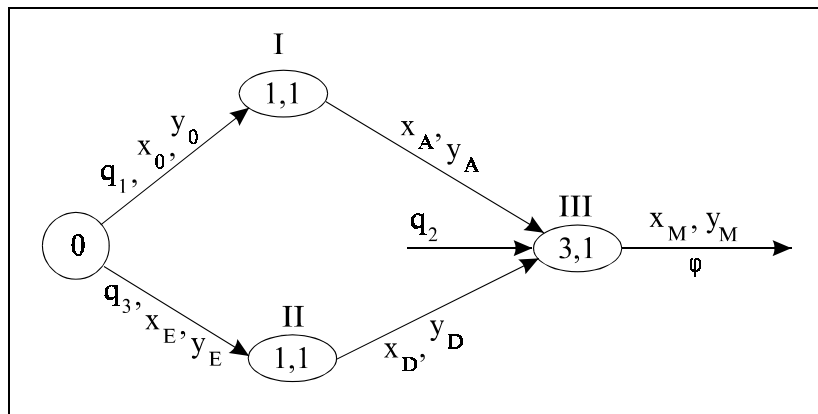


Рис. 4. Граф структуры механизма

$$x_M = \ell_2 \cos \varphi_2 + BM \cos \varphi + x_A, \quad y_M = \ell_2 \sin \varphi_2 + BM \sin \varphi + y_A, \quad \varphi = \varphi. \quad (4)$$

5. При заданных входных координатах уравнения (3) имеют два решения; второе показано на рис. 3 пунктиром. Решая их на ЭВМ, необходимо указать, какое из них является основным, а какое – побочным. Это можно сделать разными способами, задав те или иные геометрические критерии (например, знак векторного произведения $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}$). Существование нескольких решений групповых уравнений означает, что имеется особое положение, в котором оба эти решения совпадают. Из теории неявных функций следует, что в особом положении якобиан системы (3) обращается в нуль (условие (5)). В особом положении шарниры А, В, D лежат на одной прямой.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial F_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial F_2}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\ell_2 \sin \varphi_2 & -\ell_3 \sin \varphi - \ell_4 \sin(\varphi + q_2) \\ \ell_2 \cos \varphi_2 & \ell_3 \cos \varphi + \ell_4 \cos(\varphi + q_2) \end{vmatrix} = \\ = \ell_2 [\ell_3 \sin(\varphi - \varphi_2) - \ell_4 \sin(\varphi - \varphi_2 - q_2)] = 0 \quad (5)$$

6. В курсе ТММ должны даваться общие методы решения групповых уравнений. Естественно, что для плоских механизмов можно применять графические методы, не дающие, однако, высокой точности. Можно графически определить приближенные значения $\tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}$, а затем уточнить их, например, с помощью метода Ньютона. Введя обозначения (6), можно представить этот алгоритм в форме (7); его графическая интерпретация представлена на рис. 5.

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \bar{F}, \quad \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \varphi \end{pmatrix} = \bar{\varphi}, \quad \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ x_D \\ y_D \end{pmatrix} = \bar{\xi}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_2 \\ \tilde{\varphi} \end{pmatrix} = \bar{\varphi}_* \quad (6)$$

$$\Delta \bar{\varphi}^{(k+1)} = \Delta \bar{\varphi}^{(k)} - \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\varphi}} \right)_k^{-1} \cdot \bar{F}(\bar{\varphi}_* + \Delta \bar{\varphi}^{(k)}, \bar{\xi}, q_2) \\ \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\varphi}} \right)_k = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\varphi}}(\bar{\varphi}_* + \Delta \bar{\varphi}^{(k)}, \bar{\xi}, q_2) \quad (7)$$

Можно пользоваться также модифицированным методом Ньютона, при котором вместо $(\partial \bar{F} / \partial \bar{\varphi})_k$ в формулу (7) подставляется выражение (8).

$$\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\varphi}} \right)_* = \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\varphi}} \right)(\varphi_*, \bar{\xi}, q_2) \quad (8)$$

При геометрическом анализе решаются также *задача позиционирования и траекторная задача*. Задача позиционирования состоит в переводе механизма из заданного положения q_{s0} в заданное положение q_{sk} ($s=1, \dots, n$). В траекторной задаче задается последовательность положений $\bar{q}_0, \bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n$, через ко-

торые должен проходить механизм.

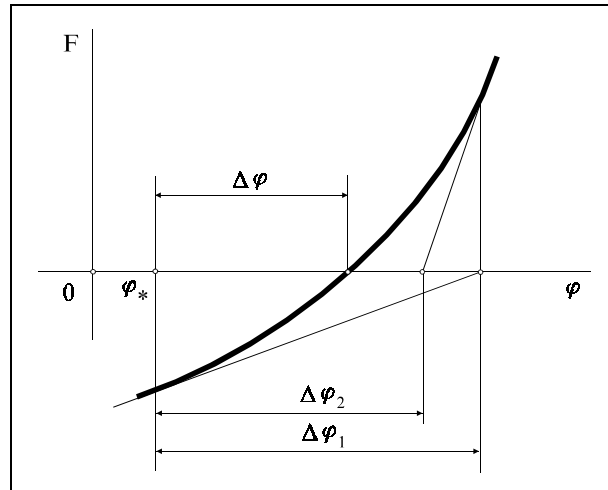


Рис. 5. Графическая интерпретация метода Ньютона

Обе задачи можно решать с помощью алгоритма, сводящегося к определению последовательности достаточно близких положений. В начальном положении необходимо указать, какое из нескольких решений является основным. Затем, задав малые приращения координаты q_s , ищем, последовательно решая групповые уравнения для всех групп, решение, близкое к основному начальному положению. Таким образом, двигаясь малыми шагами, проходим всю траекторию, вплоть до конечного положения. Для каждого i -того положения значения вектора $\bar{\varphi}^{(i)}$ определяются из рекуррентных соотношений (9). При приближении к особым положениям сходимость последовательных приближений ухудшается, поскольку величина якобиана $\det(\partial \bar{F} / \partial \bar{\varphi})$ стремится к нулю; приходится уменьшать шаг итераций.

$$\bar{\varphi}^{(i)} = \bar{\varphi}^{(i-1)} + \Delta \bar{\varphi}_i,$$

$$\Delta \bar{\varphi}_i^{(k+1)} = \Delta \bar{\varphi}_i^{(k)} - \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\varphi}} \right)_k^{-1} \cdot \bar{F}(\bar{\varphi}_i^{(k-1)} + \Delta \bar{\varphi}_i^{(k)}, \bar{\xi}^{(i)}, q_2^{(i)}) \quad (9)$$

Если знаки якобиана в начальном и конечном положении механизма совпадают, то можно пытаться искать траекторию перехода, не проходящую через особое положение; при разных знаках якобиана проход через особое положение становится неизбежным.

7. В основе методов геометрического анализа пространственных механизмов лежит применение матриц перехода, связывающих координаты точек в двух системах отсчета (тела 0 и 1 на рис. 6). Вводя векторы-столбцы (10), матрицу перехода и матрицу направляющих косинусов (11), можно представить преобразование координат в форме (12). При последовательном переходе от одной системы координат к другой матрицы перехода $H_{S-I,S}$ и матрицы направляющих косинусов $A_{S-I,S}$ перемножаются.

$$\bar{R}_M^{(0)} = \begin{pmatrix} \bar{r}_M^{(0)} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_M^{(0)} \\ y_M^{(0)} \\ z_M^{(0)} \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \bar{R}_M^{(1)} = \begin{pmatrix} \bar{r}_M^{(1)} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_M^{(1)} \\ y_M^{(1)} \\ z_M^{(1)} \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \bar{r}_{00_1}^{(0)} = \begin{pmatrix} x_{0_1}^{(0)} \\ y_{0_1}^{(0)} \\ z_{0_1}^{(0)} \end{pmatrix} \quad (10)$$

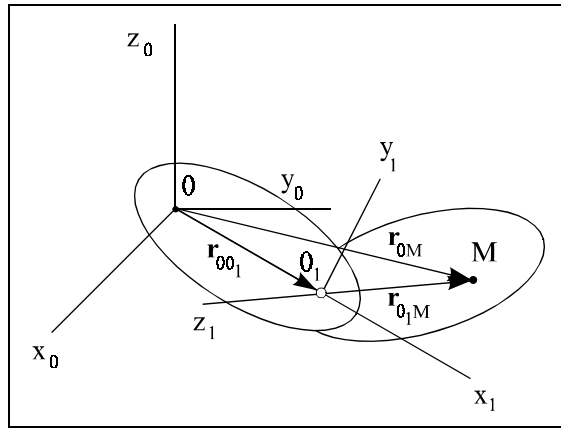


Рис. 6.

$$H_{01} = \left(\begin{array}{ccc|c} A_{01} & & & \bar{r}_{00_1}^{(0)} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right); \quad A_{01} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}_{01} \quad (11)$$

$$\bar{R}_M^{(0)} = H_{01} \bar{R}_M^{(1)} \quad (12)$$

Если тела 0 и 1 связаны вращательной парой, а $q_{0,1}$ – угол поворота, то матрица перехода принимает форму (13). Здесь θ_{1z} – ось поворота.

$$H_{01}^{(B)} = \begin{pmatrix} \cos q_{01} & -\sin q_{01} & 0 & x_{01}^{(0)} \\ \sin q_{01} & \cos q_{01} & 0 & y_{01}^{(0)} \\ 0 & 0 & 1 & z_{01}^{(0)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

При поступательной паре имеем матрицу перехода (14); здесь перемещение происходит вдоль оси θx_1 , а $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}$ – компоненты матрицы $A_{0,1}$.

$$H_{01}^{(П)} = \left(\begin{array}{ccc|c} A_{01} & & & \begin{matrix} x_{01}^{(0)} + q_{01}\alpha_{11} \\ y_{01}^{(0)} + q_{01}\alpha_{21} \\ z_{01}^{(0)} + q_{01}\alpha_{31} \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (14)$$

Аналогично определяются матрицы перехода и для других низших пар. При этом матрица перехода оказывается функцией от s обобщенных координат, если соответствующая кинематическая пара является s -подвижной. Используя матрицы перехода, легко получить групповые уравнения для пространственных групп. Для группы, показанной на рис. 7, можно, разомкнув шарнир D, записать их в форме (15), где q_1, q_2 – входные координаты, α, β, u – неизвестные групповые координаты, H_{2B}^B и $H_{B3}^П$ – матрицы перехода, произведение которых дает матрицу перехода для цилиндрической пары. Алгоритмы решения уравнений (15) аналогичны рассмотренным выше.

$$\bar{F}(\alpha, \beta, u) = H_{01}^{(B)}(\alpha) H_{12}^{(П)}(q_1) H_{2B}^{(B)}(\beta) H_{B3}^{(П)}(u) H_{34}^{(B)}(q_2) \bar{R}_D^{(4)} = \bar{R}_D^{(0)} \quad (15)$$

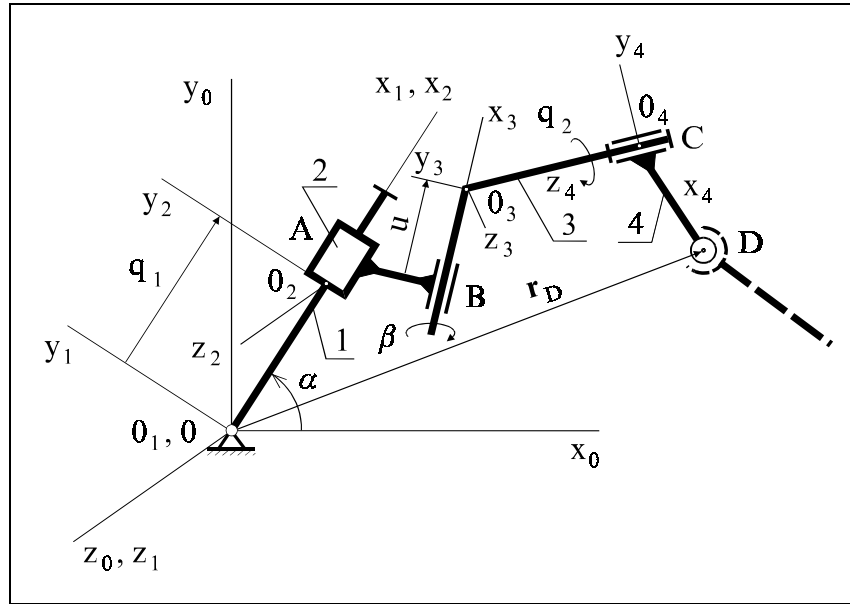


Рис. 7.

Для механизмов роботов, имеющих структуру дерева, прямая задача геометрического анализа существенно упрощается. Функции положения получают непосредственным умножением вектора $\bar{R}_M^{(n)}$ (точка М принадлежит n -му звену) на произведение матриц перехода (см.(16)).

$$\bar{R}_M^{(0)} = H_{01}(q_1)H_{12}(q_2) \dots H_{n-1,n}(q_n)\bar{R}_M^{(n)} \quad (16)$$

8. Обратная задача геометрического анализа может также решаться последовательно для каждой структурной группы, но структурное представление должно быть произведено для инверсного механизма. Инверсное преобразование механизма, показанного на рис. 3, приводит к структуре, приведенной на рис. 8. Здесь «входное» звено ВС образует группу с тремя степенями подвижности (входные координаты – x_M, y_M, φ). К этому звену и к стойке присоединены группы Ассура OAB и CDE. Задача сводится к решению уравнений (17)-(19). В особых положениях точки O, A, B, или точки C, D, E лежат на одной прямой. Эти особые положения носят условный характер; они не опасны для исходного механизма, имеющего входы q_s .

$$\begin{aligned} x_B &= x_M - B\bar{M} \cos \varphi; & x_C &= x_M + C\bar{M} \cos \varphi; \\ y_B &= y_M - B\bar{M} \sin \varphi; & y_C &= y_M + C\bar{M} \sin \varphi. \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} l_1 \cos q_1 + l_2 \cos \varphi_2 &= x_B - x_0, \\ l_1 \sin q_1 + l_2 \sin \varphi_2 &= y_B - y_0. \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} l_5 \cos q_3 + l_4 \cos(\varphi + q_2) &= x_C - x_E, \\ l_5 \sin q_3 + l_4 \sin(\varphi + q_2) &= y_C - y_E. \end{aligned} \quad (19)$$

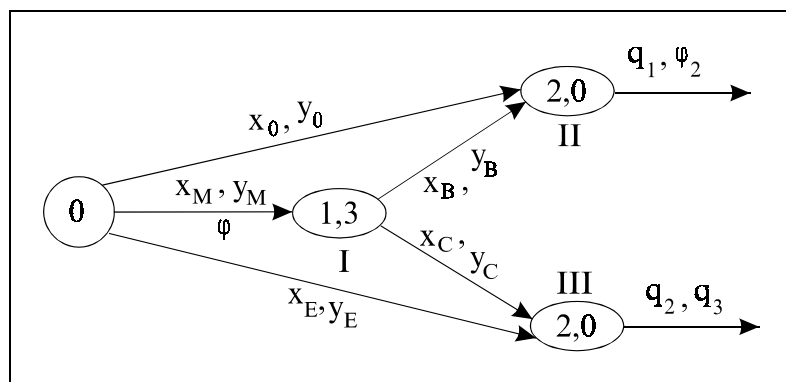


Рис. 8. Граф структуры механизма после инверсного преобразования

9. В механизме, содержащем высшую кинематическую пару, в групповые уравнения входят уравнения сопряженных поверхностей. Обычно задача упрощается, т.к. звенья, образующие высшую пару, образуют однозвенные группы. Пример показан на рис. 9, а групповые уравнения имеют форму (20). Уравнения сопряженных поверхностей заданы функциями $r_1(\theta_1)$ и $r_2(\theta_2)$; ψ_1 и ψ_2 – углы между радиусами и касательной к профилям.

$$\begin{aligned}
 r_1 \cos(q + \theta_1) + r_2 \cos(\varphi + \theta_2) - d &= 0; \\
 r_1 \sin(q + \theta_1) - r_2 \sin(\varphi + \theta_2) &= 0; \\
 \psi_1(\theta_1) + \psi_2(\theta_2) &= \arctg \frac{r_1(\theta_1)}{dr_1} + \arctg \frac{r_2(\theta_2)}{dr_2} = \pi - q - \varphi - \theta_1 - \theta_2.
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

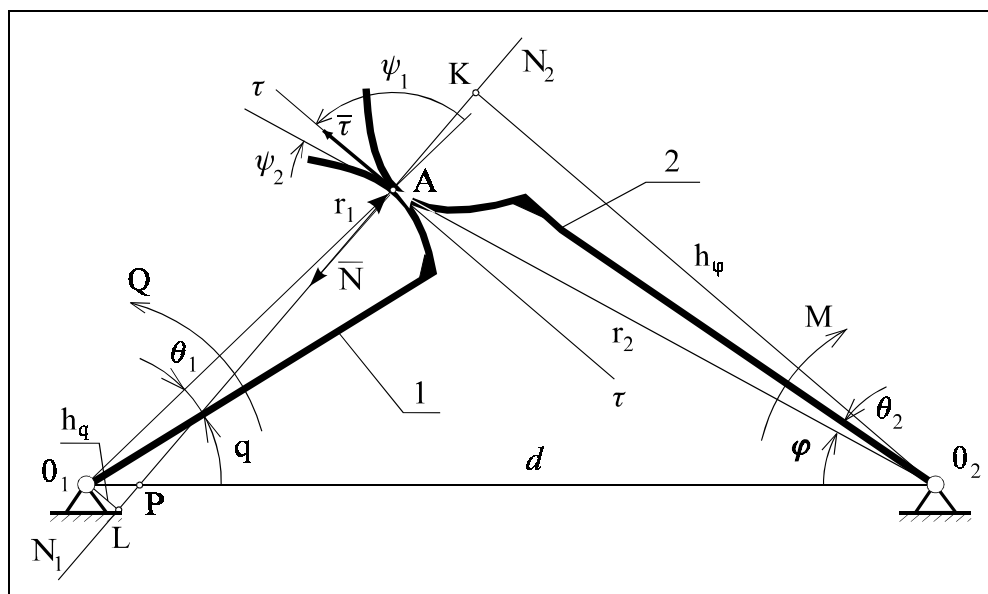


Рис. 9. Механизм с высшей кинематической парой

IV. Методы кинематического анализа

1. Конечной целью кинематического анализа считается определение скоростей и ускорений точек механизма, угловых скоростей и ускорений его звеньев. Эта задача сводится к определению первых и вторых частных производных от функций положения (1), поскольку имеют место соотношения (21).

$$\dot{x}_k = \sum_{s=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial q_s} \dot{q}_s; \quad \ddot{x}_k = \sum_{s=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial q_s} \ddot{q}_s + \sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^n \frac{\partial^2 x_k}{\partial q_s \partial q_r} \dot{q}_s \dot{q}_r. \quad (21)$$

К той же задаче приводится и исследование точности механизма, требующее также определения частных производных от функций положения по параметрам в первом приближении. Ошибки положения δx_k , вызванные ошибками координат δq_s и ошибками параметров $\delta \alpha_l$, определяются по формуле (22).

$$\delta x_k = \sum_{s=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial q_s} \delta q_s + \sum_{l=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_l} \delta \alpha_l. \quad (22)$$

2. Кинематический анализ может производиться последовательно для каждой из структурных групп, начиная от стойки. Уравнения для определения первых частных производных могут быть получены непосредственным дифференцированием групповых уравнений. Так, например, дифференцируя уравнения (2) и (3) по q_1 , получаем систему линейных уравнений для производных $\partial \varphi_2 / \partial q_1$, $\partial \varphi / \partial q_1$ (уравнения (23)).

$$\begin{array}{ll} \text{I} & \frac{\partial x_A}{\partial q_1} = -l_1 \sin q_1; & \text{II} & \frac{\partial x_D}{\partial q_1} = 0; \\ & \frac{\partial y_A}{\partial q_1} = l_1 \cos q_1. & & \frac{\partial y_D}{\partial q_1} = 0. \\ \text{III} & -l_2 \sin \varphi_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_1} - [l_3 \sin \varphi + l_4 \sin(\varphi + q_2)] \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} - \frac{\partial x_A}{\partial q_1} = 0; & & \\ & l_2 \cos \varphi_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_1} + [l_3 \cos \varphi + l_4 \cos(\varphi + q_2)] \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} - \frac{\partial y_A}{\partial q_1} = 0. & & \end{array} \quad (23)$$

Определителем этой системы является якобиан групповых уравнений. В любом неособом положении система имеет единственное решение. Аналогично можно получить уравнения для определения вторых производных. Дифференцируя уравнения (23) сначала по q_1 , а затем по q_2 , получаем системы линейных уравнений (24) и (25), из которых определяются вторые производные.

$$\begin{array}{l} \frac{\partial^2 x_A}{\partial q_1^2} = -l_1 \cos q_1; \quad \frac{\partial^2 y_A}{\partial q_1^2} = -l_1 \sin q_1; \\ -l_2 \sin \varphi_2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial q_1^2} - [l_3 \sin \varphi + l_4 \sin(\varphi + q_2)] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_1^2} = \frac{\partial^2 x_A}{\partial q_1^2} + \\ + l_2 \cos \varphi_2 \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial q_1} \right)^2 + [l_3 \cos \varphi + l_4 \cos(\varphi + q_2)] \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \right)^2; \\ l_2 \cos \varphi_2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial q_1^2} + [l_3 \cos \varphi + l_4 \cos(\varphi + q_2)] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_1^2} = \frac{\partial^2 y_A}{\partial q_1^2} + \\ + l_2 \sin \varphi_2 \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial q_1} \right)^2 + [l_3 \sin \varphi + l_4 \sin(\varphi + q_2)] \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \right)^2. \end{array} \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x_A}{\partial q_1 \partial q_2} &= \frac{\partial^2 y_A}{\partial q_1 \partial q_2} = 0; \\
-\ell_2 \sin \varphi_2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial q_1 \partial q_2} - [\ell_3 \sin \varphi + \ell_4 \sin(\varphi + q_2)] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_1 \partial q_2} &= \ell_2 \cos \varphi_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_2} + \\
+ [\ell_3 \cos \varphi + \ell_4 \cos(\varphi + q_2)] \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} + \ell_4 \cos(\varphi + q_2) \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}; & \quad (25) \\
\ell_2 \cos \varphi_2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial q_1 \partial q_2} + [\ell_3 \cos \varphi + \ell_4 \cos(\varphi + q_2)] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_1 \partial q_2} &= \ell_2 \sin \varphi_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_2} + \\
+ [\ell_3 \sin \varphi + \ell_4 \sin(\varphi + q_2)] \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} + \ell_4 \sin(\varphi + q_2) \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}. &
\end{aligned}$$

Решения этих уравнений существуют и единственны в любом неособом положении механизма.

- Для определения производных от групповых координат по какому-либо параметру α_ℓ нужно продифференцировать групповые уравнения по этому параметру. Пусть, например, нужно определить производные от координат x_M , y_M , φ платформы ВС (рис. 3) по параметру ℓ_2 . Дифференцируя по этому параметру уравнения (3), получаем систему (26), из которой определяем $\partial \varphi_2 / \partial \ell_2$, $\partial \varphi / \partial \ell_2$.

$$\begin{aligned}
-\ell_2 \sin \varphi_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \ell_2} - [\ell_3 \sin \varphi + \ell_4 \sin(\varphi + q_2)] \frac{\partial \varphi}{\partial \ell_2} &= -\cos \varphi_2; \\
\ell_2 \cos \varphi_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \ell_2} + [\ell_3 \cos \varphi + \ell_4 \cos(\varphi + q_2)] \frac{\partial \varphi}{\partial \ell_2} &= \sin \varphi_2.
\end{aligned} \quad (26)$$

Далее из (4) находим $\partial x_M / \partial \ell_2$, $\partial y_M / \partial \ell_2$, $\partial \varphi / \partial \ell_2$ (уравнения (27)).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_M}{\partial \ell_2} &= \cos \varphi_2 - \ell_2 \sin \varphi_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \ell_2} - BM \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \ell_2}; \\
\frac{\partial y_M}{\partial \ell_2} &= \sin \varphi_2 + \ell_2 \cos \varphi_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \ell_2} + BM \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \ell_2}.
\end{aligned} \quad (27)$$

Аналогично могут быть получены смешанные частные производные вида $\partial^2 x_k / \partial q_s \partial \alpha_\ell$, а также частные производные третьего порядка, определение которых требуется для анализа механизмов с упругими звеньями.

- Для плоских рычажных механизмов изложенный метод может быть представлен в графоаналитической форме. Рассмотрим частный пример. Предварительно отметим следующее. Пусть задан вектор \vec{r} , являющийся функцией некоторого параметра u (рис. 10). Представим его в форме (28), где \vec{n} - единичный вектор.

$$\vec{r} = \vec{n}r \quad (28)$$

Продифференцировав (28) по u , получим (29), где $\vec{\tau}$ - вектор, перпендику-

лярный \vec{n} , а φ - угол между \vec{r} и неподвижной осью Ox .

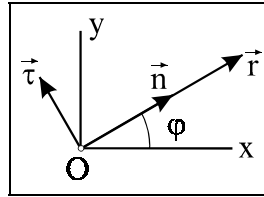


Рис. 10

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \frac{\partial \vec{n}}{\partial u} r + \vec{n} \frac{\partial r}{\partial u} = \vec{\tau} \frac{\partial \varphi}{\partial u} r + \vec{n} \frac{\partial r}{\partial u} \quad (29)$$

Для векторов \vec{n} и $\vec{\tau}$ справедливы соотношения (30).

$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial u} = \vec{\tau} \frac{\partial \varphi}{\partial u}; \quad \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial u} = -\vec{n} \frac{\partial \varphi}{\partial u}. \quad (30)$$

Введя обозначения, показанные на рис. 11, запишем уравнения замкнутого векторного контура $0ABCDE$ в форме (31).

$$l_1 \vec{n}_1 + l_2 \vec{n}_2 + l_3 \vec{n}_3 + l_4 \vec{n}_4 = l_5 \vec{n}_5 + d \vec{n}_0. \quad (31)$$

Дифференцируя (31) по q_1 , получим (32).

$$l_1 \vec{\tau}_1 + l_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_1} \vec{\tau}_2 + l_3 \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \vec{\tau}_3 + l_4 \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \vec{\tau}_4 = 0 \quad (32)$$

Из этого уравнения можно определить значения $\partial \varphi_2 / \partial q_1$, $\partial \varphi / \partial q_1$. Дифференцируя (32), получим уравнение (33), из которого находим $\partial^2 \varphi / \partial q_1^2$ и $\partial^2 \varphi_2 / \partial q_1^2$.

$$\begin{aligned} -l_1 \vec{n}_1 + l_2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial q_1^2} \vec{\tau}_2 - l_2 \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial q_1} \right)^2 \vec{n}_2 + l_3 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_1^2} \right) \vec{\tau}_3 - l_3 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \right)^2 \vec{n}_3 + \\ + l_4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_1^2} \vec{\tau}_4 - l_4 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \right)^2 \vec{n}_4 = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

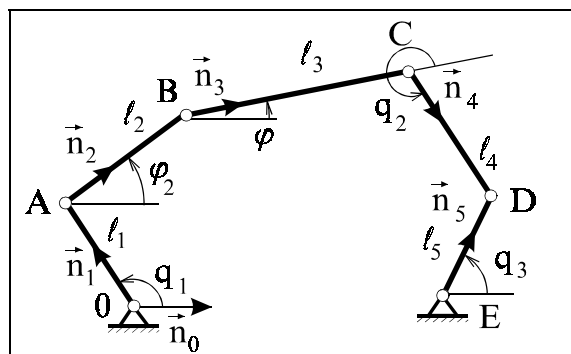


Рис. 11

Дифференцируя (32) по q_2 , получаем уравнения (34), из которых определяем $\partial^2 \varphi / \partial q_1 \partial q_2$ и $\partial^2 \varphi_2 / \partial q_1 \partial q_2$ и т.д.

$$\begin{aligned} & \ell_2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial q_1 \partial q_2} \bar{\tau}_2 - \ell_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_2} \bar{n}_2 + \ell_3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_1 \partial q_2} \bar{\tau}_3 - \\ & - \ell_3 \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \bar{n}_3 + \ell_4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_1 \partial q_2} \bar{\tau}_4 - \ell_4 \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_2} + 1 \right) \bar{n}_4 = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

5. Предлагается новый метод определения первых производных от функций положения по обобщенным координатам и по параметрам, основанный на использовании уравнений равновесия. Пусть требуется определить первые производные от функции положения (35) по координатам q_1, q_2, q_3 и по параметрам ℓ_1, \dots, ℓ_5 .

$$y_k = \Pi_{y_k}(q_1, q_2, q_3, \ell_1, \dots, \ell_5, d) \quad (35)$$

Приложим к точке К (рис. 12) силу $P = 1$ и определим уравновешивающие моменты Q_1, Q_2, Q_3 . Это можно сделать, например, построением плана сил. С другой стороны, из принципа возможных перемещений следуют соотношения (36), которые приводят к выражениям (37), то есть позволяют определить производные по обобщенным координатам.

$$\begin{aligned} Q_1 \delta q_1 + P_y \delta y_k^{(1)} &= 0; \\ Q_2 \delta q_2 + P_y \delta y_k^{(2)} &= 0; \\ Q_3 \delta q_3 + P_y \delta y_k^{(3)} &= 0. \end{aligned} \quad (36)$$

$$\frac{\partial y_k}{\partial q_1} = -\frac{Q_1}{P_y}, \quad \frac{\partial y_k}{\partial q_2} = -\frac{Q_2}{P_y}, \quad \frac{\partial y_k}{\partial q_3} = -\frac{Q_3}{P_y}. \quad (37)$$

Аналогично, условно освободив связь АВ и рассматривая равновесие цепи BCDE под действием сил P_y и R_{BA} , получаем соотношения (38).

$$R_{BA} \delta \ell_2 + P_y \delta y_k = 0; \quad \frac{\partial y_k}{\partial \ell_2} = -\frac{R_{BA}}{P_y}. \quad (38)$$

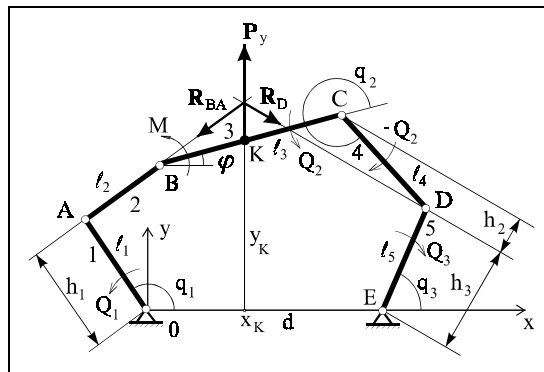


Рис. 12

Чтобы найти производные $\partial\varphi/\partial q_1, \partial\varphi/\partial q_2, \partial\varphi/\partial q_3$, нужно приложить к звену ВС единичный момент M и определить уравновешивающие моменты Q_{1M}, Q_{2M}, Q_{3M} . При этом получаем (39).

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q_1} = -\frac{Q_1}{M}; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial q_2} = -\frac{Q_2}{M}; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial q_3} = -\frac{Q_3}{M}. \quad (39)$$

В отличие от плана аналогов скоростей, позволяющего определить производные от различных функций положения по одной обобщенной координате, предлагаемый метод позволяет определить при приложении одной единичной силы производные от одной функции положения по различным координатам и параметрам. Поэтому в определенном смысле оба метода дополняют друг друга.

6. Использование уравнений равновесия особенно полезно в следующих случаях.

a) При определении производных по параметрам в связи с исследованием точности механизмов, определением ошибок положения, вызванных ошибками параметров. В этих случаях процедура проще, чем построение преобразованных механизмов по Н.Г.Бруевичу.

b) При определении первых производных от функций положения для механизмов высших классов. На рис. 13, a определяется производная $\partial\varphi/\partial q$; для этого к звену 5 прикладывается момент M и определяется направление реакции R_A из условий равновесия звена 2. Далее условия равновесия звена 1 и группы 2-5 дают $Q=R_A h_q, M=R_A h_\varphi$, откуда $\partial\varphi/\partial q = -Q/M = -h_q/h_\varphi$. На рис. 13, b выполнены построения, необходимые для определения производной $\partial\alpha/\partial q$, где α - угол между звеньями 1 и 2.

c) При определении особых положений механизмов. Особое положение механизма, показанного на рис. 13, a, очевидно имеет место, если линия действия силы R_A проходит через точку E. На рис. 14 показана группа ABCD, к которой приложена сила P в точке M звена BC. Размыкая механизм в точке D и составляя уравнения моментов сил относительно осей A, B, C, получаем уравнения равновесия в форме (40).

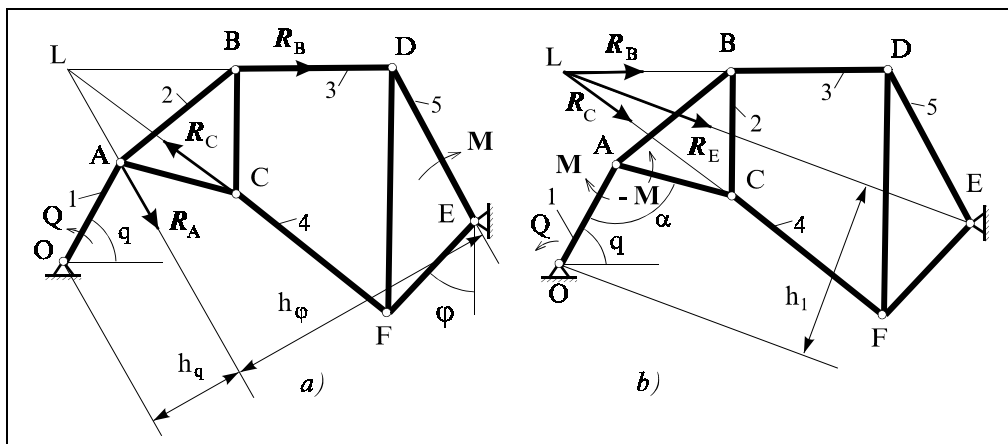


Рис. 13

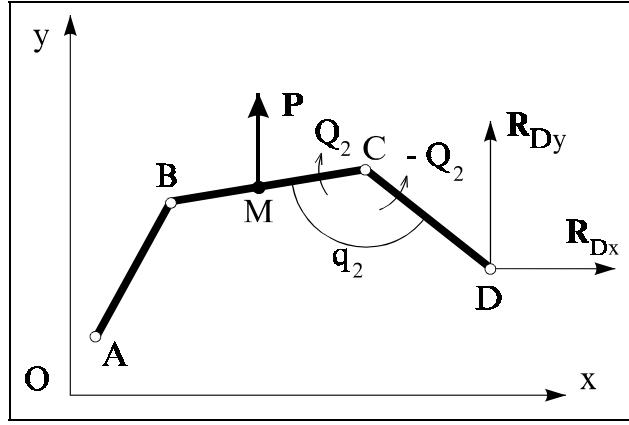


Рис. 14

$$\begin{aligned}
 -R_{DX}(y_D - y_A) + R_{DY}(x_D - x_A) &= -P(x_M - x_A); \\
 -R_{DX}(y_D - y_B) + R_{DY}(x_D - x_B) &= -P(x_M - x_B); \\
 -R_{DX}(y_D - y_C) + R_{DY}(x_D - x_C) + Q_2 &= 0.
 \end{aligned} \tag{40}$$

Определитель (41) этой системы равен нулю в особых положениях, что дает условия (42).

$$\Delta = \begin{vmatrix} -(y_D - y_A) & x_D - x_A & 0 \\ -(y_D - y_B) & x_D - x_B & 0 \\ -(y_D - y_C) & x_D - x_C & 1 \end{vmatrix} = \tag{41}$$

$$= (x_D - x_A)(y_D - y_B) - (x_D - x_B)(y_D - y_A).$$

$$\frac{x_D - x_A}{x_D - x_B} = \frac{y_D - y_A}{y_D - y_B} \tag{42}$$

7. Из изложенного следует, что неизвестные силы, входящие в уравнения равновесия, могут быть заменены соответствующими производными от функций положения. В уравнениях (40) можно произвести замену неизвестных в соответствии с (43), получив систему (44).

$$R_{DX} = -P \frac{\partial y_M}{\partial x_D}; \quad R_{DY} = P \frac{\partial y_M}{\partial y_D}; \quad Q_2 = -P \frac{\partial y_M}{\partial q_2}. \tag{43}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial y_M}{\partial x_D}(y_D - y_A) + \frac{\partial y_M}{\partial y_D}(x_D - x_A) = -(x_M - x_A); \\ \frac{\partial y_M}{\partial x_D}(y_D - y_B) + \frac{\partial y_M}{\partial y_D}(x_D - x_B) = -(x_M - x_B); \\ \frac{\partial y_M}{\partial x_D}(y_D - y_C) + \frac{\partial y_M}{\partial y_D}(x_D - x_C) + \frac{\partial y_M}{\partial q_2} = 0. \end{cases} \tag{44}$$

Продифференцировав эти уравнения, получим систему уравнений для некоторых производных второго порядка. Так, дифференцирование по q_2 приводит к системе (45), из которой можно определить $\partial^2 y_M / \partial x_D \partial q_2$,

$\partial^2 y_M / \partial y_D \partial q_2$, $\partial^2 y_M / \partial q_2^2$, если исследуемое положение не является особым. Отметим, что матрица системы уравнений равновесия и матрица соответствующих групповых уравнений являются взаимно транспонированными.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 y_M}{\partial x_D \partial q_2} (y_D - y_A) + \frac{\partial^2 y_M}{\partial y_D \partial q_2} (x_D - x_A) = -\frac{\partial y_M}{\partial x_D} \left(\frac{\partial y_D}{\partial q_2} - \frac{\partial y_A}{\partial q_2} \right) - \\ \quad - \frac{\partial y_M}{\partial y_D} \left(\frac{\partial x_D}{\partial q_2} - \frac{\partial x_A}{\partial q_2} \right) - \frac{\partial x_M}{\partial q_2} + \frac{\partial x_A}{\partial q_2}; \\ \frac{\partial^2 y_M}{\partial x_D \partial q_2} (y_D - y_B) + \frac{\partial^2 y_M}{\partial y_D \partial q_2} (x_D - x_B) = -\frac{\partial y_M}{\partial x_D} \left(\frac{\partial y_D}{\partial q_2} - \frac{\partial y_B}{\partial q_2} \right) - \\ \quad - \frac{\partial y_M}{\partial y_D} \left(\frac{\partial x_D}{\partial q_2} - \frac{\partial x_B}{\partial q_2} \right) - \frac{\partial x_M}{\partial q_2} + \frac{\partial x_B}{\partial q_2}; \\ \frac{\partial^2 y_M}{\partial x_D \partial q_2} (y_D - y_C) + \frac{\partial^2 y_M}{\partial y_D \partial q_2} (x_D - x_C) + \frac{\partial^2 y_M}{\partial q_2^2} = - \\ \quad - \frac{\partial y_M}{\partial x_D} \left(\frac{\partial y_D}{\partial q_2} - \frac{\partial y_C}{\partial q_2} \right) - \frac{\partial y_M}{\partial y_D} \left(\frac{\partial x_D}{\partial q_2} - \frac{\partial x_C}{\partial q_2} \right). \end{array} \right. \quad (45)$$

- Предлагаемый метод можно применять и для механизмов с высшими парами. Приложим к выходному звену (см. рис. 9) единичный момент M и найдем силу Q , уравновешивающую его. При этом $\partial \varphi / \partial q = -Q/M$. Поскольку моменты Q и M равны произведениям нормальной реакции N на плечи h_q и h_φ , получаем, что $\partial \varphi / \partial q = -h_q / h_\varphi$, или $\partial \varphi / \partial q = -0_1 \bar{P} / 0_2 \bar{P}$, где P – точка пересечения межцентровой линии с общей нормалью $N_1 N_2$.

V. Силовой анализ механизмов

- Определение реакций в кинематических парах и обобщенных движущих сил является традиционной задачей силового анализа механизмов. Решается эта задача с помощью уравнений кинетостатики, представленных в той или иной форме. При наличии избыточных связей задача становится статически неопределимой. Ниже излагаются некоторые алгоритмы силового анализа, «идейно» связанные с изложенными выше методами геометрического и кинематического анализа.
- Пусть механизм без избыточных связей и с идеальными кинематическими парами (без трения) содержит N подвижных звеньев и p_s s -подвижных пар. Тогда число его степеней подвижности w определяется по формуле (46).

$$w = 6N - \sum_{s=1}^5 (6 - S) p_s \quad (46)$$

В силу этой формулы число неизвестных оказывается равным $6N$ – общему числу уравнений кинетостатики. Такой же баланс числа неизвестных и числа уравнений имеет место и для каждой из структурных групп, если считать известными реакции в «местах присоединения» последующих групп к рассмат-

риваемой. Поэтому можно производить силовой расчет механизма последовательно, начиная от последней присоединяемой группы.

3. Может быть предложен следующий алгоритм силового расчета структурной группы, который мы рассмотрим на примере механизма, показанного на рис. 15.

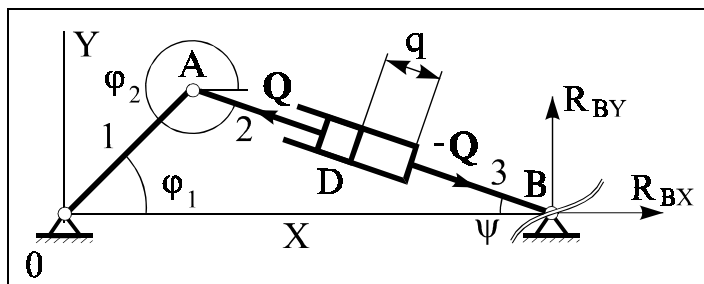


Рис. 15

- a) Группа АВ размыкается и приобретает структуру дерева (рис. 15). Вводятся реакции в разомкнутых парах (R_{Bx} , R_{By}).
- b) Вводятся групповые координаты (φ_1 , φ_2); вместе с входными координатами (q) они образуют систему координат, однозначно определяющих положение всех звеньев дерева.
- c) Составляются уравнения равновесия в форме уравнений моментов относительно осей, соответствующих угловым координатам дерева (шарниры 0, А) и уравнений проекций сил на оси, соответствующие линейным координатам. В результате получается система уравнений, из которой определяются реакции разомкнутых связей и обобщенные движущие силы (уравнения (47)).

$$\begin{aligned}
 -R_{Bx}(y_B - y_0) + R_{By}(x_B - x_0) + \sum_i M_0(\bar{P}_i) + \sum_i M_0(\bar{\Phi}_C) &= 0; \\
 -R_{Bx}(y_B - y_A) + R_{By}(x_B - x_A) + \sum_i M_A(\bar{P}_i) + \sum_i M_A(\bar{\Phi}_C) &= 0; \\
 R_{Bx} \cos \psi - R_{By} \sin \psi + Q + \sum_i (P_i)_{DB} + \sum_i (\Phi_i)_{DB} &= 0.
 \end{aligned} \tag{47}$$

4. При наличии избыточных связей оказывается возможным определение реакций всех освобождающих связей и движущих сил. При этом каждую из реакций можно определить отдельно от других, освободив соответствующую связь и используя принцип возможных перемещений. Реакции неосвобождающих связей определить невозможно. Они зависят от начальных деформаций, вызванных ошибками размеров звеньев, а также условиями сборки.
5. В основе силового анализа механизмов с трением в кинематических парах лежит, как обычно, предположение о кулоновом трении. В случае точечного контакта в паре (рис. 16) все компоненты главного вектора и главного момента реакций могут быть выражены через нормальную реакцию (формулы (48)).

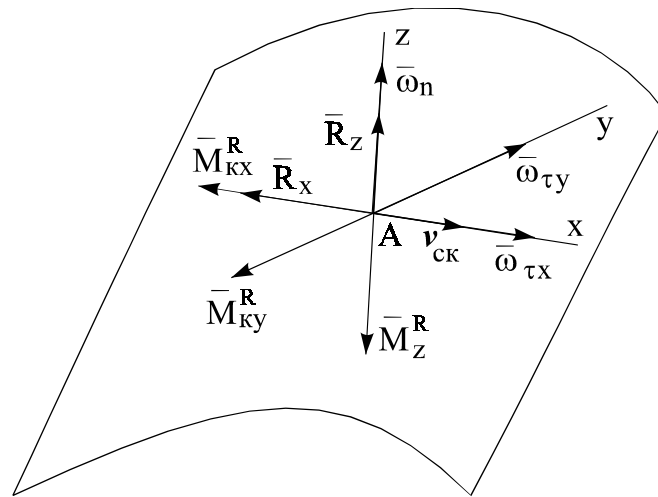


Рис. 16. Компоненты главного вектора и главного момента реакций в случае контакта в точке A

$$\begin{aligned}
 R_x &= -f|N| \frac{\bar{v}_{ck}}{|\bar{v}_{ck}|}; R_y = 0; R_z = N; \\
 M_x^R &= -k|N| \frac{\bar{\omega}_{\tau x}}{|\bar{\omega}_{\tau x}|}; \\
 M_y^R &= -k|N| \frac{\bar{\omega}_{\tau y}}{|\bar{\omega}_{\tau y}|}; \\
 M_z^R &= -k_B|N| \frac{\bar{\omega}_n}{|\bar{\omega}_n|}.
 \end{aligned}
 \tag{48}$$

Однако в низших парах требуется уточнение расчетных моделей, учитывающее дополнительное предположение о характере распределения нормальных сил по поверхностям контакта. Это приводит к моделям, представленным формулами (49) для поступательной пары (рис. 17) и формулами (50) для вращательной пары плоского механизма (рис. 18).

$$\begin{aligned}
 R_y &= N_A + N_B; \\
 R_x &= -f(N_A \text{sign} N_A + N_B \text{sign} N_B) \text{sign} \dot{x}; \\
 M_{Oz}^R &= -fh(N_B + N_A) + a(N_B - N_A).
 \end{aligned}
 \tag{49}$$

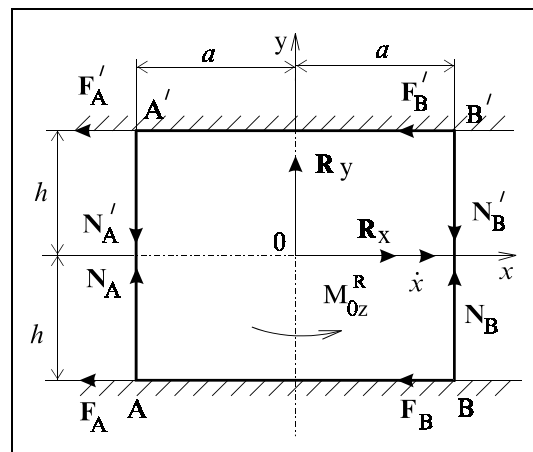


Рис. 17. Поступательная кинематическая пара с трением.
 Контакт в точках A (или A') и B (или B')

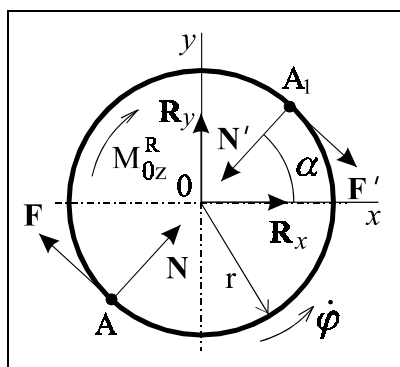


Рис. 18. Трение во вращательной кинематической паре

$$\begin{aligned}
 R_x &= N \cos \alpha - fN \sin \alpha; \\
 R_y &= N \sin \alpha + fN \cos \alpha; \\
 M_{0z}^R &= -\kappa fr |N| \text{sign} \dot{\varphi}; \\
 \kappa &= 1 \div \frac{4}{\pi}.
 \end{aligned}
 \tag{50}$$

6. Уравнения кинестатики, полученные для механизмов с трением, являются нелинейными. Они могут иметь несколько решений или не иметь их совсем. Уравнения движения ползуна (рис. 19) при невесомом шатуне имеют форму (51).

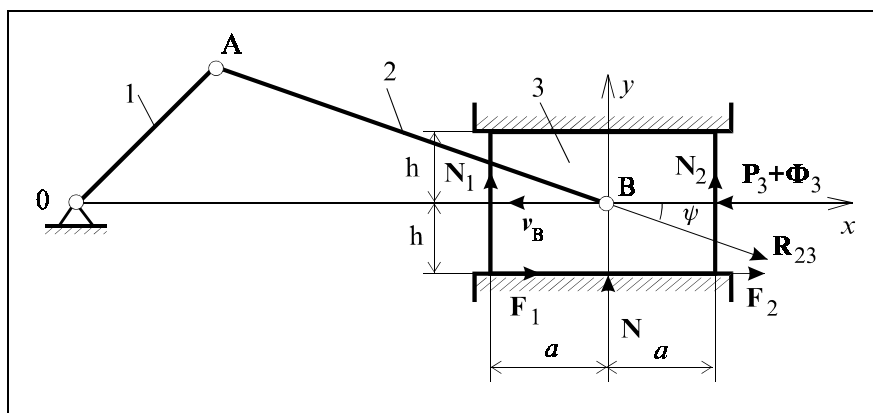


Рис. 19

$$\begin{aligned}
 N_1 + N_2 - R_{23} \sin \psi &= 0; \\
 R_{23} \cos \psi + f(N_1 \text{sign} N_1 + N_2 \text{sign} N_2) - (P_3 + \Phi_3) &= 0; \\
 (N_2 - N_1)a + fh(N_1 + N_2) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{51}$$

При $a > fh$ получаем уравнения (52), из которых следует уравнение (53).

$$\begin{aligned}
 N - R_{23} \sin \psi &= 0; \\
 R_{23} \cos \psi + fN \text{sign} N &= P_3 + \Phi_3.
 \end{aligned}
 \tag{52}$$

$$N = \frac{P_3 + \Phi_3}{\text{ctg} \psi + f \text{sign} N}.
 \tag{53}$$

При $ctg\psi > f$ имеем $ctg\psi + f \cdot sign N > 0$, и для N получаем единственное решение в форме (54) или (55).

$$N = \frac{P_3 + \Phi_3}{ctg\psi + f} > 0; \quad P_3 + \Phi_3 > 0. \quad (54)$$

$$N = \frac{P_3 + \Phi_3}{ctg\psi - f}; \quad P_3 + \Phi_3 < 0. \quad (55)$$

Если же $ctg\psi < f$, то при $P_3 + \Phi_3 > 0$ получаем два решения для N ((56) и (57)).

$$N = \frac{P_3 + \Phi_3}{ctg\psi + f} > 0; \quad P_3 + \Phi_3 > 0. \quad (56)$$

$$N = \frac{P_3 + \Phi_3}{ctg\psi - f} < 0; \quad P_3 + \Phi_3 > 0. \quad (57)$$

Это – режим оттормаживания. При $P_3 + \Phi_3 < 0$ решений нет (режим самоторможения).

VI. Анализ механизмов с упругими звеньями

1. *Механизмом с упругими звеньями, или упругим механизмом, называется физическая модель реального механизма, полученная в предположении, что некоторые звенья и кинематические пары, входящие в это механизм, являются деформируемыми. Упругие механизмы могут быть получены из механизмов с жесткими звеньями, если в последних некоторые жесткие связи заменить упругими. При этом превращение жесткого механизма в упругий возможно множеством способов, в зависимости от того, какие именно связи предполагаются упругими (рис. 20).*

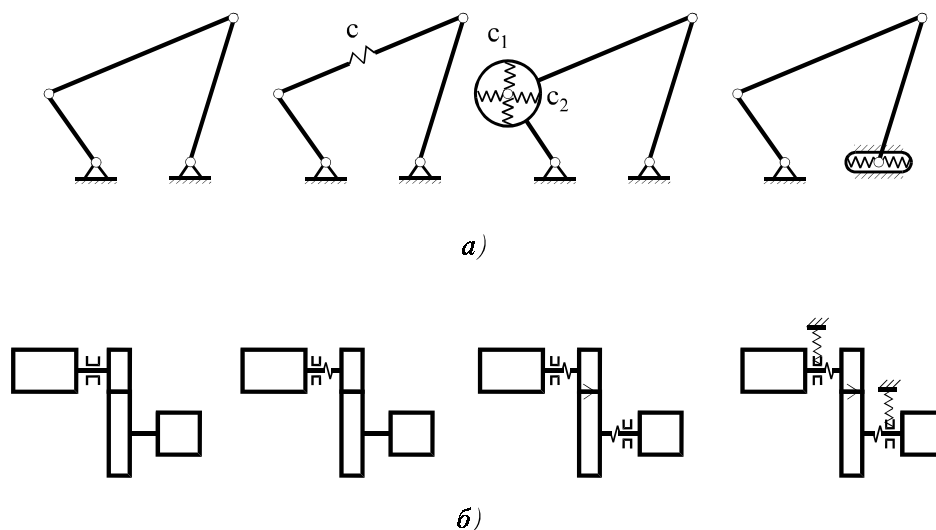


Рис. 20. Получение механизма с упругими звеньями из механизма с жесткими звеньями.
а – рычажные механизмы; б – механизмы с вращающимися звеньями

2. При переходе к упругому механизму делаются следующие предположения.

- a) Вводимые упругие элементы считаются одномерными, т.е. такими, деформация каждого из которых определяется одним скалярным параметром.
- b) Предполагается, что рассматриваемый механизм, в принципе, должен быть жестким, и его деформации являются малыми, приводящими к малым отклонениям от программного движения. Тем самым не рассматриваются механизмы, в которых упругие элементы обеспечивают выполнение программного движения, а их деформации являются большими.
- c) Замена жесткой связи упругой приводит к увеличению числа степеней свободы механизма на единицу. Для этого упругой должна стать освобождающая связь; упругость неосвобождающей связи не приводит к «упругому» механизму.
- d) Предполагается, что в пределах малых деформаций, возникающих в процессе движения, упругие элементы имеют линейные характеристики. Случай нелинейных упругих элементов должен рассматриваться особо.
- e) Предполагается, что деформация упругих элементов сопровождается диссипацией энергии. Коэффициент сопротивления b при гармонической деформации связан с жесткостью c соотношением (58), в котором ψ - коэффициент поглощения, ω - частота гармонической деформации.

$$b = \frac{\psi}{2\pi} \frac{c}{\omega} \quad (58)$$

3. Задачи статики упругого механизма возникают, например, при анализе его статических ошибок. Они сводятся к определению статических деформаций и связаны с понятием приведенной жесткости механизма. Рассмотрим механизм, показанный на рис. 21. «Закрепим» его входную координату q , а в точке К в направлении оси x_k приложим силу P . При этом возникнут силы F_i в упругих элементах, определяемые по формуле (59), деформации $\Delta\theta_i$, вызванные этими силами (формула (60)) и перемещение Δx_k точки К, вызванное этими деформациями.

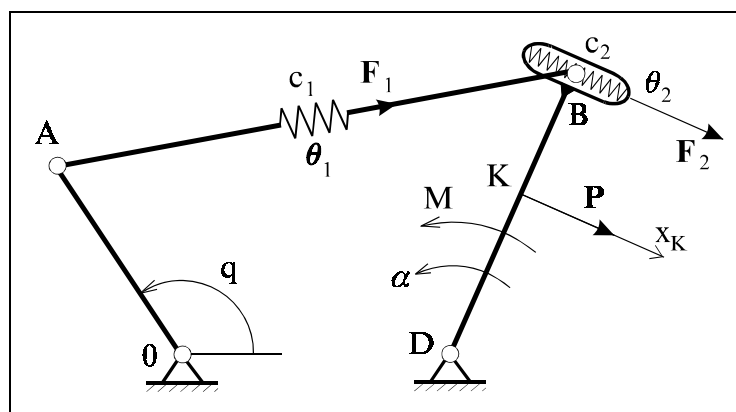


Рис. 21

$$F_i = P \frac{\partial x_k}{\partial \theta_i} \quad (i=1,2) \quad (59)$$

$$\Delta \theta_i = \frac{F_i}{c_i}; \quad \Delta x_k = \frac{\partial x_k}{\partial \theta_1} \Delta \theta_1 + \frac{\partial x_k}{\partial \theta_2} \Delta \theta_2. \quad (60)$$

Отношение (61) будем называть податливостью механизма, приведенной к точке К.

$$e_{np} = \frac{\Delta x_k}{P} = \frac{1}{c_1} \left(\frac{\partial x_k}{\partial \theta_1} \right)^2 + \frac{1}{c_2} \left(\frac{\partial x_k}{\partial \theta_2} \right)^2. \quad (61)$$

Обратную величину будем называть приведенной жесткостью. Приведенные податливости, вызванные упругостью двух освобождающих связей, складываются. Податливость на выходе механизма определяется как отношение угла поворота α выходного звена к приложенному на выходе моменту М при закрепленном входе (формула (62)).

$$e_{вых} = \frac{\alpha}{M} = \frac{1}{c_1} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \theta_1} \right)^2 + \frac{1}{c_2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \theta_2} \right)^2. \quad (62)$$

4. Понятие приведенной податливости на выходе обобщается на механизмы с несколькими входами (q_1, q_2, q_3 на рис. 22) и несколькими выходами (x_M, y_M, φ). Введя векторы $\bar{p}, \bar{\theta}, \bar{F}, \bar{P}$ (63), приходим к матрице податливостей $E_{вых}$ (64).

$$\begin{aligned} \bar{p}^T &= (x_k, y_k, \varphi); \\ \bar{\theta}^T &= (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5); \\ \bar{P}^T &= (P_x, P_y, M); \\ \bar{F}^T &= (Q_1, Q_2, Q_3, F_4, F_5); \\ C &= E_c^{-1} = \text{diag}(c_1, \dots, c_5). \end{aligned} \quad (63)$$

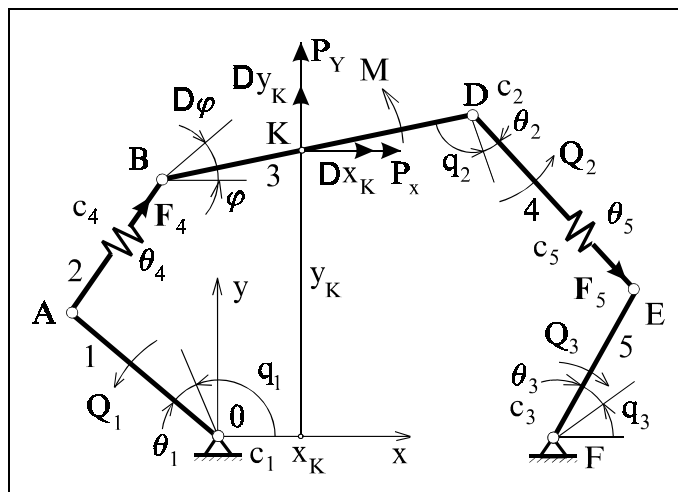


Рис. 22. Упругий механизм с тремя входами

$$E_{\text{вых}} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\theta}} \cdot E_c \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\theta}} \right)^T \quad (64)$$

$$\Delta \bar{p} = E_{\text{вых}} \cdot \bar{P} \quad (65)$$

Матрицу $\partial \bar{p} / \partial \bar{\theta}$ удобно определять с помощью силового расчета реакций \bar{F} жесткого механизма, вызванных приложением единичных сил P_x, P_y, M (матрица U (66)).

$$E_{\text{вых}} = U^T E_c U; \quad U = \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\theta}} \right)^T = \begin{pmatrix} Q_1^x & Q_1^y & Q_1^M \\ Q_2^x & Q_2^y & Q_2^M \\ Q_3^x & Q_3^y & Q_3^M \\ F_4^x & F_4^y & F_4^M \\ F_5^x & F_5^y & F_5^M \end{pmatrix}. \quad (66)$$

5. При кинематическом анализе механизма с упругими звеньями рассматривается функция положения, зависящая как от обобщенных координат \bar{q} , так и от деформаций $\bar{\theta}$ (67).

$$x = x(q, \bar{\theta}). \quad (67)$$

Частные производные от функций положения должны определяться при недеформированном механизме ($\bar{\theta} = \bar{0}$). Вычисление скоростей и ускорений с точностью до малых первого порядка приводит к формулам (68) и (69).

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial q}(q, \bar{0}) \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial \bar{\theta}}(q, \bar{0}) \dot{\bar{\theta}} + \frac{\partial^2 x}{\partial q \partial \bar{\theta}}(q, \bar{0}) \dot{q} \bar{\theta}. \quad (68)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} = & \left(\frac{\partial^2 x}{\partial q^2} \right)_0 \dot{q}^2 + \left(\frac{\partial^2 x}{\partial q \partial \bar{\theta}} \right)_0 \dot{q} \dot{\bar{\theta}} + \left(\frac{\partial^2 x}{\partial \bar{\theta}^2} \right)_0 \dot{\bar{\theta}}^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 x}{\partial q \partial \bar{\theta}} \right)_0 \dot{q} \dot{\bar{\theta}} + \\ & + \left[\left(\frac{\partial^2 x}{\partial q \partial \bar{\theta}} \right)_0 \ddot{q} + \left(\frac{\partial^3 x}{\partial q^2 \partial \bar{\theta}} \right)_0 \dot{q}^2 \right] \bar{\theta}. \end{aligned} \quad (69)$$

Появляются «добавочные» скорости и ускорения, для вычисления которых необходимо определять вторые ($\partial^2 x / \partial q \partial \bar{\theta}$) и третьи ($\partial^3 x / \partial q^2 \partial \bar{\theta}$) смешанные производные от функций положения. Методы их определения рассматривались выше.

6. В некоторых частных случаях задача упрощается. На рис. 23 показан механизм с линейными функциями положения; для него справедливы соотношения (70).

$$x = \alpha q + \bar{\beta}^T \cdot \bar{\theta}; \quad \dot{x} = \alpha \dot{q} + \bar{\beta}^T \cdot \dot{\bar{\theta}}; \quad \ddot{x} = \alpha \ddot{q} + \bar{\beta}^T \cdot \ddot{\bar{\theta}}. \quad (70)$$

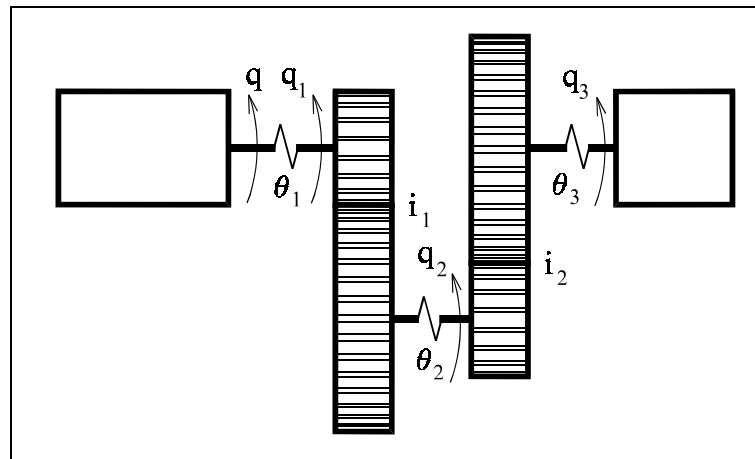


Рис. 23. Упругий передаточный механизм

На рис. 24 показано соединение упругого передаточного и жесткого исполнительного механизмов. Здесь функция положения выходного звена имеет вид (71); для скорости получается выражение (72).

$$x = \Pi_x(\varphi) = \Pi_x(\alpha q + \bar{\beta}^T \bar{\theta}) \quad (71)$$

$$\dot{x} = \Pi'_x(\alpha q) \cdot (\alpha \dot{q} + \bar{\beta}^T \dot{\bar{\theta}}) + \Pi''_x(\alpha q) \alpha \dot{q} \cdot \bar{\beta}^T \bar{\theta}. \quad (72)$$

Выражения для скоростей и ускорений упрощаются, если программным «движением» является состояние равновесия; тогда для \dot{x} и \ddot{x} получаются выражения (73).

$$q = q_0, x = x(q_0, \bar{\theta});$$

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial \theta}(q_0, \bar{\theta}) \cdot \dot{\bar{\theta}}; \ddot{x} = \left[\frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2}(q_0, \bar{\theta}) \cdot \dot{\bar{\theta}} \right]^T \dot{\bar{\theta}} + \frac{\partial x}{\partial \theta}(q_0, \bar{\theta}) \cdot \ddot{\bar{\theta}}. \quad (73)$$

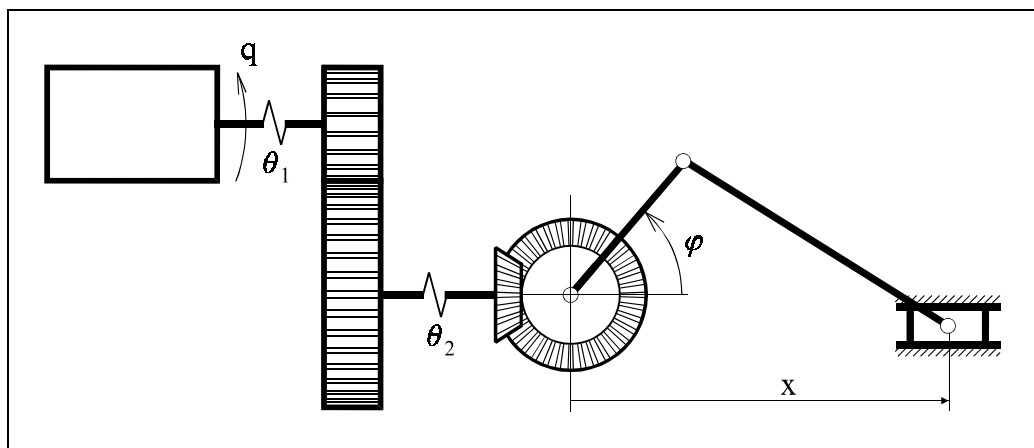


Рис. 24. Соединение упругого передаточного и жесткого исполнительного механизмов

7. Основной задачей динамики упругих механизмов является исследование их колебаний вблизи положений равновесия или вблизи программного движения. При решении этой задачи обычно используется аппарат уравнений Лагранжа второго рода. Следует отметить, что в механизмах со многими степенями подвижности и многими деформируемыми элементами определение кинетической энергии и составление уравнений Лагранжа является сложной за-

дачей. Предлагается другой способ составления уравнений движения механизма, основанный на «конечноэлементных» концепциях и в определенной степени ориентированный на применение ЭВМ.

8. Рассмотрим свободные колебания механизма вблизи положения равновесия. Эта задача ставится в тех случаях, когда исследуются колебания системы после прихода в точку позиционирования, а также при определении собственных частот и форм механизма в заданном положении. Рассмотрим механизм, показанный на рис. 22, с существенными массами звеньев 1, 3, 5; их инерционные свойства характеризуются диагональной матрицей A (формула (74)).

$$A = \text{diag}\{m_3, m_3, J_{3k}, J_{10}, J_{5F}\} \quad (74)$$

Введем вектор \bar{p}_* (75), определяющий положение центра масс звена 3 (точка К), а также углы поворота звеньев 1, 3, 5.

$$\bar{p}_*^T = (x_k, y_k, \varphi, \varphi_1, \varphi_5) \quad (75)$$

Тогда, с учетом соотношений (73), вектор сил и моментов сил инерции определяется выражением (76).

$$\bar{\Phi} = -A\ddot{\bar{p}}_* = -A \frac{\partial \bar{p}_*}{\partial \bar{\theta}} \ddot{\bar{\theta}} \quad (76)$$

Далее находим вектор \bar{F} реакций в упругих элементах (77):

$$\bar{F}^T = (Q_1, Q_2, Q_3, F_4, F_5) \quad (77)$$

Приравняв его вектору упругих сил $-c\bar{\theta}$, получаем уравнение свободных колебаний механизма (78):

$$\bar{F}^T = (Q_1, Q_2, Q_3, F_4, F_5) \quad (78)$$

С учетом (66) можно записать уравнение свободных колебаний в форме (79):

$$C\bar{\theta} + UAU^T \ddot{\bar{\theta}} = 0. \quad (79)$$

Для получения его коэффициентов достаточно построить матрицу U , определив реакции при единичных силах, соответствующих компонентам вектора \bar{p}_* (выражение (80)).

$$U = (\bar{F}_{Px=1}, \bar{F}_{Py=1}, \bar{F}_{M=1}, \bar{F}_{M_1=1}, \bar{F}_{M_5=1}) \quad (80)$$

9. Уравнение колебаний механизма вблизи программного движения можно составить двумя способами. Для механизма, показанного на рис. 25, совершающего колебания вблизи движения с постоянной угловой скоростью двигателя ω_0 , эти способы приводят к уравнениям (85) и (86).

$$\bar{p}^T = (q, iq, x_s, y_s, \psi, x_B), \quad A = \text{diag}\{J_1, J_{20}, m_2, m_3, J_{3s}, m_4\} \quad (81)$$

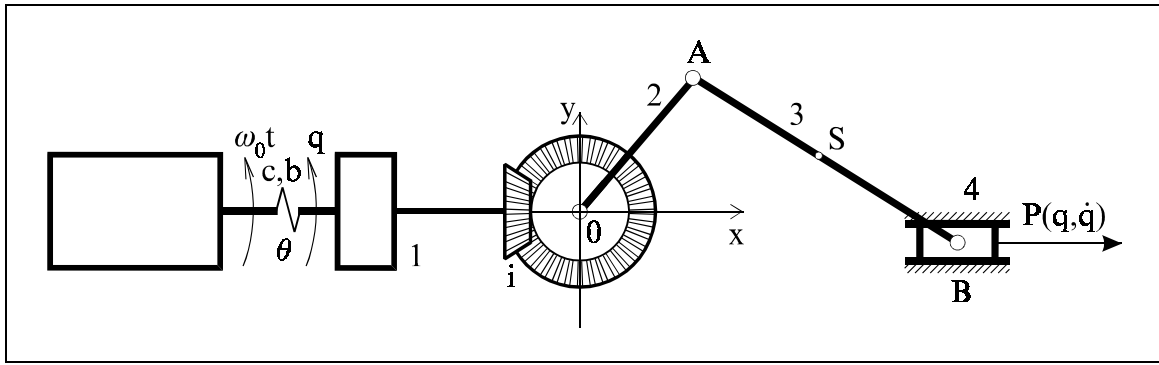


Рис. 25

$$M_c(\omega_0 t + \theta, \omega_0 + \dot{\theta}) = -M_{c0}(\omega_0) - v\dot{\theta} + \tilde{M}_c(\omega_0 t, \omega_0) + \frac{\partial \tilde{M}_c}{\partial q}(\omega_0 t, \omega_0) \cdot \theta + \frac{\partial \tilde{M}_c}{\partial \dot{q}}(\omega_0 t, \omega_0) \cdot \dot{\theta}. \quad (82)$$

$$c\theta + b\dot{\theta} + \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial q}\right)^T A \ddot{\bar{p}} = M_c(\omega_0 t - \theta, \omega_0 + \dot{\theta}) \quad (83)$$

$$\ddot{\bar{p}} = \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial q^2} \omega_0^2 + \frac{\partial \bar{p}}{\partial q} \ddot{\theta} + 2 \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial q^2} \omega_0 \dot{\theta} + \frac{\partial^3 \bar{p}}{\partial q^3} \omega_0^2 \theta \quad (84)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial q}\right)^T A \frac{\partial \bar{p}}{\partial q} \ddot{\theta} + (b + v + 2 \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial q}\right)^T A \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial q^2} \omega_0 - \frac{\partial \tilde{M}_c}{\partial \dot{q}}(\omega_0 t, \omega_0)) \dot{\theta} + \\ & + \left[c + \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial q}\right)^T A \frac{\partial^3 \bar{p}}{\partial q^3} \omega_0^2 - \frac{\partial \tilde{M}_c}{\partial q}(\omega_0 t, \omega_0) \right] \theta = \\ & = - \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial q}\right)^T A \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial q^2} \omega_0^2 - M_{c0}(\omega_0) + \tilde{M}_c(\omega_0 t, \omega_0). \end{aligned} \quad (85)$$

$$\begin{aligned} & [J_0 + \tilde{J}(\omega_0 t)] \cdot \ddot{\theta} + \left[b + v + \tilde{J}'(\omega_0 t) \omega_0 - \frac{\partial \tilde{M}_c}{\partial \dot{q}}(\omega_0 t, \omega_0) \right] \cdot \dot{\theta} + \\ & + \left[c + \frac{1}{2} \tilde{J}''(\omega_0 t) \cdot \omega_0^2 - \frac{\partial \tilde{M}_c}{\partial q}(\omega_0 t, \omega_0) \right] \cdot \theta = \\ & = - \frac{1}{2} \tilde{J}'(\omega_0 t) \cdot \omega_0^2 - M_{c0}(\omega_0) + \tilde{M}_c(\omega_0 t, \omega_0). \end{aligned} \quad (86)$$

Здесь в (81) \bar{p}^T – вектор координат звеньев, обладающих существенной массой; A – диагональная матрица их инерционных параметров. Формула (82) определяет разложение в ряд моментов сил сопротивления. Учет этих моментов приводит, в первом приближении, к уравнениям (86), связанным с использованием приведенного момента инерции системы.

